# Một Số Kiến Thức Về Hàm Số Tuần Hoàn

**Cao Minh Quang, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long**

**Trần Minh Hiền, THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước**

Trong chương trình THPT, kiến thức về hàm số tuần hoàn (HSTH) được đề cập rất ít, chủ yếu khi học sinh được học về các tính chất của các hàm số lượng giác ở lớp 11. Tuy nhiên, trong các kì thi học sinh giỏi, vẫn thường hay xuất hiện những bài toán liên quan đến nội dung này. Bài viết sau sẽ trình bày một số kiến thức về lý thuyết cũng như các bài toán về HSTH.

**1. Định nghĩa**

Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $D$ được gọi là HSTH nếu tồn tại ít nhất một số $T\neq 0$ sao cho với mọi $x\in D$ ta có:

i) $x\pm T\in D$

ii) $f(x\pm T)=f(x)$.

Số thực dương $T$ thỏa mãn các điều kiện trên được gọi là chu kì (CK) của HSTH $f(x)$. Nếu HSTH $f(x)$ có CK nhỏ nhất $T_0$ thì $T_0$ được gọi là chu kì cơ sở (CKCS) của HSTH $f(x)$.

Ta sẽ tìm hiểu một số tính chất cơ bản của HSTH.

**2. Một số tính chất**

2.1. Giả sử $f(x)$ là HSTH với CK $T$. Nếu $x_0\in D$ thì $x_0+nT\in D$, $x_0\notin D$ thì $x_0+nT\notin D$, với mọi $n\in\mathbb{Z}$.

2.2. Giả sử $f(x)$ là HSTH với CK $T$ và $f(x_0)=a$, $x_0\in D$, khi đó $f(x_0+nT)=a$, với mọi $n\in\mathbb{Z}$.

2.3. Nếu $T_1,T_2>0$ là các CK của HSTH $f(x)$ trên tập $D$ thì các thực dương $mT_1,nT_2,mT_1+nT$, với $m,n\in\mathbb{Z}^+$, đều là CK của $f(x)$ trên tập $D$.

2.4. Nếu $f(x)$ là HSTH với CKCS $T_0$ thì $T=nT_0,n\in\mathbb{Z}^+$ là một CK của HSTH $f(x)$.

2.5. Nếu $T_1,T_2$ là các CK của các HSTH $f(x),g(x)$ và $\dfrac{T_1}{T_2}$ là số hữu tỉ thì các hàm số $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x),f(x).g(x)$ cũng là các HSTH với chu kì $T=mT_1=nT_2,m,n\in\mathbb{Z}^+$.

Việc chứng minh các tính chất 2.1 – 2.4 tương đối đơn giản. Ta sẽ chứng minh tính chất 2.5.

**Chứng minh.** Vì $\dfrac{T_1}{T_2}$ là số hữu tỉ nên tồn tại $m,n\in\mathbb{Z}^+$ sao cho $\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{n}{m}$. Đặt $T=mT_1=nT_2$, với mọi $x\in D$, ta có

- $f(x)=f(x+T_1)=f(x+2T_1)=...=f(x+mT_1)=f(x+T)$,
- $g(x)=g(x+T_2)=g(x+2T_2)=...=g(x+nT_2)=g(x+T)$.

Do đó,

$$f(x+T)\pm g(x+T)=f(x)\pm g(x),f(x+T).g(x+T)=f(x).g(x).$$

Vậy $f(x)\pm g(x),f(x).g(x)$ là các HSTH với chu kì $T=mT_1=nT_2,m,n\in\mathbb{Z}^+$.

Việc kết luận một hàm số có phải là HSTH hay không phụ thuộc rất nhiều vào việc xác định CK hoặc CKCS (nếu có) của hàm số. Ta đề cập đến CK (CKCS) của một số hàm số thường gặp.

**3. Chu kì và chu kì cơ sở của một số hàm số**

3.1. Hàm số $f(x)=c$ ($c$ là hằng số) là HSTH với CK là số dương bất kì nhưng không có CKCS.

3.2. Hàm Dirichlet $f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\ 0, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ là HSTH với CK là số hữu tỉ dương bất kì nhưng không có CKCS.

3.3. Hàm số $f(x)=\{x\}=x-[x]$ là HSTH có CKCS $T_0=1$.

3.4. Các hàm số $f(x)=\sin x, f(x)=\cos x$ là các HSTH có CKCS $T_0=2\pi$. Các hàm số $f(x)=\tan x, f(x)=\cot x, f(x)=|\sin x|, f(x)=|\cos x|$ là các HSTH có CKCS $T_0=\pi$.

3.5. Các hàm số $f(x)=\sin(ax+b), f(x)=\cos(ax+b)$, $a\neq 0$ là các HSTH có CKCS $T_0=\dfrac{2\pi}{|a|}$.

Các hàm số $f(x)=\tan(ax+b), f(x)=\cot(ax+b)$, $a\neq 0$ là các HSTH có CKCS $T_0=\dfrac{\pi}{|a|}$.

**Chứng minh.** Ta sẽ chứng minh cho hàm số $f(x)=\{x\}=x-[x]$ và $f(x)=\sin(ax+b)$, các hàm số còn lại xin dành cho bạn đọc như bài tập tự luyện.

- Với mọi $n\in\mathbb{Z}$, ta có $f(x+n)=\{n+x\}=\{x\}=f(x)$. Do đó $f(x+1)=f(x)$. Mặt khác, nếu $0<T_0=t<1$ là CKCS của $f(x)$ thì với $x=1-t$, ta có $0<x<1$, do đó.

$$f(x+t)=f(1)=0\neq f(x)=\{x\}=1-t.$$

Vậy hàm số $f(x)=\{x\}=x-[x]$ là HSTH có CKCS $T_0=1$.

- Trước hết, ta chứng minh $T_0=2\pi/|a|$, $a\neq 0$ là CK của $f(x)=\sin(ax+b)$. Thật vậy, ta có

$$f(x+2\pi/|a|)=\sin\left[a(x+2\pi/|a|)+b\right]=\sin(ax\pm 2\pi+b)=\sin(ax+b)=f(x).$$

Giả sử tồn tại số dương $t<2\pi/|a|$ sao cho $f(x+t)=f(x)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Khi đó, với $x=\dfrac{\pi/2-b}{a}$, ta có

$$f(x+t)=\sin\left[a\left(\frac{\pi/2-b}{a}+t\right)+b\right]=\sin(\pi/2+at)=\cos at=\cos(t|a|)<1,$$

$$f(x)=\sin\left[a\left(\frac{\pi/2-b}{a}\right)+b\right]=\sin(\pi/2)=1.$$

Do đó, $f(x+t)=f(x)$ không xảy ra với mọi $x\in\mathbb{R}$, tức là $T_0=2\pi/|a|$, $a\neq 0$ là CKCS của $f(x)=\sin(ax+b)$.

**4. Một số bài toán**

**Bài toán 1.** Xét tính tuần hoàn và tìm CKCS (nếu có) của các hàm số sau

a) $f(x)=\cos\pi x$

b) $f(x)=\cos\sqrt{x}$

c) $f(x)=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

d) $f(x)=\cos x+\cos\sqrt{2}x$

e) $f(x)=\sin x^2$

**Lời giải**.

a) Theo tính chất 3.5, dễ thấy rằng $f(x)=\cos\pi x$ là HSTH với CKCS $T=2$.

b) Tập xác định của hàm số là $D=[0,+\infty)$. Giả sử $f(x)=\cos\sqrt{x}$ là HSTH với CK $T>0$. Nếu $x_0\in D$ thì $x_0+nT\in D$, với mọi $n\in\mathbb{Z}$. Tuy nhiên, điều này không thể xảy nếu cho $n<0$ đủ bé thì $x_0+nT<0$. Do đó $f(x)=\cos\sqrt{x}$ không là HSTH.

c) Ta có $f(x)=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}=\frac{1}{2}(\cos x+\cos 2x)=f(x+2\pi)$. Ta sẽ chứng minh $T_0=2\pi$ là CKCS của hàm số này. Thật vậy, với $0<a<2\pi$ thì $\cos a<1,\cos 2a\le 1$, suy ra

$$f(a)=\frac{1}{2}(\cos a+\cos 2a)<1=f(0).$$

Do đó, $f(x+a)=f(x)$ không thể xảy ra với mọi $x\in\mathbb{R}$, tức là $T_0=2\pi$ là số dương nhỏ nhất sao cho $f(x+T_0)=f(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ hay $T_0=2\pi$ là CKCS.

d) Giả sử $f(x)=\cos x+\cos\sqrt{2}x$ là HSTH, tức là tồn tại $T>0$ sao cho $f(x+T)=f(x)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$, hay $\cos(x+T)+\cos\sqrt{2}(x+T)=\cos x+\cos\sqrt{2}x$.

Với $x=0$, ta có $\cos T+\cos\sqrt{2}T=2$, suy ra $\cos T=\cos\sqrt{2}T=1$ hay $T=2k\pi,\sqrt{2}T=2m\pi$, trong đó $k,m\in\mathbb{Z}^+$. Do đó $\sqrt{2}=\frac{m}{k}\in\mathbb{Q}$ (vô lý). Vậy $f(x)=\cos x+\cos\sqrt{2}x$ không là HSTH.

e) Giả sử $f(x)=\sin x^2$ là HSTH, tức là tồn tại $T>0$ sao cho $f(x+T)=f(x)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$, hay $\sin(x+T)^2=\sin x^2$.

Với $x=0$, ta có $\sin T^2=0$ hay $T^2=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}^+$ hay $T=\sqrt{k\pi}$. Suy ra $f\left(x+\sqrt{k\pi}\right)=f(x)$.

Với $x=\sqrt{2k\pi}$, ta có $\sin\left(\sqrt{2k\pi}+\sqrt{k\pi}\right)^2=\sin\left(\sqrt{2k\pi}\right)^2=\sin(2k\pi)=0$, vô lý vì

$$\sin\left(\sqrt{2k\pi}+\sqrt{k\pi}\right)^2=\sin\left(2k\pi+k\pi+2k\pi\sqrt{2}\right)=\pm\sin\left(2k\pi\sqrt{2}\right)\neq 0.$$

Vậy $f(x)=\sin x^2$ không là HSTH.

**Bài toán 2.** Chứng minh rằng hàm số $f(x)=(-1)^{[x]}\{x\}$ là HSTH.

**Lời giải.** Ta sẽ chứng minh $T_0=2$ là CKCS của hàm số. Thật vậy, ta có

$$f(x+2)=(-1)^{[x+2]}\{x+2\}=(-1)^{2+[x]}\{x\}=(-1)^{[x]}\{x\}=f(x).$$

Giả sử tồn tại $0<a<2$ sao cho $f(x+a)=f(a)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Ta sẽ xét ba trường hợp.

(i). $0<a<1$. Chọn $x=2-a$ thì $1<x<2$. Do đó $f(x)=-\{x\}\neq 0$; $f(x+a)=f(2)=0$, suy ra $f(x+a)\neq f(x)$.

(ii). $a=1$. Chọn $0<x<1$, ta có $f(x)=\{x\}=x; f(x+a)=-\{x\}=-x$, $f(x+a)\neq f(x)$.

(iii). $1<a<2$. Chọn $x=2-a$ thì $0<x<1$, ta có $f(x)=\{x\}=x; f(x+a)=f(2)=0$, suy ra $f(x+a)\neq f(x)$.

Vậy không tồn tại $0<a<2$ sao cho $f(x+a)=f(a)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$ hay $T_0=2$ là CKCS.

**Bài toán 3.** [Việt Nam 1997, bảng B] Cho $a,b,c,d$ là các số thực khác $0$. Chứng minh rằng

$$f(x)=a\sin cx+b\cos dx \text{ là HSTH} \Leftrightarrow \frac{c}{d} \text{ là số hữu tỉ.}$$

**Lời giải.**

$(\Rightarrow)$ Giả sử $f(x)$ là HSTH, tức là tồn tại $T>0$ sao cho $f(x+T)=f(x)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Với $x=0$ ta có $f(T)=f(0)$ hay $a\sin cT+b\cos dT=b$.

Với $x=-T$, ta có $f(T)=f(0)$ hay $-a\sin cT+b\cos dT=b$.

Cộng theo từng vế các đẳng thức trên, ta nhận được $\cos dT=1$, suy ra $dT=2k\pi, k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Trừ theo từng vế các đẳng thức trên, ta nhận được $\sin cT=0$, suy ra $cT=m\pi, m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Từ đó suy ra $\frac{c}{d}=\frac{m}{2k}\in\mathbb{Q}$.

$(\Leftarrow)$ Ngược lại, giả sử $\frac{c}{d}$ là số hữu tỉ, tức là tồn tại $m,n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ sao cho $\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$. Ta chọn số dương $T=\frac{2\pi m}{c}=\frac{2\pi n}{d}$, khi đó với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có

$$f(x+T)=a\sin c\left(x+\frac{2\pi m}{c}\right)+b\cos d\left(x+\frac{2\pi n}{d}\right)=a\sin cx+b\cos dx=f(x).$$

Do đó, $f(x)$ là HSTH với CK $T=\frac{2\pi m}{c}=\frac{2\pi n}{d}$.

**Bài toán 4.** Chứng minh rằng nếu đồ thị hàm số $f(x)$ có hai trục đối xứng $x=a, x=b (a\neq b)$, thì $f(x)$ là HSTH.

**Lời giải.** Trước hết, ta gọi $(C)$ là đồ thị của hàm số. Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $a<b$. Tịnh tiến $(C)$ theo vector $\vec{v}=(-a,0)$. Bài toán trở thành: "Chứng minh rằng nếu đồ thị của hàm số $f(x)$ có hai trục đối xứng $x=0, x=c=b-a$ thì $f(x)$ là HSTH".

Vì đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng qua $x=0$ nên $f(x)=f(-x)$. Mặt khác, đồ thị của hàm số $f(x)$ cũng đối xứng qua $x=c$ nên $f(x)=f(2c-x)$. Suy ra $f(-x)=f(2c-x)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$, tức là $f(x)$ là HSTH với CK $T=2c=2(b-a)$.

**Bài toán 5.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $D$ và $f(x+a)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}, a\neq 0$. Chứng minh rằng $f(x)$ là HSTH.

**Lời giải.** Với mọi $x\in D, a\neq 0$, ta có

$$f\left(x+2a\right)=f\left[\left(x+a\right)+a\right]=\frac{f\left(x+a\right)-1}{f\left(x+a\right)+1}=\frac{\left(f\left(x\right)-1\right)/\left(f\left(x\right)+1\right)-1}{\left(f\left(x\right)-1\right)/\left(f\left(x\right)+1\right)+1}=\frac{-1}{f\left(x\right)}.$$

Suy ra, $f\left(x+4a\right)=\dfrac{-1}{f\left(x+2a\right)}=f\left(x\right)$. Do đó $f\left(x\right)$ là HSTH.

**Bài toán 6.** Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f\left(x+4\right)+f\left(x-4\right)=f\left(x\right),\text{ với mọi } x\in\mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $f\left(x\right)$ là HSTH.

**Lời giải.** Với mọi $x\in\mathbb{R}$, từ điều kiện bài toán, ta có $f\left(x+8\right)+f\left(x\right)=f\left(x+4\right)$. Suy ra $f\left(x+8\right)=-f\left(x-4\right)$. Do đó $f\left(x+12\right)=f\left(\left(x+4\right)+8\right)=-f\left(\left(x+4\right)-4\right)=-f\left(x\right)$, và

$$f\left(24\right)=f\left(\left(x+12\right)+12\right)=-f\left(x+12\right)=f\left(x\right).$$

Vậy $f\left(x\right)$ là HSTH với CK $T=24$.

**Bài toán 7.** Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f\left(x\right)=f\left(x-3\right)f\left(x+3\right),\text{ với mọi } x\in\mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $f\left(x\right)$ là HSTH.

**Lời giải.** Với mọi $x\in\mathbb{R}$, từ điều kiện bài toán, ta có $f\left(x+3\right)=f\left(x\right)f\left(x+6\right)$. Suy ra

$$f\left(x+3\right)=f\left(x-3\right)f\left(x+3\right)f\left(x+6\right),\text{ tức là } f\left(x+3\right)=0 \text{ hoặc } f\left(x-3\right)f\left(x+6\right)=1.$$

Nếu $f\left(x+3\right)=0$, với mọi $x\in\mathbb{R}$, thì $f\left(x\right)=0$, vì vậy $f\left(x\right)$ là HSTH.

Nếu $f\left(x-3\right)f\left(x+6\right)=1$ thì $f\left(x\right)f\left(x+9\right)=1$, do đó $f\left(x+9\right)f\left(x+18\right)=1$. Từ đó suy ra $f\left(x\right)=f\left(x+18\right)$ hay $f\left(x\right)$ là HSTH CK $T=18$.

**Bài toán 8.** Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f\left(x+1\right)+f\left(x-1\right)=\sqrt{2}f\left(x\right),\text{ với mọi } x\in\mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $f\left(x\right)$ là HSTH.

**Lời giải.** Với mọi $x\in\mathbb{R}$, từ điều kiện bài toán, ta có

$$f\left(x+2\right)+f\left(x\right)=\sqrt{2}f\left(x+1\right)=\sqrt{2}\left[\sqrt{2}f\left(x\right)-f\left(x-1\right)\right]=2f\left(x\right)-\sqrt{2}f\left(x-1\right).$$

Do đó $f\left(x+2\right)-f\left(x\right)=-\sqrt{2}f\left(x-1\right)$. Từ đẳng thức này, suy ra

$$f\left(x+3\right)-f\left(x+1\right)=-\sqrt{2}f\left(x\right)=-f\left(x+1\right)-f\left(x-1\right)\text{ hay } f\left(x+3\right)=-f\left(x-1\right).$$

Suy ra $f\left(x\right)=-f\left(x+4\right)=f\left(x+8\right)$. Vậy $f\left(x\right)$ là HSTH với CK $T=8$

**Bài toán 9.** Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn các điều kiện $f\left(x+3\right)\le f\left(x\right)+3$, $f\left(x+2\right)\ge f\left(x\right)+2$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng $g\left(x\right)=f\left(x\right)-x$ là HSTH.

**Lời giải.** Ta sẽ chứng minh $g\left(x+6\right)=g\left(x\right)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Thật vậy, ta có

$$g(x+6)=f(x+6)-x-6=f(x+3+3)-x-6\le$$
$$\le f(x+3)+3-x-6\le f(x)+3+3-x-6=f(x)-x=g(x).$$

Mặt khác, $g(x+6)=f(x+6)-x-6=f(x+4+2)-x-6\ge f(x+4)+2-x-6\ge$
$$\ge f(x+2)+4-x-6\ge f(x)+6-x-6-x=f(x)-x=g(x).$$

Suy ra $g(x+6)=g(x)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$ hay $g(x)=f(x)-x$ là HSTH với CK $T=6$.

**Bài toán 10.** Chứng minh rằng nếu HSTH $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $kf(x)=f(kx)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{R}, k\ne 0, k\ne \pm 1$ thì $f(x)$ không có CKCS.

**Lời giải.** Giả sử $T_0$ là CKCS của HSTH $f(x)$. Khi đó, với mọi $x\in\mathbb{R}, |k|\ne 1, k\ne 0$, ta có

$$f(kx+T_0)=f(kx)=kf(x) \text{ và } f(kx+T_0)=f\left[k\left(x+\frac{T_0}{k}\right)\right]=kf\left(x+\frac{T_0}{k}\right).$$

Do đó, $f(x)=f\left(x+\frac{T_0}{k}\right)$. Ta sẽ xét hai trường hợp sau:

(i) $|k|>1$. Nếu $k>1$ thì $\frac{T_0}{k}<T_0$ (vô lý vì $T_0$ là CKCS). Nếu $k<-1$ hay $-k>1$, bằng cách đặt $y=x+\frac{T_0}{k}$, ta có $f(y)=f\left(y-\frac{T_0}{k}\right)$ (vô lý vì $-\frac{T_0}{k}<T_0$).

(ii) $|k|<1$. Với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có $f(x+kT_0)=f\left[k\left(\frac{x}{k}+T_0\right)\right]=kf\left(\frac{x}{k}+T_0\right)=kf\left(\frac{x}{k}\right)=f(x)$. Đặt $k'=\frac{1}{k}$, ta nhận được $f(x)=f\left(x+\frac{T_0}{k'}\right)$, với $|k'|>1$. Theo (i), ta cũng nhận được điều vô lí.

Tóm lại, $f(x)$ không có CKCS.

**Bài toán 11.** Cho $a>0$ và hàm số $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ thỏa điều kiện $f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$, với mọi $x>0$. Chứng minh rằng $f(x)$ là HSTH.

**Lời giải.** Vì $f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$, với mọi $x>0$ nên $f(x+a)\ge\frac{1}{2}$.

Do đó, $f(x)\ge\frac{1}{2}$. Suy ra

$$f(x+2a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-f^2(x+a)}=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)[1-f(x+a)]}$$
$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\right)\left(\frac{1}{2}-\sqrt{f(x)-f^2(x)}\right)}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}$$
$$=\frac{1}{2}+\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}+f(x)-\frac{1}{2}=f(x).$$

Vậy tồn tại $T=2a>0$ sao cho $f(x+T)=f(x)$, với mọi $x\in\mathbb{R}^+$ nên $f(x)$ là HSTH.

**Bài toán 12.** Tồn tại hay không các hàm số $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, với $g$ là HSTH thỏa mãn điều kiện $x^3 = f([x]) + g(x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$, kí hiệu $[\bullet]$ chỉ phần nguyên.

**Lời giải.** Giả sử tồn tại các hàm $f, g$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Gọi $T_0$ là CK của $g$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$(x+T_0)^3 = f([x+T_0]) + g(x+T_0) = f([x+T_0]) + g(x).$$

Suy ra $f([x+T_0]) - f([x]) = (x+T_0)^3 - x^3 = 3T_0x^2 + 3T_0^2x + T_0^3\,(*)$.

Với mọi $x \in [0, [T_0]+1-T_0)$ thì vế trái của (*) bằng 0, do đó (*) là đa thức bậc 2 có vô số nghiệm, suy ra $3T_0 = 3T_0^2 = T_0^3 = 0$ hay $T_0 = 0$ (vô lý).

Vậy không thể tồn tại các hàm $f, g$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Bài toán 13.** Giả sử $f(x)$ là một HSTH có CKCS $T_0$. Tồn tại hay không $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\frac{1}{x}\right)$?

**Lời giải.** Trước hết, ta nhận thấy rằng $f(x) \neq c$ ($c$ là hằng số), vì hàm hằng không có CKCS. Do đó, sẽ tồn tại hai số thực $a, b$ sao cho $f(a) \neq f(b)$. Đặt $a_n = a + nT_0, b_n = b + nT_0$. Khi đó, ta có $\frac{1}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \frac{1}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Do đó

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{1/a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a+nT_0) = \lim_{n\to\infty} f(a) = f(a),$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{1/b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} f(b+nT_0) = \lim_{n\to\infty} f(b) = f(b).$$

Suy ra, $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{1/a_n}\right) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{1/b_n}\right)$ hay không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

**Bài toán 14.** Cho $f(x)$ là HSTH và liên tục trên $\mathbb{R}$, có CK $2T$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0+T) = f(x_0)$.

**Lời giải.** Đặt $g(x) = f(x+T) - f(x)$. Ta có $g(x+T) = f(x+2T) - f(x+T) = f(x) - f(x+T)$.

Do đó, $g(x).g(x+T) = -[f(x+T) - f(x)]^2 \leq 0$.

Vì $f(x)$ là hàm số liên tục nên $g(x)$ cũng là hàm số liên tục, do đó, theo định lý Cauchy – Bolzano, tồn tại $x_0 \in [x, x+T]$ sao cho $g(x_0) = 0$ hay $f(x_0+T) = f(x_0)$.

**Bài toán 15.** Cho hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$;

(ii) Tồn tại số thực $x_0$ sao cho $f(x_0) = -1$.

Chứng minh rằng $f(x)$ là HSTH.

**Lời giải.** Cho $x = y = 0$, ta nhận được $2f(0) = 2(f(0))^2$. Do đó $f(0) = 0$ hoặc $f(0) = 2$.

Nếu $f(0)=0$, với $x=x_0, y=0$, ta được $2f(x_0)=0$, mâu thuẫn điều kiện (ii). Vậy ta phải có được $f(0)=1$, và như vậy $x_0 \neq 0$.

Cho $x=y$, ta được $f(2x)+f(0)=2\left(f(x)\right)^2$ hay $f(2x)=2f^2(x)-1$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Cho $x=y=x_0$, ta được $f(2x_0)+f(0)=2\left(f(x)\right)^2$ hay $f(2x_0)=1$.

Thay $x$ bởi $x+2x_0$ và $y$ bởi $x-2x_0$, ta được $f(2x)+f(4x_0)=2f(x+2x_0)f(x-2x_0)$.

Nhưng $f(4x_0)=2f^2(2x_0)-1$, do đó

$$f(x+2x_0)f(x-2x_0)=f(2x)+f(4x_0)=f(2x)+1=f^2(x).$$

Mặt khác, với $x \in \mathbb{R}$ và $y=2x_0$, ta có $f(x+2x_0)+f(x-2x_0)=2f(x)$. Suy ra

$$\left[f(x+2x_0)-f(x-2x_0)\right]^2=$$

$$\left[f(x+2x_0)+f(x-2x_0)\right]^2-4f=(x+2x_0)+f(x-2x_0)=4f^2(x)-4f^2(x)=0.$$

Do đó, với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $f(x+2x_0)=f(x-2x_0)=f(x)$ hay $f(x)$ là HSTH.

**Bài toán 16.** Cho hàm số $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\left|f(x)\right| \leq 2008$ và

$$f\left(x+\frac{13}{42}\right)+f(x)=f\left(x+\frac{1}{6}\right)+f\left(x+\frac{1}{7}\right), \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $f(x)$ là HSTH.

**Lời giải.** Đặt $a=\frac{1}{6}, b=\frac{1}{7}$ thì $a+b=\frac{13}{42}$. Khi đó, mối quan hệ của hàm số có thể được viết lại như sau

$$f(x+a+b)+f(x)=f(x+a)+f(x+b), \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Trong đẳng thức trên, ta thay liên tiếp $x$ bởi $x+a, x+2a, x+3a, x+4a, x+5a$, rồi cộng lại, ta thu được

$$f(x+1+b)+f(x)=f(x+1)+f(x+b), \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Trong đẳng thức vừa nhận được, ta thay liên tiếp $x$ bởi $x+b, x+2b, x+3b, x+4b, x+5b$, rồi cộng lại, ta thu được

$$f(x+2)+f(x)=2f(x+1) \text{ hay } f(x+2)-f(x+1)=f(x+1)-f(x), \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $f(x+1)-f(x)=a$. Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được, với mọi số $n$ nguyên dương thì $f(x+n)-f(x+n-1)=a$. Do đó, $f(x+n)-f(x)=na$. Ta sẽ chứng minh $a=0$, và khi đó $f(x)$ là HSTH với CK $T=1$. Thật vậy, giả sử $a \neq 0$, thì

$$n|a|=|na|=\left|f(x+n)-f(x)\right| \leq 2.2008, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Nhưng điều này không xảy ra khi $n>0$ đủ lớn. Do đó $a=0$.

**Bài toán 17.** Cho hàm số $f:\mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ và số nguyên dương $a$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $f(a)=f(1995), f(a+1)=f(1996), f(a+2)=f(1997)$;

(ii) $f(n+a)=\dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}$, với mọi $n\in\mathbb{Z}^+$.

(a) Chứng minh rằng $f(n+4a)=f(n)$ với mọi $n\in\mathbb{Z}^+$.

(b) Xác định giá trị nhỏ nhất của $a$ thỏa mãn bài toán.

Lời giải. (a) Trước hết ta nhận thấy rằng, để có được điều kiện (ii), ta phải có $f(n)\neq -1$, với mọi $n\in\mathbb{Z}$. Hơn nữa, nếu tồn tại $n\in\mathbb{Z}$ sao cho $f(n)=0$ thì $f(n+a)=-1$, suy ra $f(n+2a)$ là không xác định. Do đó $f(n)\notin\{-1,0\}$, với mọi $n\in\mathbb{Z}$. Ta có

$$f(n+2a)=\frac{f(n+a)-1}{f(n+a)+1}=\frac{(f(n)-1)/(f(n)+1)-1}{(f(n)-1)/(f(n)+1)+1}=-\frac{1}{f(n)},\text{ với mọi } n\in\mathbb{Z}.$$

Do đó $f(n+4a)=-\dfrac{1}{f(n+2a)}=f(n)$, với mọi $n\in\mathbb{Z}$.

(b) Xét $a=1$, thì $f(1)=f(1995), f(2)=f(1996), f(3)=f(1997), f(n+1)=\dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}$.

Khi đó, $f(n+4)=f(n)$ và $f(n+2)=\dfrac{-1}{f(n)}$, với mọi $n\in\mathbb{Z}^+$. Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được $f(n+4k)=f(n)$, với mọi $n,k\in\mathbb{Z}^+$.

Vì $1995=3+4.498$ nên $f(1)=f(1995)=f(3)$ (vô lý vì $f(3)=\dfrac{-1}{f(1)}$).

Xét $a=2$, thì $f(2)=f(1995), f(3)=f(1996), f(4)=f(1997)$; và với mọi $n\in\mathbb{Z}^+$ thì $f(n+8)=f(n)$, $f(n+4)=\dfrac{-1}{f(n)}$, với mọi $n\in\mathbb{Z}^+$. Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được $f(n+8k)=f(n)$, với mọi $n,k\in\mathbb{Z}^+$. Ta có

- $1995=3+8.249$ nên $f(2)=f(1995)=f(3)$.
- $1996=4+8.249$ nên $f(3)=f(1996)=f(4)$.
- $1997=5+8.249$ nên $f(4)=f(1997)=f(5)$.

Suy ra $f(3)=f(5)$.

Mặt khác ta có $f(5)=-\dfrac{1}{f(1)}$ hay $f(5)f(1)=-1$. Suy ra

$$f(5)=f(3)=\frac{f(1)-1}{f(1)+1}\text{ hay } f(5)f(1)+f(5)=f(1)-1 \text{ hay } f(5)=f(1) \text{ (vô lý).}$$

Ta sẽ chứng minh $a=3$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm.

Ta xây dựng hàm $f$ như sau: $f(1), f(2), f(3)$ nhận các giá trị tùy ý khác 0 và – 1. Với mỗi $n>3$, ta xác định $f(n)=\dfrac{f(n-3)-1}{f(n+3)+1}$. Ta chứng minh hàm $f$ vừa được xây dựng như trên sẽ thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Ta có $f\left(n+3\right)=\dfrac{f\left(n\right)-1}{f\left(n\right)+1}$. Suy ra $f\left(n+a\right)=\dfrac{f\left(n\right)-1}{f\left(n\right)+1}$, với mọi $n\in\mathbb{Z}$.

Mặt khác $f\left(n+12\right)=f\left(n\right)$, với mọi $n\in\mathbb{Z}$. Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được $f\left(n+12k\right)=f\left(n\right)$, với mọi $n,k\in\mathbb{Z}^{+}$. Ta có

- $f\left(1995\right)=f\left(3+12.166\right)=f\left(3\right)$.
- $f\left(1996\right)=f\left(4+12.166\right)=f\left(4\right)$.
- $f\left(1997\right)=f\left(5+12.166\right)=f\left(5\right)$.

Vậy $a=3$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm.

**Bài toán 18.** Dãy số $\left\{x_n\right\}$ được cho bởi công thức $x_1=2, x_{n+1}=\dfrac{2+x_n}{1-2x_n}, n\in Z^{+}$. Chứng minh rằng

(a) $x_n\neq 0$, với mọi $n\in\mathbb{N}^{*}$.

(b) Dãy $\left\{x_n\right\}$ không tuần hoàn.

**Lời giải.** (a) Trước hết, dễ nhận thấy rằng các số hạng của dãy này đều là số hữu tỷ.

Ta đặt $x_1=\tan\alpha=2$, thì

$$x_2=\frac{2+x_1}{1-2x_1}=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\tan 2\alpha\,,\ \ldots,\ x_{n+1}=\frac{\tan\alpha+\tan n\alpha}{1-\tan\alpha\tan n\alpha}=\tan\left(n+1\right)\alpha\,.$$

Nếu $x_n=0$ với $n=2k+1, k\in\mathbb{N}$ thì $x_{2k+1}=\dfrac{2+x_{2k}}{1-2x_{2k}}=0$, hay $x_{2k}=-2$. Khi đó

$$\tan 2k\alpha=-2\Leftrightarrow\frac{2\tan k\alpha}{1-\tan^2 k\alpha}=-2\Leftrightarrow\frac{x_k}{1-x_k^2}=-1\Leftrightarrow x_k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\ \text{(vô lý)}.$$

Nếu $x_n=0$ với $n=2k, k\in\mathbb{N}$ thì $\tan 2k\alpha=\dfrac{2\tan k\alpha}{1-\tan^2 k\alpha}=0$. Do đó $x_k=\tan k\alpha=0$, suy ra $k$ là một số chẵn (vì $x_n\neq 0$, với mọi $n$ là số lẻ). Vì vậy $k=2^{t}\left(2m+1\right)$. Tiếp tục lý luận như trên, ta có

$$x_{2^{t-1}(2m+1)}=0,\ldots,x_{2(2m+1)}=0,x_{2m+1}=0\ \text{(vô lý)}.$$

Vậy $x_n\neq 0$, với mọi $n\in\mathbb{N}^{*}$.

(b) Giả sử dãy $\left\{x_n\right\}$ tuần hoàn, tức là tồn tại $m\in\mathbb{Z}^{+}$ sao cho $x_{m+n}=x_n, n\in\mathbb{Z}^{+}$. Suy ra

$$\tan\left(m+n\right)\alpha=\tan n\alpha\Leftrightarrow\frac{\sin m\alpha}{\cos\left(m+n\right)\alpha\cos n\alpha}=0\Leftrightarrow\sin m\alpha=0.$$

Do đó, $x_m=\tan m\alpha=0$ (vô lý). Vậy dãy $\left\{x_n\right\}$ không tuần hoàn.

**Một số bài tập tự luyện**

**Bài 1.** Xét tính tuần hoàn và tìm CKCS (nếu có) của các hàm số sau

a) $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$

b) $f(x)=\cos\pi x+\sin 2\pi x$

c) $f(x)=x^2\cos x$

d) $f(x)=x-n\left[\dfrac{x}{n}\right]$

e) $f(x)=(-1)^{|x|}\cos\left(\pi x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

**Bài 2.** Chứng minh rằng nếu đồ thị hàm số $f(x)$ có tâm trục đối xứng $E(a,b)$ và có trục đối xứng $x=c(c\neq a)$, thì $f(x)$ là HSTH.

**Bài 3.** Cho $f(x)$ là HSTH và liên tục trên $\mathbb{R}$, có CKCS $T_0$. Chứng minh rằng, với mọi $a\in\mathbb{R}$ thì $\int\limits_a^{a+T_0} f(x)dx=\int\limits_0^{T_0} f(x)dx$.

**Bài 4.** Cho $f(x)$ là HSTH, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a, a\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng với mọi $x\in\mathbb{R}$, ta có $f(x)=a$.

**Bài 5.** Cho $f(x), g(x)$ là các HSTH, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=a, a\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f(x)=g(x)+a$, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

**Bài 6.** Cho hàm số $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\setminus\{3\}$, sao cho tồn tại số thực $a>0$ thỏa mãn điều kiện $f(x+a)=\dfrac{f(x)-5}{f(x)-3}$. Chứng minh rằng $f(x)$ là HSTH.

**Bài 7.** Cho hàm số $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ là HSTH sao cho tập hợp $\{f(n)\mid n\in\mathbb{N}\}$ chứa vô số phần tử. Chứng minh rằng chu kì của hàm số $f(x)$ là một số vô tỉ.

**Bài 8.** Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và tồn tại số thực $a\neq 0$ sao cho

(i) $f(x+a)=f(x)+g(x)$;

(ii) $g(x+na)=\begin{cases} g(x), n\,\vdots\,2 \\ -g(x), n\,\not\vdots\,2\end{cases}$;

(iii) $f(x)=1$ nếu $0\leq x\leq a$.

Chứng minh rằng nếu $|g(x)|\leq 1$ thì $0\leq f(x)\leq 2$.

**Bài 9.** Cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}: x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ \dfrac{1}{2+\tan^2 x}: x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}, k\in\mathbb{Z}.$$

Chứng minh rằng hàm số $g(x) = f(x) + f(ax)$ là HSTH khi và chỉ khi $a$ là số vô tỉ.

**Bài 10.** Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ với hệ số thực sao cho $\cos f(x), x \in \mathbb{R}$ là HSTH.

**Bài 11.** Cho hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau

(i) $f(x)$ là hàm không giảm;

(ii) $f(x)$ là HSTH.

Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm hằng.

**Bài 12.** Dãy số nguyên $\{u_n\}, n = 1, 2, ...$ được xác định như sau:

$$u_1 = 1990, u_2 = 1989, u_3 = 2000,\ u_{n+3} = 19u_{n+2} + 9u_{n+1} + 1991, n \in \mathbb{N}^*.$$

Với mỗi $n$, gọi $r_n$ là số dư trong phép chia $u_n$ cho 1992. Chứng minh rằng dãy $\{r_n\}$ là dãy số tuần hoàn.

---

## Tài liệu tham khảo


**[1] Doãn Minh Cường, Nguyễn Huy Đoan, Ngô Xuân Sơn.** "Những bài toán sơ cấp chọn lọc (tập 1)". NXB Giáo Dục, 1986.

**[2] Nguyễn Vũ Thanh.** "Phương pháp chọn lọc giải toán lượng giác". NXB Cà Mau, 1993.

**[3] Nguyễn Vũ Thanh.** "Chuyên đề bồi dưỡng số học". NXB Tiền Giang, 1993.

**[4] Nguyễn Quý Dy, Nguyễn Văn Nho.** "Tuyển tập 200 bài toán giải tích". NXB Giáo Dục, 2000.

**[5] Phan Huy Khải.** "Toán nâng cao cho học sinh THPT – Đại Số (tập 1)". NXB Giáo Dục, 2000.

**[6] Nguyễn Việt Hải.** "Khai thác định nghĩa hàm số tuần hoàn". Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ, số 1/2000.

**[7] Lê Sáng.** "Dãy số và các vấn đề liên quan". NXB Đà Nẵng, 1994.

**[8] Nguyễn Trọng Tuấn.** "Bài toán hàm số qua các kì thi Olympic". NXB Giáo Dục, 2004.