

ĐÁP ÁN OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN LẦN THỨ XVIII (2010)

Môn: Giải tích

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \ln(x+1)$.a) Chứng minh rằng với mọi $x > 0$, tồn tại duy nhất số thực c thỏa mãn điều kiện $f(x) = xf'(c)$ mà ta ký hiệu là $c(x)$.b) Tìm $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{c(x)}{x}$.**Giải.**

a) Yêu cầu bài toán tương đương với việc chứng minh phương trình

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{1}{c+1}$$

có nghiệm duy nhất c với mọi $x > 0$. Ta có thể giải trực tiếp được

$$c = \frac{x}{\ln(x+1)} - 1.$$

b) Ta có thể tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{c(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{x}{\ln(x+1)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)}$$

bằng cách sử dụng công thức Taylor: $\ln(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$ hoặc dùng quy tắc L'Hopitale:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{\ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\frac{1}{1+x}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 2. Cho dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n(1 + x_n^{2010}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Tìm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_1^{2010}}{x_2} + \frac{x_2^{2010}}{x_3} + \dots + \frac{x_n^{2010}}{x_{n+1}} \right).$$

Giải. Với mỗi $k \geq 1$, ta có

$$\frac{x_k^{2010}}{x_{k+1}} = \frac{x_k^{2011}}{x_k x_{k+1}} = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k x_{k+1}} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}.$$

Suy ra

$$\left(\frac{x_1^{2010}}{x_2} + \frac{x_2^{2010}}{x_3} + \dots + \frac{x_n^{2010}}{x_{n+1}} \right) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{k+1}}.$$

Rõ ràng $\{x_n\}$ là dãy tăng. Nhận xét rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Suy ra giới hạn cần tính bằng 1.

Câu 3. Cho $a \in \mathbb{R}$ và hàm số $f(x)$ khả vi trên $[0, \infty)$ thỏa mãn các điều kiện $f(0) \geq 0$ và

$$f'(x) + af(x) \geq 0, \quad \forall x \in [0, \infty).$$

Chứng minh rằng

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \geq 0.$$

Giải. Từ giả thiết ta có

$$e^{ax}[f'(x) + af(x)] \geq 0, \quad \forall x \in [0, \infty),$$

hay

$$[e^{ax}f(x)]' \geq 0, \quad \forall x \in [0, \infty),$$

suy ra

$$e^{ax}f(x) \geq f(0) \geq 0, \quad \forall x \in [0, \infty),$$

tức

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in [0, \infty).$$

Câu 4. Cho hàm $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0, 1]$. Giả sử rằng

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in (0, 1)$ sao cho $f'(c) = 6$.

Giải. Nhận xét rằng hàm số $g(x) = 6x - 2$ thỏa mãn các điều kiện

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 xg(x)dx = 1,$$

suy ra

$$\int_0^1 [f(x) - g(x)]dx = 0.$$

Hàm $h(x) = f(x) - g(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ và có tích phân $\int_0^1 h(x)dx = 0$, nên không thể xảy ra trường hợp $h(x) > 0, \forall x \in (0, 1)$ hoặc trường hợp $h(x) < 0, \forall x \in (0, 1)$.

Như thế phương trình $h(x) = 0$ phải có ít nhất một nghiệm trong $(0, 1)$.

Giả sử rằng $h(x) = 0$ chỉ có một nghiệm $x = a \in (0, 1)$. Xảy ra hai khả năng sau:

+) Nếu $h(x) < 0, \forall x \in (0, a)$, thì $h(x) > 0, \forall x \in (a, 1)$. Khi đó

$$\begin{aligned} \int_0^1 xf(x)dx - 1 &= \int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 xg(x)dx = \int_0^1 x[f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 xh(x)dx \\ &= \int_0^a xh(x)dx + \int_a^1 xh(x)dx > \int_0^a ah(x)dx + \int_a^1 ah(x)dx \\ &= a \left[\int_0^a h(x)dx + \int_a^1 h(x)dx \right] = a \int_0^1 h(x)dx = 0. \end{aligned}$$

Suy ra $\int_0^1 xf(x)dx > 1$, mâu thuẫn với giả thiết của đề bài!

+) Nếu $h(x) > 0, \forall x \in (0, a)$, thì $h(x) < 0, \forall x \in (a, 1)$. Khi đó

$$\begin{aligned} \int_0^1 xf(x)dx - 1 &= \int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 xg(x)dx = \int_0^1 x[f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 xh(x)dx \\ &= \int_0^a xh(x)dx + \int_a^1 xh(x)dx < \int_0^a ah(x)dx + \int_a^1 ah(x)dx \\ &= a \left[\int_0^a h(x)dx + \int_a^1 h(x)dx \right] = a \int_0^1 h(x)dx = 0. \end{aligned}$$

Suy ra $\int_0^1 xf(x)dx < 1$, mâu thuẫn với giả thiết của đề bài!

Vậy $h(x) = 0$ phải có ít nhất hai nghiệm trong $(0, 1)$.

Giả sử hai nghiệm đó là $a, b \in (0, 1)$ và $a < b$.

Ta có $h(a) = h(b) = 0$, nên $f(b) - f(a) = g(b) - g(a)$.

Theo định lý Lagrange tồn tại $c \in (a, b) \subset (0, 1)$, sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 6.$$

Câu 5. Cho đa thức $P(x)$ bậc n với hệ số số thực sao cho $P(-1) \neq 0$ và $-\frac{P'(-1)}{P(-1)} \leq \frac{n}{2}$. Chứng minh rằng $P(x)$ có ít nhất một nghiệm x_0 với $|x_0| \geq 1$.

Giải. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các nghiệm của $P(x)$ trong $\mathbb{C}$, khi đó tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho

$$P(x) = \lambda \prod_{i=1}^n (x - x_i). \text{ Khi đó ta có công thức}$$

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i} \Rightarrow -\frac{P'(-1)}{P(-1)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 1}.$$

Do đó

$$\frac{n}{2} + \frac{P'(-1)}{P(-1)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x_i + 1} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - 1}{x_i + 1}.$$

Ta có

$$\frac{x_i - 1}{x_i + 1} = \frac{(x_i - 1)(\overline{x_i} + 1)}{|x_i + 1|^2},$$

suy ra

$$\operatorname{Re} \left(\frac{x_i - 1}{x_i + 1} \right) = \frac{|x_i|^2 - 1}{|x_i + 1|^2}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\forall i \quad \frac{n}{2} + \frac{P'(-1)}{P(-1)} \in \mathbb{R} \text{ nên}$$

$$\frac{n}{2} + \frac{P'(-1)}{P(-1)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^2 - 1}{|x_i + 1|^2} \geq 0.$$

Do đó tồn tại ít nhất một nghiệm x_0 có $|x_0| \geq 1$.

Câu 6a. Tìm tất cả các hàm số dương $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0, 1]$ sao cho $f(1) = e \cdot f(0)$ và

$$\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 dx \leq 1.$$

Giải. Ta có

$$0 \leq \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - 1 \right)^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 dx - 2 \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx + 1$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 dx - 2 \ln f(x) \Big|_0^1 + 1 \\
&= \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 dx - 2 \ln \frac{f(1)}{f(0)} + 1 \\
&= \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 dx - 1.
\end{aligned}$$

Từ đó, ta có

$$\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 dx \geq 1.$$

Mặt khác, theo giả thiết thì

$$\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 dx \leq 1,$$

nên

$$\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - 1 \right)^2 dx = 0.$$

Do f là hàm khả vi liên tục trên $[0, 1]$, ta được

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1, \forall x \in [0, 1]$$

hay $f(x) = f'(x), \forall x \in [0, 1]$, do đó $f(x) = c.e^x, c > 0$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn.

Câu 6b. Ta có $f(x + y) = 2010^x f(y) + 2010^y f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$, hay

$$2010^{-(x+y)} f(x + y) = 2010^{-y} f(y) + 2010^{-x} f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đặt $2010^{-x} f(x) = g(x)$. Ta có

$$g(x + y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đây chính là phương trình hàm Cauchy quen biết, có nghiệm là $g(x) = ax$. Suy ra $f(x) = ax2010^x$. Từ điều kiện $f(1) = 2010$ đã cho suy ra $a = 1$ và $f(x) = 2010^x x$.

Thử lại, ta thấy thỏa mãn điều kiện bài toán.