

ĐÁP ÁN OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN LẦN THỨ XVIII

Môn : Đại số

Câu 1. Cho A, B là các ma trận vuông cấp 2010 với hệ số thực sao cho $\det A = \det(A + B) = \det(A + 2B) = \dots = \det(A + 2010B) = 0$.

(i) Chứng minh rằng $\det(xA + yB) = 0$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) Tìm ví dụ chứng tỏ kết luận trên không còn đúng nếu chỉ có $\det A = \det(A + B) = \det(A + 2B) = \dots = \det(A + 2009B) = 0$.

Giải.

(i) Nhận xét rằng định thức $p(t) = \det(A + tB)$ là một đa thức bậc 2010 của t . Vì $p(0) = \dots = p(2010) = 0$ nên ta có $p(t) = 0$. Định thức $q(t) = \det(tA + B)$ là một đa thức bậc 2010 của t . Chú ý rằng $q(t) = t^{2010}p(t^{-1})$ khi $t \neq 0$. Do đó ta cũng có $q(t) = 0$ với mọi t .

(ii) Có thể lấy ví dụ $A = \text{diag}(0, 1, 2, \dots, 2009)$ và $B = -I$.

Câu 2. Cho $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ là các dãy số được xác định bởi: $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ và $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -u_n - 7v_n + 5w_n, \\ v_{n+1} &= -2u_n - 8v_n + 6w_n, \\ w_{n+1} &= -4u_n - 16v_n + 12w_n. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $v_n - 2$ là số nguyên chia hết cho 2^n .

Giải. Ký hiệu $A = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 5 \\ -2 & -8 & 6 \\ -4 & -16 & 12 \end{pmatrix}$ và với $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Ta có

$\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. Vậy nên $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$. Đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(x) = -x(x-1)(x-2).$$

Do đó A có 3 giá trị riêng phân biệt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ và A chéo hóa được. Từ đó, nếu kí hiệu $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ thì $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$. Đặt

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ thì $A = PBP^{-1}$. Từ đây suy ra $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0 = PB^n P^{-1} X_0$.

Do đó $v_n = 2^n + 2$.

Câu 3.

(i) Chứng minh rằng ứng với mỗi số n nguyên dương, biểu thức $x^n + y^n + z^n$ có thể biểu diễn dưới dạng đa thức $P_n(s, p, q)$ bậc không quá n của $s = x + y + z$, $p = xy + yz + zx$, $q = xyz$.

(ii) Hãy tìm tổng các hệ số của đa thức $P_{2010}(s, p, q)$.

Giải.

(i) Bằng qui nạp theo n .

(ii) Giả sử $x^{2010} + y^{2010} + z^{2010} = P(s, p, q)$. Ta cần tìm tổng các hệ số của $P(s, p, q)$ tức là cần tìm $P(1, 1, 1)$. Từ Định lí Vi-et, x, y, z phải là nghiệm của phương trình $t^3 - t^2 + t - 1 = 0$. Từ đó chỉ việc chọn $x = 1, y = i$ và $z = -i$, ta được $P(1, 1, 1) = -1$.

Câu 4. Xác định các đa thức thực $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$P(x)P(x^2) = P(x^3 + 2x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải. Ta nhận thấy đa thức hằng $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv 1$ thỏa mãn bài toán. Bây giờ ta chứng minh rằng các đa thức bậc dương không thỏa mãn. Chú ý rằng đẳng thức trong bài cũng đúng với các giá trị phức. Giả sử x_0 là một nghiệm (thực hoặc phức) của $P(x)$. Nếu $x_0 = 0$ thì $P(x) = x^s Q(x)$, trong đó $s \geq 1$, $Q(x)$ là đa thức với $Q(0) \neq 0$.

Thế vào điều kiện đã cho, ta thu được

$$x^{2s} Q(x) Q(x^2) = (x^2 + 2)^s Q(x^3 + 2x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $Q(0) \neq 0$.

Vậy nên $x_0 \neq 0$. Ta có thể giả thiết môđun $|x_0|$ có giá trị lớn nhất trong các nghiệm của $P(x)$. Khi đó $x_0^3 + 2x_0$ và $(\sqrt{x_0})^3 + 2\sqrt{x_0}$ cũng là nghiệm. Do đó $|x_0^3 + 2x_0| \leq |x_0|$ và $|(\sqrt{x_0})^3 + 2\sqrt{x_0}| \leq |x_0|$.

Đặt $x_0 = a + bi$. Điều kiện $|x_0^3 + 2x_0| \leq |x_0|$ tương đương với

$$(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 + 4(a^2 - b^2) + 3 \leq 0.$$

Từ đó $4b^2 \geq 3 + 4a^2$ và thay vào tiếp, ta lại có

$$4b^2 \geq 4a^2b^2 + 4a^2 + 3 \geq a^2 \cdot 3 + 4a^2 + 3 = 7a^2 + 3. \quad (*)$$

Điều kiện $|(\sqrt{x_0})^3 + 2\sqrt{x_0}| \leq |x_0|$ tương đương với $[(a+2)^2 + b^2]^2 \leq a^2 + b^2$ hay

$$(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + 8a + 7) + (4a + 4)^2 \leq 0. \quad (**)$$

Theo (*) ta có:

$$a^2 + b^2 + 8a + 7 \geq \frac{1}{4}(11a^2 + 32a + 31) = \frac{1}{4} \left[\left(3a + \frac{16}{3} \right)^2 + 2a^2 + \frac{23}{9} \right] > 0,$$

mâu thuẫn với (**).

Câu 5. Chọn một trong hai câu sau:

5a. Cho A là ma trận thực, vuông cấp $n \geq 2$, có tổng các phần tử trên đường chéo bằng 10 và $\text{rank } A = 1$. Tìm đa thức đặc trưng và đa thức tối thiểu của A (tức đa thức $p(t) \neq 0$ bậc nhỏ nhất với hệ số của lũy thừa bậc cao nhất bằng 1, sao cho $p(A) = 0$).

5b. Cho A, B, C là các ma trận thực, vuông cấp n , trong đó A khả nghịch và đồng thời giao hoán với B và C . Giả sử $C(A + B) = B$. Chứng minh rằng B và C giao hoán với nhau.

Giải.

Câu 5a.

Cách 1: Tính trực tiếp

Vì $\text{rank}(A) = 1$ nên tồn tại vectơ khác 0 sao cho các vectơ dòng còn lại đều biểu diễn được tuyến tính qua nó. Do đó ma trận A có dạng sau

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_1 x_2 & \dots & \lambda_1 x_n \\ \lambda_2 x_1 & \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_2 x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_i x_1 & \lambda_i x_2 & \dots & \lambda_i x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n x_1 & \lambda_n x_2 & \dots & \lambda_n x_n \end{bmatrix},$$

trong đó

$$U := \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_i \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \neq 0, \quad V := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \neq 0.$$

Khi đó $A = UV^t$ và

$$\begin{aligned} V^t U &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_i \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_i x_i + \dots + \lambda_n x_n = \text{trace}(A). \end{aligned}$$

a) Ta có

$$\begin{aligned} A^2 &= (UV^t)(UV^t) = U(V^t U)V^t = U(\text{trace}(A))V^t \\ &= \text{trace}(A)UV^t = \text{trace}(A)A = 10A \end{aligned}$$

Vậy đa thức tối thiểu là $P(t) = t^2 - 10t$.

b) Ta tính định thức $D_n(t) = \det(A + tI_n)$:

$$\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} \lambda_1 x_1 + t & \lambda_1 x_2 & \dots & \lambda_1 x_n \\ \lambda_2 x_1 & \lambda_2 x_2 + t & \dots & \lambda_2 x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_i x_1 & \lambda_i x_2 & \dots & \lambda_i x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n x_1 & \lambda_n x_2 & \dots & \lambda_n x_n + t \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda_1 x_1 + t & \lambda_1 x_2 & \dots & \lambda_1 x_n \\ \lambda_2 x_1 & \lambda_2 x_2 + t & \dots & \lambda_2 x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_i x_1 & \lambda_i x_2 & \dots & \lambda_i x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n x_1 & \lambda_n x_2 & \dots & \lambda_n x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_1 x_2 & \dots & \lambda_1 x_n \\ \lambda_2 x_1 & \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_2 x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_i x_1 & \lambda_i x_2 & \dots & \lambda_i x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t \end{vmatrix} \\
&= \lambda_n x_n \begin{vmatrix} \lambda_1 x_1 + t & \lambda_1 x_2 & \dots & \lambda_1 \\ \lambda_2 x_1 & \lambda_2 x_2 + t & \dots & \lambda_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_i x_1 & \lambda_i x_2 & \dots & \lambda_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & \dots & 1 \end{vmatrix} + t D_{n-1} \\
&= \lambda_n x_n \begin{vmatrix} t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & \dots & 1 \end{vmatrix} + t D_{n-1} = \lambda_n x_n t^{n-1} + t D_{n-1}.
\end{aligned}$$

Ta dễ dàng chứng minh bằng quy nạp

$$\begin{aligned}
D_n &= t^{n-1}(\lambda_n x_n + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \dots + \lambda_2 x_2 + D_1) \\
&= t^{n-1}(\text{trace}(A) + t) = t^{n-1}(t + 10).
\end{aligned}$$

Vậy đa thức đặc trưng là $(-1)^n t^{n-1}(t - 10)$.

Cách 2: Vì $\dim \text{Ker } A = n - 1$ nên A có đúng $n - 1$ véc tơ riêng ứng với 0 . Do đó giá trị riêng còn lại là 1 số thực. Từ đó A chéo hoá được và trên đường chéo chỉ có 1 phần tử khác 0 chính là vết $= 10$. Từ đó tính ra ngay đa thức đặc trưng và đa thức tối tiểu.

Câu 5b. Từ giả thiết suy ra $A + C(A + B) = A + B$ hay

$$A = (I - C)(A + B). \quad (1)$$

Do A khả nghịch và đồng thời giao hoán với B và C nên từ (1) suy ra

$$I = (I - C)(A + B)A^{-1} = (I - C)A^{-1}(A + B),$$

tức $I - C$ khả nghịch và vì vậy

$$I = (A + B)A^{-1}(I - C) = A^{-1}(A + B)(I - C),$$

hay

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{I} - \mathbf{C}). \quad (2)$$

Từ (2) suy ra

$$\mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{B} - (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C},$$

hay $\mathbf{B} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C}$. Vậy nên $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ tức $\mathbf{BC} = \mathbf{CB}$, đpcm.