Phương trình Pell và một số áp dụng

Trần Văn Trung
Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Ninh Thuận

Phương trình Pell được trình bày trong nhiều tài liệu khác nhau . Bài viết này tôi kết hợp lại và giới thiệu hết sức cô đọng phù hợp thời lượng học và trình độ của các học sinh chuyên toán và hướng dẫn áp dụng qua các bài giãi của một số đề thi học sinh giõi có ứng dụng phương trình Pell.Các định lý chỉ giới thiệu, chứng minh xem ở các tài liệu [2], [3].

1 Phương trình Pell loại I

Phương trình Pell loại I là phương trình Diophante có dạng

$$x^2 - dy^2 = 1 \qquad (I)$$

trong đó d là số nguyên dương.

Định lý 1.
1) Nếu d là số chính phương thì (I) không có nghiệm nguyên dương.
2) Nếu d là số nguyên âm, thì (I) không có nghiệm nguyên dương.
3) Phương trình Pell loại I có nghiệm nguyên dương khi và chỉ khi d là số nguyên dương và không phải là số chính phương.

Định lý 2. Giả sử (a, b) là nghiệm nhỏ nhất cùa phương trình $x^2 - dy^2 = 1$ nghĩa là b là số nguyên bé nhất để $1 + db^2$ là số chính phương. Xét dãy (x_n) và (y_n) cho bởi hệ thức truy hồi sau:

$$\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = a; x_{n+2} = 2ax_{n+1} - x_n, n = 0, 1, ... & (1) \\ y_0 = 0; y_1 = b; y_{n+2} = 2ay_{n+1} - y_{n,}, n = 0, 1, ... & (2) \end{cases}.$$

Khi đó (x_n, y_n) là tất cả các nghiệm của phương trình Pell $x^2 - dy^2 = 1$.

Định lý 3. Cho phương trình Pell $x^2 - dy^2 = 1$. Gọi r là chu kỳ của biểu diễn liên phân số của $\sqrt{d}, \frac{p_k}{q_k}$ là giản phân thứ k của $\sqrt{d}$.

• Nếu r chẵn thì tất cả các nghiệm của phương trình Pell là

$$x = p_{kr-1}, y = q_{kr-1}$$

• Nếu r lẻ thì tất cả các nghiệm của phương trình Pell là

$$x = p_{2tr-1}, y = q_{2tr-1}, \qquad t \in \mathbb{N}^*$$

Lưu ý:
Nếu r là số chẵn thì (p_{r-1},q_{r-1})là nghiệm nhỏ nhất.
Nếu r là số lẻ thì (p_{2r-1},q_{2r-1}) là nghiệm nhỏ nhất.
Thường khi thực hành ta sử dụng định 1.3 để tìm nghiệm nhỏ nhất và dùng định lý 1.2 để viết công thức truy hồi nghiệm.

Ví dụ 4. Giải phương trình nghiệm nguyên:

$$x^2 - 7y^2 = 1$$

Lời giải. Ta có $\sqrt{7} = \left[2; \overline{1,1,1,4}\right]$. Chu kỳ $r = 4$ là số chẵn. Vậy ta có nghiệm nhỏ nhất là $(8;3)$.
Vậy tất cả các nghiệm nguyên dương của (1) được xác định theo công thức:

$$\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 8; x_{n+2} = 16x_{n+1} - x_n \\ y_0 = 0; y_1 = 3; y_{n+2} = 16y_{n+1} - y_n \end{cases}$$

2 Phương trình Pell loại II

Phương trình Pell loại II có dạng:

$$x^2 - dy^2 = -1 \qquad (II)$$

ở đây d là số nguyên dương. Cũng giống như khi xét phương trình Pell loại I, ở đây ta chỉ quan tâm đến việc tìm nghiệm nguyên dương của phương trình này.

Định lý 4. Phương trình Pell loại II không có nghiệm nguyên dương khi
$d = m^2, m \in \mathbb{Z}$ (tức khi d là số chính phương).

Định lý 5. Phương trình Pell loại II không có nghiệm khi d có ước nguyên tố $p = 4k+3$.

Định lý 6. Nếu d là số nguyên tố, thì phương trình Pell loại II

$$x^2 - dy^2 = -1 \qquad (II)$$

có nghiệm nguyên dương khi và chỉ khi d không có dạng $4k + 3$.

Định lý 7. (Điều kiện để phương trình Pell loại II có nghiệm).
Gọi (a, b) là nghiệm nhỏ nhất của phương trình Pell liên kết với phương trình Pell loại II. Khi đó phương trình Pell loại II

$$x^2 - dy^2 = -1 \qquad (II)$$

có nghiệm khi và chỉ khi hệ sau :

$$\begin{cases} a = x^2 + dy^2 & (2) \\ b = 2xy & (3) \end{cases}$$

có nghiệm nguyên dương.

Định lý 8. (Công thức nghiêm của phương trinh Pell loạIii).
Xét phương trình Pell loại II:

$$x^2 - dy^2 = -1 \qquad (1)$$

Cùng với nó ,xét phương trình Pell loại I liên kết với nó:

$$x^2 - dy^2 = 1 \qquad (2)$$

Giả sử (a, b) nghiệm nguyên bé nhất của (2). Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + dy^2 = a, & (3) \\ 2xy = b. & (4) \end{cases}$$

Giả thiết rằng hệ $(3) - (4)$ có nghiệm và (u, v) là nghiệm duy nhất của nó. Xét hai dãy số nguyên dương $\{x_n\}, \{y_n\}$ sau đây:

$$\begin{cases} x_0 = u; x_1 = u^3 + 3duv^2; x_{n+2} = 2ax_{n+1} - x_n, n = 0, 1, 2, ... \\ y_0 = v; y_1 = dv^3 + 3u^2v; y_{n+2} = 2ay_{n+1} - y_n, n = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

Khi đó (x_n, y_n) là tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình Pell loại II.

Sau đây ta đưa ra một định lý sử dụng lý thuyết liên phân số để giải phương trình pell loại II:

Định lý 9. Phương trình $x^2 - dy^2 = -1$ có nghiệm khi và chỉ khi chu kỳ r của biểu diễn liên phân số của $\sqrt{d}$ là số lẻ. Trong trường hợp ấy các nghiệm của nó là $x = p_{(2tr-r-1)}, y = q_{(2tr-r-1)}$ với $t = 1, 2, 3...$

Ví dụ 7. Xét phương trình $x^2 - 34y^2 = -1$.
Ta có $\sqrt{34} = [5; 1, 4, 1, 10]$. Chu kỳ $n = 4$ là sô chẵn. Vậy phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 8. Giải phương trình: $x^2 \breve{}\, 2y^2 = -1$.

Lời giải. Phương trình Pell liên kết $x^2 \breve{}\, 2y^2 = 1$.
Ta có $\sqrt{2} = \left[1; \overline{2}\right]$. Có chu kỳ $r = 1$. Có nghiệm nhỏ nhất $(3; 2)$.
Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^2 + 2v^2 = 3 \\ 2uv = 2 \end{cases}$$

Dễ dàng thấy $(u, v) = (1; 1)$ là nghiệm dương bé nhất của nó.
Theo lý thuyết xây dựng nghiệm, thì phương trình Pell loại II $x^2 \breve{}\, 2y^2 = -1$ có nghiệm là:

$$\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 7; x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n \\ y_0 = 1; y_1 = 5; y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n \end{cases}$$

3 Phương trình Pell với tham số n

Xét phương trình: $x^2 - dy^2 = n$, ở đây d là số nguyên dương và không phải là số chính phương, còn n là số nguyên. Phương trình này gọi là phương trình Pell với tham số n.
Dĩ nhiên, nếu $n = 1$ hoặc $n = -1$ thì tương ứng ta có phương trình Pell loại I và loại II.

Định lý 10. Xét phương trình Pell với tham số n

$$x^2 - dy^2 = n \qquad (1)$$

Phương trình (1) hoặc vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm.

Vậy để tìm ra công thức vét tất cả các nghiệm của phương trình Pell có tham số n ta cần có các kết quả sau:

Định lý 11. Xét phương trình Pell với tham số n

$$x^2 - dy^2 = n \qquad (1)$$

Gọi $(x_{0,}y_0)$ là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của (1).Ta có:

$$y_0 \leq \max\left\{nb^2; \frac{-na^2}{d}\right\}$$

Định lý 12. Xét phương trình Pell với tham số n:

$$x^2 - dy^2 = n \qquad (1)$$

Giả sử (1) có nghiệm và (α_1, β_1);(α_2, β_2);...;(α_m, β_m) là tất cả các nghiệm của (1) thỏa mãn bất đẳng thức

$$\beta_i{}^2 \leq \max\left\{nb^2; \frac{-na^2}{d}\right\}$$

Xét m dãy sau đây. Dãy thứ i:$\{x_{n,i}; y_{n,i}\}$, với $i = \overline{1, m}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} x_{0,i} = \alpha_i, y_{0,i} = \beta_i \\ x_{n+1,i} = x_{n,i}a + dy_{n,i}b \\ y_{n+1,i} = x_{n,i}b + y_{n.i}a \end{cases}$$

ở đây (a, b) là nghiệm bé nhất của phương trình Pell loại I ứng với (1):

$$x^2 - dy^2 = 1 \qquad (2)$$

Khi đó các dãy nghiệm $\{x_{n,i}, y_{n,i}\}$ sẽ vét cạn hết nghiệm phương trình Pell với tham số n.

Ví dụ 4. Giải phương trình Pell: $x^2 - 5y^2 = -4$

Lời giải. Xét phương trình Pell với tham số $n = -4$ sau đây.

$$x^2 - 5y^2 = -4 \qquad (1)$$

Phương trình Pell loại I liên kết với nó có dạng

$$x^2 - 5y^2 = 1 \qquad (2)$$

Phương trình (2) có nghiệm nguyên dương nhỏ nhất là $(a, b) = (9, 4)$. Khi đó:

$$\max\left\{nb^2; \frac{-na^2}{d}\right\} = \max\left\{-4.4^2; \frac{4.9^2}{5}\right\} = \frac{4.81}{5}$$

Số nguyên dương β lớn nhất thỏa mãn $\beta^2 \leq \frac{4.81}{5}$ là $\beta = 8$. Xét phương trình (1):

$$x^2 - 5y^2 = -4$$

Nếu $y = 1 \Rightarrow x = 1; y = 2 \Rightarrow x = 4; y = 3; 4; 7; 8$
thì (1) không dẫn đến x nguyên; $y = 5 \Rightarrow x = 11$.
Như thế bằng cách thử trực tiếp nói trên, ta thấy có 3 nghiệm $(1, 1); (4, 2); (11, 5)$ của phương trình (1) mà thỏa điều kiện:

$$\beta^2 \leq \max\left\{nb^2; \frac{-na^2}{d}\right\}$$

Theo định lý 3.3, phương trình Pell ứng với $n = -4$:

$$x^2 - 5y^2 = -4$$

có 3 dãy nghiệm:

$$\begin{cases} x_{0,1} = 1; y_{0,1} = 1; x_{n+1,1} = 9x_{n,1} + 20y_{n,1}; y_{n+1,1} = 4x_{n,1} + 9y_{n,1} \\ x_{0,2} = 4; y_{0,2} = 2; x_{n+1}, 2 = 9x_{n,2} + 20y_{n,2}; y_{n+1,2} = 4x_{n,2} + 9y_{n,2} \\ x_{0,3} = 11; y_{0,3} = 5; x_{n+1}, 3 = 9x_{n,3} + 20y_{n,3}; y_{n+1,3} = 4x_{n,3} + 9y_{n,3} \end{cases}$$

Ba dãy này viết hết tất cả các nghiệm của phương trình (1).

4 Một số bài toán trong các đề thi học sinh giỏi

Bài toán 1: (CANADA). Cho hai dãy số $\{x_n\}$ *và* $\{y_n\}$xác định như sau :

$$x_0 = 0; x_1 = 1; x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$$
$$y_0 = 1; y_1 = 2; y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}$$

Chứng minh rằng, với mọi số nguyên dương n ta có $y_n^2 = 3x_n^2 + 1$.
Lời giải. Xét phương trình Pell loại I:$X^2 - 3Y^2 = 1$ phương trình này có nghiệm nhỏ nhất là $(2; 1)$ nên tất cả các nghiệm của phương trình là $(X_n; Y_n)$ sao cho:

$$X_0 = 1; X_1 = 2; X_{n+1} = 4X_n - X_{n-1}$$
$$Y_0 = 0; Y_1 = 1; Y_{n+1} = 4Y_n - Y_{n-1}$$

Do đó $X_n = y_n; Y_n = x_n$hay $(x_n; y_n)$ là nghiệm của phương trình Pell loại I trên.
Vậy $y_n^2 = 3x_n^2 + 1$.
Bài toán 2: (VMO 1999) Cho hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ xác định như sau:

$$x_0 = 1; x_1 = 4; x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n$$
$$y_0 = 1; y_1 = 2; y_{n+2} = 3y_{n+1} - y_n$$

Giả sử a, b là các số nguyên dương thoả mãn $a^2 - 5b^2 + 4 = 0$, chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên k để $x_k = a, y_k = b$.
Lời giải. Xét phương trình Pell $x^{2\smile}5y^2 = -4 \qquad (1)$. Như ta đã biết (ví dụ 3.4), ba dãy số sau đây vét hết tất cả các nghiệm của phương trình (1)

$$\begin{cases} x_{0,1} = 1; y_{0,1} = 1; x_{n+1,1} = 9x_{n,1} + 20y_{n,1}; y_{n+1,1} = 4x_{n,1} + 9y_{n,1} \\ x_{0,2} = 4; y_{0,2} = 2; x_{n+1,2} = 9x_{n,2} + 20y_{n,2}; y_{n+1,2} = 4x_{n,2} + 9y_{n,2} \\ x_{0,3} = 11; y_{0,3} = 5; x_{n+1,3} = 9x_{n,3} + 20y_{n,3}; y_{n+1,3} = 4x_{n,3} + 9y_{n,3} \end{cases}$$

Ta chứng minh $(x_n; y_n)$ cũng vét hết tất các nghiệm nguyên dương của (1).
Với mọi số tự nhiên n thì $n = 3m + r$ với $r = 0; 1; 2$.
Ta chứng minh$(x_n, y_n) = (x_{m,r+1}; y_{m,r+1})$. Ta có:

$$(x_0; y_0) = (x_{0,1}; y_{0,1}) = (1; 1),$$
$$(x_1; y_1) = (x_{0,2}; y_{o,2}) = (4; 2),$$
$$(x_2; y_2) = (x_{0,3}; y_{0,3}) = (11; 5).$$

Phương trình đặc trưng của dãy $\{x_n\}$ *và* $\{y_n\}$ là

$$X^2 - 3X + 1 = 0 \text{ có hai nghiệm } X = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Nên:

$$x_n = x_{3m+r} = \alpha\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{3m+r} + \beta\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{3m+r} =$$
$$= \alpha\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{r}\left(9-4\sqrt{5}\right)^{m} + \beta\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{r}\left(9+4\sqrt{5}\right)^{m}$$

Đặt $u_m = x_{3m+r}$ Ta có dãy $\{u_m\}$ có phương trình đặc trưng có 2 nghiệm là $9 \pm 4\sqrt{5}$ nên :

$$u_{m+1} = 18u_m - u_{m-1}.$$

Suy ra: $\qquad x_{3(m+1)+r} = 18x_{3m+r} - x_{3(m-1)+r} \qquad (*)$
Tương rự: $\qquad y_{3(m+1)+r} = 18y_{3m+r} - y_{3(m-1)+r} \qquad (**)$
Việc còn lại là ta chứng minh $\{x_m, i; y_m, i\}$ cũng thoã mãn (*) và (**) với $i = 1; 2; 3$. Ta có:

$$\begin{cases} x_{m+1,i} = 9x_{m,i} + 20y_{m,i} \\ y_{m+1,i} = 4x_{m,i} + 4y_{m,i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{m,i} = \dfrac{x_{m+1,i} - 9x_{m,i}}{20} & (a) \\ y_{m-1,i} = \dfrac{x_{m,i} - 9x_{m-1,i}}{20} & (b) \\ y_{m,i} = 4x_{m-1,i} + 9y_{m-1,i} & (c) \end{cases}$$

Thế $(a), (b)$ vào (c) suy ra: $x_{m+1,i} = 18x_{m,i} - x_{m-1,i}$ và $y_{m+1,i} = 18y_{m,i} - y_{m-1,i}$.
Vậy $\{x_n\}; \{y_n\}$ vét hết tất cả các nghiệm của (1).
Do đó luôn tồn tại k để $x_k = a; y_k = b$.
Bài toán 3: (VMO 2012) Xét các số tự nhiên lẻ a, b mà a là ước số của $b^2 + 2$ và b là ước số của $a^2 + 2$. Chứng minh rằng a và b là các số hạng của dãy số tự nhiên (v_n) xác định bởi:$v_1 = v_2 = 1$ và $v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2}, n \geq 2$.
Lời giải. Giả sử (a, b) là cặp số tự nhiên lẻ mà a là ước số của $b^2 + 2$ và b là ước số của $a^2 + 2$. Trước hết ta chứng minh $(a, b) = 1$.
Thật vậy, đặt $d = (a, b)$ thì do d ước của a và a là ước của $b^2 + 2$ nên d ước của $b^2 + 2$ suy ra d là ước của 2. Mà a, b lẻ nên d lẻ, suy ra $d = 1$.
Xét số $N = a^2 + b^2 + 2$ thì do $a^2 + 2$ chia hết cho b nên N chia hết cho b.
Tương tự, N chia hết cho a. Vì $(a, b) = 1$ nên từ đây suy ra N chia hết cho ab. Vậy tồn tại số nguyên dương k sao cho $a^2 + b^2 + 2 = kab \quad (1)$.
Tiếp theo, ta chứng minh $k = 4$. Thật vậy, đặt $A = \{a + b | (a, b) \in N^{*2}, a^2 + b^2 + 2 = kab\}$.
Theo giả sử ở trên thì $A \neq \emptyset$. Do tính sắp thứ tự tốt của N, A có phần tử nhỏ nhất. Giả sử a_0, b_0 là cặp số thỏa mãn điều kiện (1) với $a_0 + b_0$ nhỏ nhất.
Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a_0 \geq b_0$. Xét phương trình $a^2 - kb_0a + b_0^2 + 2 = 0$ có nghiệm a_0. Theo định lý Viet thì phương trình trên còn có 1 nghiệm nữa là $a_1 = kb_0 - a_0 = \dfrac{b_o^2 + 2}{a_0}$. Theo công thức nghiệm thì rõ ràng a_1 nguyên dương. Như vậy (a_1, b_0) cũng là một nghiệm của (1). Do tính nhỏ nhất của $a_0 + b_0$, ta có $a_0 + b_0 \leq a_1 + b_0$, tức là $a_0 \leq kb_0 - a_0$ suy ra $\dfrac{a_0}{b_0} \leq \dfrac{k}{2}$.
Ta có: $a_0^2 + b_0^2 + 2 = ka_0b_0$. Suy ra $\dfrac{a_0}{b_0} + \dfrac{b_0}{a_0} + \dfrac{2}{a_0b_0} = k \qquad (2)$.
Do $\dfrac{a_0}{b_0} \leq \dfrac{k}{2}$ và $a_0 \geq b_o \geq 1$ nên từ đây ta có $k \leq \dfrac{k}{2} + 1 + 2$. Nên $k \leq 6$.
Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức AM-GM, $a_0^2 + b_0^2 \geq 2a_0b_0$. Nên $k \geq 2$.
Nếu $k \neq 4$ thì $(a_0, b_0) \neq (1, 1)$, do đó $a_0b_0 \geq 2$.
Lại dùng (2) để đánh giá, ta có $k \leq \frac{k}{2} + 1 + 2$, suy ra $k \leq 4$.
Vậy các giá trị $k = 5, 6$ bị loại.
Nếu $k = 3$ thì do $a_0^2 + b_0^2 + 2 = 3a_0b_0$, nên suy ra $a_0^2 + b_0^2 + 2$ chia hết cho 3, suy ra một trong hai số a_0, b_0 chia hết cho 3, số còn lại không chia hết cho 3.
Nếu $b_0 = 1$ thì a_0 chia hết cho 3, khi đó vế trái không chia hết cho 9 còn vế phải chia hết cho 9, mâu thuẫn.Vậy $b_0 > 1$. Từ đó suy ra $a_0b_0 \geq 6$.
Lại sử dụng (2) để đánh giá, ta có $k \leq \frac{k}{2} + 1 + \frac{2}{6} \Rightarrow k < \frac{8}{3}$.Mà k nguyên suy ra $k \leq 2$, mâu thuẫn. Như vậy ta đã chứng minh được nếu a, b là các số tự nhiên lẻ thỏa mãn điều kiện đề bài thì:
$$a^2 + b^2 + 2 = 4ab \qquad (3)$$
Đặt ẩn phụ $z = a - 2b$. Phương trình (3) trở thành : $z^2 - 3b^2 = -2 \qquad (4)$.
Giải phương trình Pell (4) với tham số $n = -2$ ta sẽ chứng minh được hoàn toàn bài toán.
Bài toán 4: (IMO Short List) Chứng minh rằng tồn vô số các số nguyên dương n sao cho p = nr, trong đó p, r lần lượt là nửa chu vi và bán kính đường tròn nội tiếp một tam giác với độ dài các các cạnh là các số nguyên.

Lời giải. Gọi a, b, c và S lần lượt là độ dài các cạnh và diện tích tam giác thoả mãn điều kiện bài toán. Ta có: $p = nr \Leftrightarrow p^4 = n^2p^2r^2 \Leftrightarrow p^4 = n^2S^2$
$\Leftrightarrow p^4 = n^2p(p-a)(p-b)(p-c) \Leftrightarrow (a+b+c)^3 = n^2(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$
$\Leftrightarrow (x+y+z)^3 = n^2xyz \quad (1)$ với $x = a+b-c; y = b+c-a; z = c+a-b$.
Nếu $\exists n \in N^*$ sao cho tồn tại các số nguyên dương (x_0, y_0, z_0) thoả mãn (1) thì $(2x_0, 2y_0, 2z_0)$ cũng là nghiệm của (1) và các độ dài $a = x_0 + y_0; y = y_0 + z_0; c = x_0 + z_0$ sẽ xác định một tam giác thoả mãn yêu cầu bài toán.
Vậy ta chỉ cần chứng minh tồn tại vô hạn n sao cho phương trình (1) có nghiệm nguyên dương (x, y, z). Nếu chọn$z = k(x+y)$ với $k \in N^*$ thì (1) trở thành

$$(k+1)^3(x+y)^2 = n^2kxy \quad (2).$$

Chọn $n = 3k+3$. Khi đó (2) trở thành:

$$(k+1)(x+y)^2 = 9kxy$$

Hệ số $(k+1)$ ở vế trái gây khó khăn cho việc giải phương trình. Vì phương trình vẫn còn nhiều ẩn nên ta tiếp tục chọn $y = k+1$ thì được:

$$(x+k+1)^2 = 9kx \Leftrightarrow x^2 - (11k+2)x + (k+1)^2 = 0 \qquad (3)$$

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh tồn tại vô số số nguyên dương k sao cho phương trình (3) có nghiệm nguyên dương.
Điều này tương đương với tồn tại vô số số nguyên dương k sao cho biệt thức của phương trình (3) là số chính phương. Ta có:

$$\Delta = (11k+2)^2 - 4(k+1)^2 = 9(13k^2 + 4k).$$

Như vậy ta cần chứng minh tồn tại vô số số nguyên dương k sao cho $13k^2 + 4k$ là số chính phương. Nói cách khác, ta cần chứng minh phương trình sau vô số nghiệm nguyên dương:

$$13k^2 + 4k = y^2 \qquad (4)$$

Nhân hai vế của (4) với 13 ta được

$$13^2k^2 + 13.4k = 13y^2 \Leftrightarrow (13k+2)^2 - 13y^2 = 4$$

Tiếp tục đặt $k = 2s; y = 2t$ thì ta được phương trình:

$$(13s+1)^2 - 13t^2 = 1$$

Nếu đặt $u = 13s+1$ thì ta được phương trình :

$$u^2 - 13t^2 = 1 \qquad (5)$$

Phương trình (5) là phương trình Pell loại 1, do đó nó có vô số nghiệm. Vấn đề ở đây là sau khi tìm được nghiệm u, t, ta tính s bằng công thức $s = \dfrac{u-1}{13}$
Do đó, để hoàn tất phép chứng minh, ta cần chứng minh phương trình (5) có vô số nghiệm

(u,t) với $u \equiv 1(\mathrm{mod} 13)$. Nghiệm nhỏ nhất của (5) là $u = 649, t = 180$
Từ đó ta có dãy nghiệm (u_n, t_n) được xác định bởi: $u_1 = 649; t_1 = 180$

$$\begin{cases} u_1 = 649; t_1 = 180, \\ u_{n+1} = 649u_n + 2340t_n, \\ t_{n+1} = 180u_n + 469t_n. \end{cases}$$

Vì $649 \equiv -1(\mathrm{mod} 13)$ và $2340 \equiv 0(\mathrm{mod} 13)$, Nên ta có $u_{n+1} \equiv -u_n(\mathrm{mod} 13)$.
Từ đó ta suy ra $u_n \equiv 1(\mathrm{mod} 13)$ với mọi n chẵn.
Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

5 Bài tập cũng cố

Bài 1. (IMO Shorthist) Xét hệ phương trình $\begin{cases} x + y = z + u \\ 2xy = zu \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất của hằng số thực m sao cho m$\leq \dfrac{x}{y}$ với mọi nghiệm nguyên dương (x,y,z,u) của hệ mà $x \geq y$.
Bài 2. Chứng minh rằng nếu $5x^2 + 4$ hoặc $5x^2 - 4$ là số chính phương khi và chỉ khi x là số hạng của dãy Fibonacci.
Bài 3. (Bulgaria 1999). Chứng minh rằng phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1999$$

Có vô số nghiệm ngyên dương.
Bài 4. (IMO Shorthist) Chứng minh rằng tồn tại hai dãy số nguyên dương tăng $(a_n), (b_n)$ sao cho $a_n(a_n + 1)$ là ước của ${b_n}^2 + 1$ với mọi $n \geq 1$.

Tài liệu

[1] Tài liệu bồi dưỡng chuyên môn giáo viên trường trung học phổ thông chuyên.

[2] Phan Huy Khải (2006), *Các chuyên đề Số học bồi dưỡng học sinh giỏi toán trung học,* Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội.

[3] Hà Huy Khoái, Phạm Huy Điển (2003), *Số học thuật toán,* Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

[4] Đàm Văn Nhỉ, Lưu Bá Thắng, Nguyễn Việt Hải (2006), *Số học,* Nhà xuất bản Đại học Sư phạm, Hà Nội.

[5] Lại Đức Thịnh (1977), *Giáo trình Số học,* Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội.

[6] D. M. Burton (2002), *Elementary Number Theory,* Tata McGraw-Hill Company, New Delhi.

[7] S. G. Telang (2001), *Number Theory,* Tata McGraw-Hill Company, New Delhi.