BÀI TẬP VỀ HÀM SỐ VỚI BA VẤN ĐỀ LIÊN TỤC, KHẢ VI, KHẢ TÍCH

Bài 1. *Tìm tất cả các hàm số $u(x)$ thỏa mãn $u(x)=x+\int_0^{\frac{1}{2}} u(t)dt$.*

Giải

Vì $\int_0^{\frac{1}{2}} u(t)dt$ là một hằng số nên $u(x)=x+C$ (C là hằng số).

Do đó $\int_0^{\frac{1}{2}}(t+C)dt=C \Leftrightarrow \left(\frac{t^2}{2}+Ct\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=C \Leftrightarrow \frac{1}{8}+\frac{C}{2}=C \Leftrightarrow C=\frac{1}{4}$.

Vậy $u(x)=x+\frac{1}{4}$ là hàm số cần tìm.

Bài 2. Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $f(x+19)\le f(x)+19$ và $f(x+94)\ge f(x)+94$ với mọi x. Chứng minh rằng: $f(x+1)=f(x)+1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Giải

Lấy một số thực x bất kỳ. Áp dụng điều kiện ban đề cho với $x-19$ và $x-94$ ta thu được:

$f(x-19)\ge f(x)-19$ và $f(x-94)\le f(x)-94$.

Bây giờ ta dễ dàng chứng minh bằng quy nạp với mọi $n\in\mathbb{N}$

$f(x+19n)\le f(x)+19n$, $f(x+94n)\ge f(x)+94n$

$f(x-19n)\ge f(x)-19n$, $f(x-94n)\le f(x)-94n$.

Ta có:

$f(x+1)=f(x+5.19-94)\le f(x+5.19)-94\le f(x)+5.19-94=f(x)+1$

$f(x+1)=f(x+18.94-89.19)\ge f(x+18.94)-89.19\ge$

$\ge f(x)+18.94-89.19=f(x)+1.$

Vậy $f(x+1)=f(x)+1 \ \forall\in\mathbb{R}$.

Bài 3. Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm khả vi cấp hai với đạo hàm cấp 2 dương. Chứng minh rằng: $f(x+f'(x))\ge f(x)$ với mọi số thực x.

Giải

+ Nếu $f'(x)=0$ thì $f(x+f'(x))=f(x)$ với mọi x : hiển nhiên.

+ Nếu $f'(x)<0$ thì áp dụng định lý Lagrange trên đoạn $[x+f'(x);x]$ ta được: $f(x)-f(x+f'(x))=f'(c)(-f'(x))$, $c\in(x+f'(x);x)$.

$f''(x)>0 \Rightarrow f'$ là hàm tăng $\Rightarrow f'(c)<f'(x)<0$. Vì vậy
$f(x)-f(x+f'(x))<0$.

+ Nếu $f'(x)>0$ thì chứng minh tương tự như trường hợp $f'(x)<0$ ta cũng thu được $f(x)-f(x+f'(x))<0$.

Bài 4 Cho $x\ge 2$, chứng minh $(x+1)\cos\frac{\pi}{x+1}-x\cos\frac{\pi}{x}>1$.

Giải

Xét hàm số: $f:[2;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(t)=t\cos\frac{\pi}{t}$.

Áp dụng định lý Lagrange trên đoạn $[x;x+1]$ đối với hàm $f(t)$

tồn tại $u\in[x;x+1]$: $f'(u)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=f(x+1)-f(x)$

Cần chứng minh $f'(u)=\cos\frac{\pi}{u}+\frac{\pi}{u}\sin\frac{\pi}{u}>1\ \ \forall u\in[2;+\infty)$.

$f''(u)=-\frac{\pi^2}{u^3}\cos\frac{\pi}{u}<0\ \ \forall u\in[2;+\infty)\Rightarrow f'$ nghịch biến trên $[2;+\infty)$

$f'(u)>\lim\limits_{u\to\infty}f'(u)=1$.

Vậy $(x+1)\cos\frac{\pi}{x+1}-x\cos\frac{\pi}{x}>1\ \ \forall x\in[2;+\infty)$.

Bài 5 Tồn tại hay không hàm khả vi liên tục f thỏa mãn điều kiện
$|f(x)|<2$, $f(x)f'(x)\ge\sin x\ \ \forall x\in\mathbb{R}$?

Giải

Không tồn tại.

Ta có:

$$f^2(x)-f^2(0)=\int_0^x\left[f^2(t)\right]'dt=\int_0^x 2f(t)f'(t)dt\ge 2\int_0^x\sin t\,dt=2(1-\cos x)$$

Suy ra: $f^2(\pi)\ge f^2(0)+2(1-\cos\pi)\ge 4$.

Bài 6

Giả sử hàm $f:(-a;a)\setminus\{0\}\to(0;+\infty)$ thoả mãn $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\right)=2$.

Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

Giải

Với $f(x)>0$, áp dung bất đẳng thức Cauchy ta được: $f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\geq 2$.

$\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\right)=2\Rightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ sao cho $0\leq f(x)+\dfrac{1}{f(x)}-2<\varepsilon$ với $0<|x|<\delta$.

Ta có: $0\leq f(x)+\dfrac{1}{f(x)}-2<\varepsilon \Leftrightarrow 0\leq (f(x)-1)+\left(\dfrac{1}{f(x)}-1\right)<\varepsilon$ (1)

$$\Leftrightarrow 0\leq (f(x)-1)\left(1-\frac{1}{f(x)}\right)<\varepsilon \quad (2).$$

Bình phương hai vế của (1), ta được:

$$(f(x)-1)^2+\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)^2+2(f(x)-1)\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)<\varepsilon^2$$

$$\Leftrightarrow (f(x)-1)^2+\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)^2-2(f(x)-1)\left(1-\frac{1}{f(x)}\right)<\varepsilon^2 \quad (3)$$

Thay (2) vào (3) ta suy ra: $(f(x)-1)^2+\left(\dfrac{1}{f(x)}-1\right)^2<\varepsilon^2+2\varepsilon$.

$\Rightarrow (f(x)-1)^2<\varepsilon^2+2\varepsilon\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Bài 7

Tính $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[P(x)]}{P([x])}$, ở đây $P(x)$ là đa thức với hệ số dương.

Giải

Vì P là đa thức với hệ số dương , với x > 1 ta có:

$\dfrac{P(x)-1}{P(x)}\leq\dfrac{[P(x)]}{P([x])}\leq\dfrac{P(x)}{P(x-1)}$. Vì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)-1}{P(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{P(x-1)}=1$ nên $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[P(x)]}{P([x])}=1$.

Bài 8

Hãy chỉ ra một ví dụ chứng tỏ rằng: $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+f(2x))=0$ (*) không suy ra được f có giới hạn tại 0. *Tập* $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)\setminus\{a\}$, *ở đây* $\varepsilon>0$ *được gọi là lân cận khuyết của điểm* $a\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu tồn tại hàm φ sao cho bất đẳng thức $f(x) \geq \varphi(x)$ được thoả mãn trong lân cận khuyết của 0 và $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$ thì từ (*) suy ra được: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Giải

Ví dụ

Xét $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định bởi $f(x)=\begin{cases}(-1)^n & \text{nếu } x=\dfrac{1}{2^n}\text{, n = 0,1,2,3,...}\\ 0 & \text{nếu ngược lại}\end{cases}$

$$\varphi(x)\leq f(x)=\left(f(x)+f(2x)\right)-f(2x)\leq\left(f(x)+f(2x)\right)-\varphi(2x)$$

Vì $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+f(2x)-\varphi(x)\right)=0$ nên $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Bài 9

a) Cho ví dụ về hàm f thoả mãn điều kiện $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)f(2x)\right)=0$ nhưng $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ không tồn tại.

b) Chứng minh rằng nếu trong một lân cận khuyết của 0, các bất đẳng thức $f(x)\geq|x|^{\alpha}$, $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ và $f(x)f(2x)\geq|x|$ được thoả mãn thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Giải

a) Xét $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định bởi $f(x)=\begin{cases}(-1)^n & \text{nếu } x=\dfrac{1}{2^n}\text{, n = 0,1,2,3,...}\\ 0 & \text{nếu ngược lại}\end{cases}$

b) $|x|^{\alpha}\leq f(x)\leq\dfrac{|x|}{f(2x)}\leq\dfrac{|x|}{|2x|^{\alpha}}$. Do $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ nên $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Bài 10

Cho trước số thực α, giả sử $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(ax)}{x^{\alpha}}=g(a)$ với mỗi số dương a. Chứng minh rằng tồn tại c sao cho $g(a)=ca^{\alpha}$.

Giải

Ta có: $\dfrac{g(a)}{a^{\alpha}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(ax)}{a^{\alpha}x^{\alpha}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(t)}{t^{\alpha}}=g(1)\Rightarrow g(a)=g(1)a^{\alpha}$. Chọn $c=g(1)$ ta được $g(a)=ca^{\alpha}$.

Bài 11

Giả sử $f\in C([0;2])$ và $f(0)=f(2)$. Chứng minh rằng tồn tại x_1 , x_2 trong $[0;2]$ sao cho $x_2-x_1=1$ và $f(x_2)=f(x_1)$.

Xét hàm số $g(x)=f(x+1)-f(x)$, $x\in[0;2]$

Vì $f\in C([0;2])$ nên $g\in C([0;2])$.

Ta có: $g(0)=f(1)-f(0)=f(1)-f(2)=-(f(2)-f(1))=-g(1)$

Suy ra: $g(0)g(1)=-[g(1)]^2\le 0$.

Vì thế tồn tại $x_0\in[0;1]:g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0+1)=f(x_0)$.

Vậy có thể lấy $x_2=x_0+1$, $x_1=x_0$.

<u>Bài 12</u>

Cho $f\in C([0;2])$. Chứng minh rằng tồn tại x_1,x_2 trong $[0;2]$ sao cho

$x_2-x_1=1$ và $f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{2}(f(2)-f(0))$.

<u>Giải</u>

Xét hàm số: $g(x)=f(x+1)-f(x)-\frac{1}{2}(f(2)-f(0))$, $x\in[0;2]$

Vì $f\in C([0;2])$ nên $g\in C([0;2])$.

Ta có: $g(0)=f(1)-f(0)-\frac{1}{2}(f(2)-f(0))=f(1)-\frac{1}{2}(f(0)+f(2))$

$$g(1)=f(2)-f(1)-\frac{1}{2}(f(2)-f(0))=-\left[f(1)-\frac{1}{2}(f(0)+f(2))\right]$$

Suy ra: $g(0)g(1)=-\left[f(1)-\frac{1}{2}(f(0)+f(2))\right]^2\le 0$.

Vì thế tồn tại $x_0\in[0;1]:g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0+1)-f(x_0)=\frac{1}{2}(f(2)-f(0))$.

Vậy có thể lấy $x_2=x_0+1$, $x_1=x_0$.

<u>Bài 13</u>

Với $n\in\mathbb{N}$, gọi $f\in C([0;n])$ sao cho $f(0)=f(n)$. Chứng minh rằng tồn tại $x_1;x_2$ trong khoảng $[0;n]$ thoả mãn $x_2-x_1=1$ và $f(x_2)=f(x_1)$.

<u>Giải</u>

Xét $g(x)=f(x+1)-f(x)$, $x\in[0;n-1]$

$g(0)+g(1)+\ldots+g(n-1)$

$=f(1)-f(0)+f(2)-f(1)+\ldots+f(n)-f(n-1)=f(n)-f(0)=0$

+ Nếu $g(k)=0$, $k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ thì ta có ngay điều phải chứng minh.

+ Nếu $\exists k \in \{0,1,2,...,n-1\}$: $g(k) \neq 0$. Không mất tính tổng quát giả sử $g(k) > 0$ thì lúc đó luôn tìm được $h \neq k$, $h \in \{0,1,2,...,n-1\}$ sao cho $g(h) < 0$. Khi đó tồn tại $x_0 \in [0;n-1]$ sao cho

$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0+1) = f(x_0)$.

Vậy có thể lấy $x_2 = x_0 + 1$, $x_1 = x_0$.

Bài 14

Chứng minh rằng nếu $|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + ... + a_n \sin nx| \leq |\sin x|$ với $x \in \mathbb{R}$ thì $|a_1 + 2a_2 + ... + na_n| \leq 1$.

Giải

Đặt $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + ... + a_n \sin nx$ ta có:

$$|a_1 + 2a_2 + ... + na_n| = |f'(0)| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right|$$

$$= \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right| \cdot \left|\frac{\sin x}{x}\right| == \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right| \leq 1.$$

Bài 15

Giả sử $f(0) = 0$ và f khả vi tại điểm 0. Hãy tính

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{3}\right) + ... + f\left(\frac{x}{k}\right)\right]$ với k là một số nguyên dương cho trước.

Giải

Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{3}\right) + ... + f\left(\frac{x}{k}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} + \frac{1}{2}\cdot\frac{f\left(\frac{x}{2}\right) - f(0)}{\frac{x}{2} - 0} + \frac{1}{3}\cdot\frac{f\left(\frac{x}{3}\right) - f(0)}{\frac{x}{3} - 0} + ... + \frac{1}{k}\cdot\frac{f\left(\frac{x}{k}\right) - f(0)}{\frac{x}{k} - 0}\right]$$

$$= f'(0) + \frac{f'(0)}{2} + \frac{f'(0)}{3} + ... + \frac{f'(0)}{k} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{k}\right)f'(0).$$

Bài 16

Cho f là hàm khả vi tại a và xét hai dãy (x_n) và (y_n) cùng hội tụ về a sao cho $x_n < a < y_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} = f'(a)$.

Giải

Ta có: $0 \le \left| \dfrac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} - f'(a) \right| = \left| \dfrac{f(x_n)-f(y_n)-x_n f'(a)+y_n f'(a)}{x_n-y_n} \right|$

$$= \left| \frac{f(x_n)-f(y_n)-f(a)+f(a)+af'(a)-af'(a)-x_n f'(a)+y_n f'(a)}{x_n-y_n} \right|$$

$$= \left| \frac{f(x_n)-f(a)-f'(a)(x_n-a)}{x_n-y_n} - \frac{f(y_n)-f(a)-f'(a)(y_n-a)}{x_n-y_n} \right|$$

$$\le \left| \frac{f(x_n)-f(a)-f'(a)(x_n-a)}{x_n-y_n} \right| + \left| \frac{f(y_n)-f(a)-f'(a)(y_n-a)}{x_n-y_n} \right|$$

$$\le \left| \frac{f(x_n)-f(a)-f'(a)(x_n-a)}{x_n-a} \right| + \left| \frac{f(y_n)-f(a)-f'(a)(y_n-a)}{y_n-a} \right|$$

$$= \left| \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} - f'(a) \right| + \left| \frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-a} - f'(a) \right| \to 0 \quad (n\to\infty)$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} = f'(a)$.

Bài 17

Cho f khả vi trên $(0;+\infty)$ và $a>0$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(af(x)+f'(x)\right)=M$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{M}{a}$.

b) Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(af(x)+2\sqrt{x}f'(x)\right)=M$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{M}{a}$.

Giải

Áp dụng quy tắc Lôpitan, ta có:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{ax}f(x)}{e^{ax}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(e^{ax}f(x)\right)'}{\left(e^{ax}\right)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{ax}\left(af(x)+f'(x)\right)}{ae^{ax}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a}\left(af(x)+f'(x)\right) = \frac{1}{a}\lim_{x\to+\infty}\left(af(x)+f'(x)\right) = \frac{M}{a}.$$

b) Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{a\sqrt{x}}f(x)}{e^{a\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{a\sqrt{x}}f(x)\right)'}{\left(e^{a\sqrt{x}}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{a\sqrt{x}}\left(\frac{a}{2\sqrt{x}}f(x)+f'(x)\right)}{\frac{a}{2\sqrt{x}}e^{a\sqrt{x}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a}\left(af(x)+2\sqrt{x}f'(x)\right)=\frac{1}{a}\lim_{x\to+\infty}\left(af(x)+2\sqrt{x}f'(x)\right)=\frac{M}{a}.$$

Câu 18

Cho f khả vi cấp 3 trên $(0;+\infty)$. Liệu từ sự tồn tại của giới hạn $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)\right)$ có suy ra sự tồn tại của $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ không?

Giải

Không. Lấy ví dụ: $f(x)=\cos x$, $x\in(0;+\infty)$.

Ta có:

$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}(\cos x-\sin x-\cos x+\sin x)=0$

Nhưng không tồn tại $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\cos x$.

Câu 19

a) Giả sử f xác định và liên tục trên $[0;+\infty)$, có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ và thoả mãn $f(0)=1$, $|f(x)|\le e^{-x}$ $\forall x\ge 0$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0\in(0;+\infty)$ sao cho $f'(x_0)=e^{-x_0}$.

b) Giả sử f khả vi liên tục trên $(1;+\infty)$ và thoả mãn $f(1)=1$, $|f(x)|\le\frac{1}{x}$ $\forall x\ge 1$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0\in(1;+\infty)$ sao cho $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$.

Giải

a) Đặt $g(x)=f(x)-e^{-x}$

f liên tục trên $[0;+\infty)\Rightarrow$ g liên tục trên $[0;+\infty)\Rightarrow$ g liên tục trên tại 0

$\Rightarrow\lim_{x\to0^+} g(x)=g(0)=f(0)-1=0$.

$0\le|f(x)|\le e^{-x}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-e^{-x}\right)=\lim_{x\to+\infty} f(x)-\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \Rightarrow \exists x_0 \in (0;+\infty): g'(x_0) = 0$ hay $f'(x_0) = e^{-x_0}$.

b) Đặt $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{x}$

f khả vi liên tục trên $(1;+\infty) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(f(x) - \dfrac{1}{x}\right) = 0$.

$0 \le |f(x)| \le \dfrac{1}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \dfrac{1}{x}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \Rightarrow \exists x_0 \in (1;+\infty): g'(x_0) = 0$ hay $f'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}$.

Câu 20 Cho $M = \left\{ f \in C([0;1]) : \int\limits_0^\pi f(x)\sin x dx = \int\limits_0^\pi f(x)\cos x dx = 1 \right\}$.

Tìm $\min\limits_{f\in M} \int\limits_0^\pi f^2(x)dx$.

Giải

Cho $f_0(x) = \dfrac{2}{\pi}(\sin x + \cos x)$.

\+ Rõ ràng $f_0 \in M$.

\+ Đối với hàm bất kỳ $f \in M$, $\int\limits_0^\pi \left[f(x) - f_0(x) \right]^2 dx \ge 0$.

Suy ra: $\int\limits_0^\pi f^2(x)dx \ge 2\int\limits_0^\pi f(x) f_0(x)dx - \int\limits_0^\pi f_0^2(x)dx = \dfrac{8}{\pi} - \dfrac{4}{\pi} = \dfrac{4}{\pi} = \int\limits_0^\pi f_0^2(x)dx$.

Vậy cực tiểu đạt được khi $f = f_0$.

Câu 21

Tìm hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$f^2(x) = \int\limits_0^x \left(f^2(t) + f'^2(t) \right) dt + 2011 \qquad (1).$$

Giải

Vì hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f^2(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lấy đạo hàm 2 vế của (1), ta được:

$2f(x)f'(x) = f^2(x) + f'^2(x) \Rightarrow \left(f'(x) - f(x) \right)^2 = 0 \Rightarrow f'(x) = f(x)$

$\Rightarrow f(x) = Ce^x$ (2).

Từ (1) suy ra: $f^2(0)=2011 \Rightarrow f(0)=\pm\sqrt{2011}$.

Cho $x=0$, từ $(2) \Rightarrow f(0)=C=\pm\sqrt{2011}$.

Vậy $f(x)=\pm\sqrt{2011}e^x$.

Câu 22

Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn

$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{2011})=f(y_1)+f(y_2)+...+f(y_{2011})$

với mọi bộ số thoả mãn: $x_1+x_2+...+x_{2011}=y_1+y_2+...+y_{2011}=0$.

Giải

Đặt $f(0)=b$, $g(x)=f(x)-b$. Do đó: $g(0)=f(0)-b=0$

và $g(x_1)+g(x_2)+...+g(x_{2011})=g(y_1)+g(y_2)+...+g(y_{2011})$

với mọi bộ số thoả mãn : $x_1+x_2+...+x_{2011}=y_1+y_2+...+y_{2011}=0$.

Trước hết cho

$y_1=y_2=...=y_{2011}=0$, $x_1=x_2=...=x_{2009}=0$, $x_{2010}=x,\ x_{2011}=-x$

ta được: $g(-x)=-g(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Tiếp theo cho

$y_1=y_2=...=y_{2011}=0$, $x_1=x_2=...=x_{2008}=0$, $x_{2009}=x,\ x_{2010}=y, x_{2011}=-x-y$

ta được:

$g(x)+g(y)+g(-x-y)=0\ \forall x,y\in\mathbb{R} \Leftrightarrow g(x+y)=g(x)+g(y)\ \forall x, y\in\mathbb{R}$

Đây là phương trình hàm Cauchy, do đó: $g(x)=ax,\ a=g(1)$.

Vậy $f(x)=ax+b$, a, b = const .

Câu 23

Cho f liên tục trên đoạn $[a;b]$, khả vi trong khoảng $(a;b)$ và $f(a)=f(b)=0$. Chứng minh rằng tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho: $f'(c)=f^{2011}(c)$.

Giải

Xét hàm số: $g(x)=e^{-\int_a^x f^{2010}(t)dt}f(x)$

Vì f liên tục trên đoạn $[a;b]$, khả vi trong khoảng $(a;b)$nên g liên tục trên đoạn $[a;b]$, khả vi trong khoảng $(a;b)$. Hơn nữa $g(a)=g(b)=0$ suy ra tồn tại $c\in(a;b): g'(c)=0$.

Mà $g'(x)=e^{-\int_a^x f^{2010}(t)dt}\left(f'(x)-f^{2011}(x)\right)$. Suy ra: $f'(c)=f^{2011}(c)$.

Câu 24

Cho f liên tục trên $[0;2012]$. Chứng minh rằng tồn tại các số

$x_1, x_2 \in [0;2012]$, $x_1 - x_2 = 1006$ thoả mãn: $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{f(2012) - f(0)}{2}$

Giải

Xét hàm số: $F(x) = \dfrac{(x+1006) - f(x)}{1006} - \dfrac{f(2012) - f(0)}{2012}$, $x \in [0;1006]$.

F liên tục trên $[0;1006]$. Ta có:

$$F(0) = \frac{2f(1006) - f(2012) - f(0)}{2012}$$

$$F(1006) = -\frac{2f(1006) - f(2012) - f(0)}{2012}$$

$F(0)F(1006) \le 0 \Rightarrow \exists x_0 \in [0;1006] : F(x_0) = 0$.

$\Leftrightarrow \exists x_0 \in [0;1006] : f(x_0 + 1006) - f(x_0) = \dfrac{f(2012) - f(0)}{2}$.

Đặt $x_2 = x_0 + 1006$, $x_1 = x_0$ ta có điều phải chứng minh.

Câu 25

Cho số thực $a \in [0;1]$. Xác định tất cả các hàm liên tục không âm trên $[0;1]$ sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

a) $\int_0^1 f(x)dx = 1$ b) $\int_0^1 xf(x)dx = a$ c) $\int_0^1 x^2 f(x)dx = a^2$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacovski ta có:

$$\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2 = \left(\int_0^1 x\sqrt{f(x)}.\sqrt{f(x)}dx\right)^2 \le \int_0^1 x^2 f(x)dx.\int_0^1 f(x)dx.$$

Mà theo giả thiết: $\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2 = \int_0^1 x^2 f(x)dx.\int_0^1 f(x)dx$.

Do f liên tục trên $[0;1]$ nên $x\sqrt{f(x)} = \lambda\sqrt{f(x)}$ $\lambda \ge 0, \forall x \in [0;1]$

Suy ra: $f(x) = 0$ $\forall x \in [0;1]$. Điều này mâu thuẩn với giả thiết: $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

Vậy không tồn tại hàm f thoả mãn bài toán.

Bài 26

Có tồn tại hay không hàm số khả vi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(0) = 1 \text{ , } f'(x) \ge f^2(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ ?}$$

Giải

Giả sử hàm f thoả mãn yêu cầu bài toán. Vì $f'(x) \geq f^2(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ nên f đồng biến trên $[0;+\infty) \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 1 > 0 \ \forall x \in [0;+\infty)$.

Từ giả thiết bài toán ta có: $\int_0^x \frac{f'(t)}{f^2(t)} dt \geq \int_0^x dt \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{1-x}$, $x \in \in [0;1)$.

Do đó không tồn tại $\lim_{x \to 1} f(x)$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết f liên tục.

Vậy không tồn tại hàm f thoả mãn bài toán.

Câu 27

Có hay không một hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn: $|f(x+y) + \sin x + \sin y| < 2$ với x, y $\in \mathbb{R}$.

Giải

Giải sử tồn tại hàm f thoả mãn yêu cầu bài toán.

+ Cho $x = \frac{\pi}{2}$, y $= \frac{\pi}{2}$, ta được: $|f(\pi) + 2| < 2$.

+ Cho $x = -\frac{\pi}{2}$, y = $\frac{3\pi}{2}$, ta được: $|f(\pi) - 2| < 2$.

Ta lại có: $4 = |(f(\pi) + 2) + (-f(\pi) + 2)| \leq |f(\pi) + 2| + |f(\pi) - 2| < 4$. Điều này vô lý. Vậy không có hàm số f nào thoả yêu cầu bài toán.

Câu 28

Tìm tất cả các hàm f(x) xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $f'(x) f''(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Giải

Đặt $g(x) = (f'(x))^2$

$g'(x) = 2 f'(x) f''(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow g(x) = C = const \Rightarrow f'(x) = const \Rightarrow f(x) = ax + b \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 29

Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $|f(a) - f(b)| < |a - b| \ \forall a \neq b$. Chứng minh rằng nếu $f(f(f(0))) = 0$ thì $f(0) = 0$.

Giải

Ta viết lại điều kiện đối với hàm f(x) như sau: $|f(a) - f(b)| \leq |a - b|$ (*)

Dấu "=" xảy ra khi a = b.

Đặt $x = f(0)$, y = f(x). Khi đó $f(y) = 0$.

Áp dụng bất đẳng thức $(*)$ liên tiếp ta có:

$|x| = |x-0| \geq |f(x) - f(0)| = |y-x| \geq |f(y) - f(x)| = |0-y| \geq |f(0) - f(y)| = |x|$

Suy ra: $x = y = 0$. Vậy $f(0) = 0$.

Câu 30

Hàm $f(x) = \sqrt[3]{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$ có khả vi tại điểm $x = 0$ hay không?

Giải

Theo công thức Taylor, ta có:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}x + o(x).$$

Vậy f(x) khả vi tại $x = 0$ và $f'(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}$.

Câu 31

Chứng minh rằng nếu hàm f(x) khả vi vô hạn lần trên $\mathbb{R}$ thì hàm $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ được định nghĩa thêm để liên tục tại x = 0 cũng khả vi vô hạn lần.

Giải

Với $x \neq 0$ ta có:

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^1 f'(ux)xdu \Rightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x} = \int_0^1 f'(ux)du$$

Vì $\int_0^1 f'(ux)du$ khả vi vô hạn lần với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ được định nghĩa thêm để liên tục tại x = 0 khả vi vô hạn lần.

Câu 32

Cho $f(x)$ khả vi 2 lần thoả $f(0) = f(1) = 0$, $\min_{x\in[0;1]} f(x) = -1$.

Chứng minh rằng: $\max_{x\in[0;1]} f''(x) \geq 8$.

Giải

f liên tục trên $[0;1] \Rightarrow \exists a \in [0;1]: f(a) = \min_{x\in[0;1]} f(x) = -1$.Suy ra được $f'(a) = 0$, $a \in (0;1)$.

Khai triển Taylor tại a: $f(x) = -1 + \dfrac{f\left(a+\theta(x-a)\right)}{2}(x-a)^2 \quad, 0<\theta<1.$

\+ Với $x=0$, ta có: $0 = -1 + \dfrac{f''(c_1)}{2}a^2 \quad , \quad 0<c_1<a$.

\+ Với $x=1$, ta có: $0 = -1 + \dfrac{f''(c_2)}{2}(1-a)^2$, $a<c_2<1$.

Do đó: $f''(c_1) = \dfrac{2}{a^2} \ge 8$ nếu $a \le \dfrac{1}{2}$; $f''(c_2) = \dfrac{2}{(1-a)^2} \ge 8$ nếu $a \ge \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\max\limits_{x\in[0;1]} f''(x) \ge 8$.

<u>Câu 33</u>

Giả sử $f(x) = \begin{cases} x^{2011}\sin\dfrac{1}{x} & , x \ne 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

và hàm $g(x)$ khả vi tại x = 0. Chứng minh rằng $g\left(f(x)\right)$ có đạo hàm bằng 0 tại $x=0$.

<u>Giải</u>

Ta có: $\dfrac{d}{dx}g\left(f(x)\right)\Big|_{x=0} = \lim\limits_{h\to0}\dfrac{g\left(f(h)\right)-g\left(f(0)\right)}{h} = \lim\limits_{h\to0}\dfrac{g\left(h^{2011}\sin\dfrac{1}{h}\right)-g(0)}{h}$

$$= \lim_{h\to0}\frac{g\left(h^{2011}\sin\dfrac{1}{h}\right)-g(0)}{h^{2011}\sin\dfrac{1}{h}-0}.h^{2011}\sin\frac{1}{h} = \left(\lim_{h\to0}\frac{g\left(h^{2011}\sin\dfrac{1}{h}\right)-g(0)}{h^{2011}\sin\dfrac{1}{h}-0}\right).\left(\lim_{h\to0}h^{2011}\sin\frac{1}{h}\right)$$

Vì $0 \le \left|h^{2011}\sin\dfrac{1}{h}\right| \le \left|h^{2011}\right| \to 0 \ (h\to0)$ nên $\lim\limits_{h\to0}h^{2011}\sin\dfrac{1}{h} = 0$.

Do đó: $\dfrac{d}{dx}g\left(f(x)\right)\Big|_{x=0} = \left[g'(0)\right].0 = 0$

<u>Câu 34</u>

Hàm f xác định, khả vi trên $(0;+\infty)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng hàm $f'(x)+\lambda f(x)$ không giảm khi và chỉ khi $f'(x)e^{\lambda x}$ không giảm.

<u>Giải</u>

Đặt $h(x) = f'(x)+\lambda f(x)$; $g(x) = f'(x)e^{\lambda x}$.

Suy ra: $e^{\lambda x}h(x)=\left(e^{\lambda x}f(x)\right)'$; $e^{-\lambda x}g(x)=f'(x)$.

Khi đó:

$$g(x)=e^{\lambda x}f'(x)=h(x)-\lambda e^{\lambda x}f(x)=h(x)-\lambda\int_0^x\left(e^{\lambda t}f(t)\right)'dt-\lambda f(0)$$

$$=h(x)-\lambda\int_0^x e^{\lambda t}h(t)dt-\lambda f(0).$$

$$h(x)=f'(x)+\lambda f(x)=e^{-\lambda x}g(x)+\lambda\int_0^x f'(t)dt+\lambda f(0)$$

$$=e^{-\lambda x}g(x)+\lambda\int_0^x e^{-\lambda t}g(t)dt+\lambda f(0).$$

$(\Rightarrow)$ Giả sử $h(x)$ không giảm

Khi đó với b > a ta có:

$$g(b)-g(a)=\left(e^{\lambda b}h(b)-e^{\lambda a}h(a)\right)-\lambda\int_a^b e^{\lambda t}h(t)dt \qquad (1)$$

Theo định lý trung bình của tích phân tồn tại

$$c\in(a;b):\int_a^b e^{\lambda t}h(t)dt=h(c)\int_a^b e^{\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}h(c)\left(e^{\lambda b}-e^{\lambda a}\right) \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$g(b)-g(a)=e^{\lambda b}h(b)-e^{\lambda a}h(a)-e^{\lambda b}h(c)+e^{\lambda a}h(c)$$

$$=e^{\lambda b}\left(h(b)-h(c)\right)+e^{\lambda a}\left(h(c)-h(a)\right)\geq 0 \quad \text{với } b>c>a.$$

Do đó g(x) không giảm.

$(\Leftarrow)$ Giả sử g(x) không giảm

Khi đó với b > a ta có:

$$h(b)-h(a)=\left(e^{-\lambda b}g(b)-e^{-\lambda a}g(a)\right)+\lambda\int_a^b e^{-\lambda t}g(t)dt \qquad (3)$$

Theo định lý trung bình của tích phân tồn tại

$$c\in(a;b):\int_a^b e^{-\lambda t}g(t)dt=g(c)\int_a^b e^{-\lambda t}dt=-\frac{1}{\lambda}g(c)\left(e^{-\lambda b}-e^{-\lambda a}\right) \qquad (4)$$

Thay (4) vào (3) ta được:

$$h(b)-h(a)=e^{-\lambda b}g(b)-e^{-\lambda a}g(a)-e^{-\lambda b}g(c)+e^{-\lambda a}g(c)$$

$$=e^{-\lambda b}\left(g(b)-g(c)\right)+e^{-\lambda a}\left(g(c)-g(a)\right)\geq 0 \quad \text{với } b>c>a.$$

Do đó h(x) không giảm.

Vậy bài toán đã chứng minh xong.

Câu 35

Giả sử $f \in C(\mathbb{R})$. Liệu có tồn tại các hàm số g(x) và h(x) sao cho $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $f(x) = g(x)\sin x + h(x)\cos x$ hay không?

Giải

Có. Chẳng hạn xét các hàm số sau:

$g(x) = f(x)\sin x$, $\mathrm{h}(x) = f(x)\cos x$

Ta có: $g(x)\sin x + h(x)\cos x = f(x)\sin^2 x + f(x)\cos^2 x = f(x)$.

Câu 36

Giả sử $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ có đạo hàm cấp 2 thoả mãn: $f(0)=1,\ \mathrm{f}'(0)=0$ và $f''(x) - 5f(x) + 6f(x) \ge 0\ \ \forall x \in [0;+\infty)$. Chứng minh rằng: $f(x) \ge 3e^{2x} - 2e^{3x}$, $\forall x \in [0;+\infty)$.

Giải

Ta có:

$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \ge 0\ \ \forall x \in [0;+\infty)$

$\Leftrightarrow f''(x) - 2f'(x) - 3\left(f'(x) - 2f(x)\right) \ge 0\ \forall x \in [0;+\infty)$

Đặt $g(x) = f'(x) - 2f(x)$, $\mathrm{x} \in [0;+\infty)$.

Khi đó $g'(x) - 3g(x) \ge 0$, $\mathrm{x} \in [0;+\infty) \Leftrightarrow \left(e^{-3x}g(x)\right)' \ge 0$,$\mathrm{x} \in [0;+\infty)$

$\Rightarrow e^{-3x}g(x)$ tăng trên $[0;+\infty)$

$\Leftrightarrow \left(e^{-2x}f(x)\right)' \ge -2e^{x}$, $\mathrm{x} \in [0;+\infty) \Leftrightarrow \left(e^{-2x}f(x) + 2e^{x}\right)' \ge 0$ $\mathrm{x} \in [0;+\infty)$

$\Rightarrow e^{-2x}f(x) + 2e^{x}$ tăng trên $[0;+\infty)$

$\Rightarrow e^{-2x}f(x) + 2e^{x} \ge e^{0}f(0) + 2e^{0} = 3$, $[0;+\infty)$

$\Rightarrow f(x) \ge 3e^{2x} - 2e^{3x}$, $\quad \forall x \in [0;+\infty)$.

Câu 37

Cho $f:(0;+\infty) \to \mathbb{R}$ có đạo hàm cấp 2 liên tục thoả mãn: $\left|f''(x) + 2xf'(x) + \left(x^2+1\right)f(x)\right| \le 2011$ với mọi x. Chứng minh rằng: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Giải

Áp dụng quy tắc Lôpitan, ta có:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} f(x)}{e^{\frac{x^2}{2}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{\frac{x^2}{2}}f(x)\right)'}{\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x^2}{2}}\left(f'(x)+xf(x)\right)}{xe^{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{\frac{x^2}{2}}\left(f'(x)+xf(x)\right)\right)'}{\left(xe^{\frac{x^2}{2}}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x^2}{2}}\left(f''(x)+2xf'(x)+\left(x^2+1\right)f(x)\right)}{e^{\frac{x^2}{2}}\left(x^2+1\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f''(x)+2xf'(x)+\left(x^2+1\right)f(x)}{x^2+1} = 0.$$

Câu 38

Giả sử hàm số f liên tục trên $[0;+\infty)$, $f(x)\ge 0\ \forall x\ge 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a < 1$.

Chứng minh rằng tồn tại $c \ge 0$ sao cho $f(c) = c$.

Giải

+ Nếu $f(0)=0$ thì kết luận trên hoàn toàn đúng.

+ Nếu $f(0)>0$

Đặt $g(x) = f(x) - x$

Vì f liên tục trên $[0;+\infty)$ g cũng liên tục trên $[0;+\infty)$.

Ta có: $g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0\ \forall x \ge 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a < 1 \Rightarrow \exists b > 0 : \frac{f(b)}{b} < 1 \Leftrightarrow \exists b > 0 : f(b) < b$.

Khi đó: $g(b) = f(b) - b < 0$.

$g(0)g(b) \le 0 \Rightarrow \exists c \in [0;b] \subset [0;+\infty) : g(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \ge 0 : f(c) = c$.

Câu 39

Giả sử f có đạo hàm trên một khoảng chứa $[0,1]$, $f'(0)>0$, $f'(1)<0$.

Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (0;1) : f(x) \le f(x_0)\ \forall x \in [0;1]$.

Giải

f có đạo hàm trên một khoảng chứa $[0,1]$

$\Rightarrow \exists x_0 \in [0;1] : f(x) \le f(x_0) = \max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$.

Ta sẽ chứng minh: $x_0 \ne 0$, $x_0 \ne 1$.

Thật vậy!

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) > 0 \Rightarrow \exists h \in (0;1) : \frac{f(x)-f(0)}{x} > 0\ \forall x \in (0;h]$

$\Rightarrow f(x) > f(0)\ \forall x \in (0;h] \Rightarrow f(0)$ không phải là giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $[0,1] \Rightarrow x_0 \neq 0$.

$$\lim_{x\to 1^{-1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) < 0 \Rightarrow \exists k \in (0;1): \frac{f(x)-f(1)}{x-1} < 0\ \forall x \in [k;1)$$

$\Rightarrow f(x) < f(1)\ \forall x \in [k;1) \Rightarrow f(1)$ không phải là giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $[k;1) \Rightarrow x_0 \neq 1$.

Câu 40

Cho một hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(0)=0$, $f(x) \geq |\sin x|\ \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng đạo hàm của f tại 0 không tồn tại.

Giải

Giả sử $f'(0)$ tồn tại.

$\forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ ta có:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \geq \frac{\sin x}{x} \Rightarrow f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \geq \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Tương tự ta cũng chứng minh được $f'(0^{-1}) < -1$

Điều này chứng tỏ $f'(0)$ không tồn tại.

Câu 41

Giả sử $f(x)$ khả vi trên $(a;b)$ sao cho $\lim\limits_{x\to a^+} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$ và $f'(x) + f^2(x) \geq -1\ \forall x \in (a;b)$. Chứng minh rằng $b-a \geq \pi$. Cho ví dụ để $b-a=\pi$.

Giải

Cách 1

Ta có: $f'(x) + f^2(x) \geq -1\ \forall x \in (a;b) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)} + 1 \geq 0\ \forall x \in (a;b)$

$\Leftrightarrow (\arctan f(x) + x)' \geq 0\ \forall x \in (a;b) \Rightarrow \arctan f(x) + x$ tăng trên $(a;b)$

Chuyển qua giới hạn ta được: $\dfrac{\pi}{2} + a \leq -\dfrac{\pi}{2} + b \Leftrightarrow b - a \geq \pi$.

Ví dụ: $y = \cot x$, a = 0, b = π.

Cách 2

Ta có: $f'(x) + f^2(x) \geq -1\ \forall x \in (a;b) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)} \geq -1\ \forall x \in (a;b)$

Lấy tích phân hai vế:

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx \ge \int_a^b -1dx \Leftrightarrow \arctan f(x)\Big|_a^b \ge a-b \Leftrightarrow -\pi \ge a-b \Leftrightarrow b-a \ge \pi.$$

Câu 42

Cho f là một hàm liên tục trên $[0;1]$. Tìm . Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)dx$.

Giải

Cho $0<\varepsilon<1$. Khi đó ta có: $\int_0^1 f(x^n)dx = \int_0^{1-\varepsilon} f(x^n)dx + \int_{1-\varepsilon}^1 f(x^n)dx$.

+ Theo định lý giá trị trung bình của tích phân tồn tại

$c\in[0;1-\varepsilon]: \int_0^{1-\varepsilon} f(x^n)dx = f(c^n)(1-\varepsilon) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{1-\varepsilon} f(x^n)dx = f(0)(1-\varepsilon)$.

+ Đặt $M=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$, ta có: $\left|\int_{1-\varepsilon}^1 f(x^n)dx\right| \le \int_{1-\varepsilon}^1 |f(x^n)|dx \le M\varepsilon$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)dx = f(0)$.

Câu 43

Cho f là một hàm liên tục trên $[a;b]$ và $\int_a^b f(x)dx=0$. Chứng minh rằng tồn tại $c\in(a;b): \int_a^c f(x)dx = f(c)$.

Xét hàm: $g(x)=e^{-x}\int_a^x f(t)dt$

g liên tục trên $[a;b]$, khả vi trên $(a;b)$

$g(a)=g(b)=0$.

Theo định lý Rolle tồn tại $c\in(a;b): g'(c)=0$.

Mà $g'(x)=e^{-x}\left(f(x)-\int_a^x f(t)dt\right)$, vì thế $f(c)=\int_a^c f(t)dt=\int_a^c f(x)dx$.

Câu 44

Giả sử $f\in C([a;b])$, a > 0 và $\int_a^b f(x)dx=0$. Chứng minh tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho $\int_a^c f(x)dx = cf(c)$.

Giải

Xét hàm số: $g(x)=\frac{1}{x}\int_a^x f(t)dt$

g liên tục trên $[a;b]$, khả vi trên $(a;b)$

$g(a)=g(b)=0$.

Theo định lý Rolle tồn tại $c\in(a;b):g'(c)=0$.

Mà $g'(x)=\frac{1}{x^2}\left(xf(x)-\int_a^x f(t)dt\right)$

Do đó tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho $\int_a^c f(x)dx=cf(c)$.

Câu 45

Giả sử f, g$\in C([a;b])$. Chứng minh rằng tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho

$g(c)\int_a^b f(x)dx=f(c)\int_a^b f(x)dx$.

Giải

Xét $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $G(x)=\int_a^x g(t)dt$

Suy ra: $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$

Áp dụng định lý Cauhy ta có:

$$\exists\ c\in(a;b):\ \frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(c)}{G'(c)}\Leftrightarrow\exists\ c\in(a;b):\ \frac{\int_a^b f(t)dt}{\int_a^b g(t)dt}=\frac{f(c)}{g(c)}$$

$\Leftrightarrow\exists\ c\in(a;b):\ g(c)\int_a^b f(x)dx=f(c)\int_a^b f(x)dx$.

Câu 46

Giả sử f, g$\in C([a;b])$. Chứng minh rằng tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho

$g(c)\int_a^c f(x)dx=f(c)\int_c^b f(x)dx$.

Giải

Xét hàm: $F(x)=\int_a^x f(t)dt\int_x^b g(t)dt$

F liên tục trên $[a;b]$, khả vi trên $(a;b)$ và $F(a)=F(b)$.

Vì thế theo định lý Rolle ta có: $\exists c\in(a;b):F'(c)=0$

Mà $F'(x)=f(x)\int_x^b g(t)dt-g(x)\int_a^x f(t)dt$

Do đó: $\exists c\in(a;b): g(c)\int_a^c f(x)dx=f(c)\int_c^b f(x)dx$.

Câu 47

Giả sử f và g là hai hàm số dương, liên tục trên $[a;b]$. Chứng minh rằng tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho $\dfrac{f(c)}{\int_a^c f(x)dx}-\dfrac{g(c)}{\int_c^b g(x)dx}=1$.

Giải

Xét hàm: $F(x)=e^{-x}\int_a^x f(t)dt\int_x^b g(t)dt$

F liên tục trên $[a;b]$, khả vi trên $(a;b)$ và $F(a)=F(b)$.

Theo định lý Rolle ta có: $\exists c\in(a;b):\ F'(c)=0$.

Mà: $F'(x)=e^{-x}\left[-\int_a^x f(t)dx\int_x^b g(t)dx+f(x)\int_x^b g(t)dt-g(x)\int_a^x f(t)dt\right]$

Do đó: $\exists\, c\in(a;b): -\int_a^c f(t)dx\int_c^b g(t)dx+f(x)\int_c^b g(t)dt-g(x)\int_a^c f(t)dt=0$

$$\Leftrightarrow \exists\, c\in(a;b):\ \frac{f(c)}{\int_a^c f(x)dx}-\frac{g(c)}{\int_c^b g(x)dx}=1.$$

Câu 48

Cho $f\in C^1([0;1])$. Chứng minh rằng tồn tại $c\in(0;1)$ sao cho:

$\int_0^1 f(x)dx=f(0)+\frac{1}{2}f'(c)$.

Giải

Ta có: $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)d(x-1)=(x-1)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1(x-1)f'(x)dx$

$=f(0)-\int_0^1(x-1)f'(x)dx$.

Theo định lý giá trị trung bình của tích phân:

tồn tại $c\in(0;1):\int_0^1(x-1)f'(x)dx=f'(c)\int_0^1(x-1)dx=-\frac{1}{2}f'(c)$.

Do đó: tồn tại $c\in(0;1)$ sao cho: $\int_0^1 f(x)dx = f(0)+\frac{1}{2}f'(c)$

Câu 49

Cho $f\in C^2([0;1])$. Chứng minh rằng tồn tại $c\in(0;1)$ sao cho:

$\int_0^1 f(x)dx = f(0)+\frac{1}{2}f'(0)+\frac{1}{6}f''(c)$.

Giải

Ta có: $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)d(x-1) = (x-1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x-1)f'(x)dx$

$= f(0) - \frac{(x-1)^2}{2}f'(x)\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2}f''(x)dx$.

Áp dụng định lý giá trị trung bình của tích phân:

tồn tại $c\in(0;1)$: $\int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2}f''(x)dx = \frac{1}{2}f''(c)\int_0^1 (x-1)^2dx = \frac{1}{6}f''(c)$.

Do đó tồn tại $c\in(0;1)$ sao cho: $\int_0^1 f(x)dx = f(0)+\frac{1}{2}f'(0)+\frac{1}{6}f''(c)$.

Câu 50

Giả sử $f\in C^1([0;1])$ và $f'(0)\neq 0$. Với $x\in(0;1]$, cho $\theta(x)$ thoả mãn

$\int_0^x f(t)dt = f(\theta(x))x$. Tìm $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\theta(x)}{x}$.

Giải

Đặt $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

Suy ra: $F(0)=0$, $F'(x)=f(x)$, $F''(x)=f'(x)$.

Ta có: $F''(0)=f'(0)\neq 0$.

Theo khai triển Taylor ta có: $F(x)=F'(0)x+\frac{1}{2}F''(0)x^2+o(x^2)$

$\Rightarrow F'(x)=F'(0)+F''(0)x+o(x) \Rightarrow F'(\theta)=F'(0)+F''(0)\theta+o(\theta)$

$\Rightarrow f(\theta(x))x = F'(\theta)x = x\left[F'(0)+F''(0)\theta+o(\theta)\right]$

Khi đó: $F'(0)x+\frac{1}{2}F''(0)x^2+o(x^2) = x\left[F'(0)+F''(0)\theta+o(\theta)\right]$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\theta(x)}{x}=\frac{1}{2}.$$

Câu 51

Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $a<b$, ký hiệu

$g(x)=\int_a^b f(2011x+t)\,dt$. Tính đạo hàm của g.

Giải

Ta có: $g(x)=\int_a^b f(2011x+t)\,dt=\int_{a+2011x}^{b+2011x} f(u)\,du$

$$\Rightarrow g'(x)=2011\left[f(b+2011x)-f(a+2011x)\right].$$

Câu 52

Cho f liên tục trên $\mathbb{R}$. Tìm $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^b\left(f(x+h)-f(x)\right)dx$.

Giải

Áp dụng định lý giá trị trung bình của tích phân, ta có:

$$\int_a^b\left(f(x+h)-f(x)\right)dx=\int_{a+h}^{b+h} f(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$$

$$=\int_{a+h}^{b} f(x)\,dx+\int_{b}^{b+h} f(x)\,dx-\int_{a}^{a+h} f(x)\,dx-\int_{a+h}^{b} f(x)\,dx$$

$$=\int_{a+h}^{a} f(x)\,dx+\int_{b}^{b+h} f(x)\,dx=-hf(a+\theta h)+hf(b+\theta' h) \qquad ,\ \theta,\theta'\in[0,1].$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^b\left(f(x+h)-f(x)\right)dx=f(b)-f(a).$$

Câu 53

Cho f là một hàm liên tục trên $[0;+\infty)$ thoả mãn $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)+\int_0^x f(t)\,dt\right)$ có giới hạn hữu hạn. Chứng minh $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

Giải

Đặt $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x)=f(x)$.

Khi đó giả sử $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)+\int_0^x f(t)\,dt\right)=\lim_{x\to\infty}\left(F'(x)+F(x)\right)=L$

Áp dụng quy tắc Lôpitan ta có:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x F(x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^x F(x)\right)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x\left(F'(x)+F(x)\right)}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\left(F'(x)+F(x)\right) = L$$

Suy ra: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} F'(x) = 0$.

Câu 54

Chứng minh rằng nếu f khả tích Riemann trên $[a;b]$ thì

$$\left(\int_a^b f(x)\sin x dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\cos x dx\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz, ta được:

$$\left(\int_a^b f(x)\sin x dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\cos x dx\right)^2 \le$$

$$\le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b \sin^2 x dx + \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b \cos^2 x dx = (b-a)\int_a^b f^2(x)dx$$

Câu 55

Chứng minh rằng nếu f dương và khả tích Riemann trên $[a;b]$ thì

$$(b-a)^2 \le \int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{dx}{f(x)}.$$

Hơn nữa nếu $0 < m \le f(x) \le M$ thì $\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2$.

Giải

+ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có:

$$(b-a)^2 = \left(\int_a^b \sqrt{f(x)}.\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right)^2 \le \int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{dx}{f(x)}.$$

+ Vì $0 < m \le f(x) \le M$ nên $\frac{\left(f(x)-m\right)\left(f(x)-M\right)}{f(x)} \le 0$, $a \le x \le b$

Ta có:

$$\int_a^b \frac{\left(f(x)-m\right)\left(f(x)-M\right)}{f(x)}dx \le 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx - (m+M)\int_a^b dx + mM\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx + mM\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le (m+M)(b-a) \Leftrightarrow mM\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le (m+M)(b-a) - \int_a^b f(x)dx.$$

Do đó: $mM\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le (m+M)(b-a)\int_a^b f(x)dx - \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$

Xét hàm số: $y = g(t) = -t^2 + kt$.

Hàm số đạt cực đại tại $t = \frac{k}{2}$ với giá trị cực đại là $\frac{k^2}{4}$.

Với $k = (m+M)(b-a)$, t = $\int_a^b f(x)dx$ ta có:

$$(m+M)(b-a)\int_a^b f(x)dx - \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \le \frac{(m+M)^2(b-a)^2}{4}.$$

Do đó: $mM\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le \frac{(m+M)^2(b-a)^2}{4}$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le \frac{(m+M)^2(b-a)^2}{4mM}.$$

Câu 56

Cho f liên tục trên $[a;b]$ sao cho với mọi $[\alpha;\beta] \subset [a;b]$ ta có:

$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \le M|\beta-\alpha|^{1+\delta}$ với $M > 0$, $\delta > 0$.

Chứng minh rằng $f(x) = 0$ trên $[a;b]$.

Giải

Với mọi $x_0 \in [a;b]$, chọn h thuộc $\mathbb{R}$ đủ bé sao cho $x_0 + h \in [a;b]$.

Khi đó theo định lý trung bình của tích phân: tồn tại c ở giữa x_0 và $x_0 + h$ sao cho $|f(c)h| = \left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx\right| \le |h|^{1+\delta} \Rightarrow |f(c)| \le M|h|^\delta$.

Cho $h \to 0$ ta được $|f(x_0)| \le 0$ $\forall x_0 \in [a;b]$. Suy ra: $f(x) = 0$ trên $[a;b]$.

Câu 57

Cho f liên tục trên $[a;b]$. Đặt $c = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Chứng minh rằng:

$$\int_a^b |f(x)-c|^2 dx \le \int_a^b |f(x)-t|^2 dx \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Giải

Xét $g(t)=\int_a^b |x-t|^2 dt=(b-a)t^2-2\left(\int_a^b f(x)dx\right)t+\int_a^b f^2(x)dx$.

g(t) là tam thức bậc hai theo t, g(t) đạt cực tiểu tại $t_0=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=c$.

Vậy $\int_a^b |f(x)-c|^2 dx\le\int_a^b |f(x)-t|^2 dx\quad\forall t\in\mathbb{R}$.

Câu 58

Cho f là một hàm thực khả vi đến cấp $n+1$ trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng với mỗi số thực a,b , a < b thoả mãn $\ln\left(\frac{f(b)+f'(b)+...+f^{(n)}(b)}{f(a)+f'(a)+...+f^{(n)}(a)}\right)=b-a$ tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho $f^{(n+1)}(c)=f(c)$.

Giải

Với a, b là số thực, $a<b$ ta có

$$\ln\left(\frac{f(b)+f'(b)+...+f^{(n)}(b)}{f(a)+f'(a)+...+f^{(n)}(a)}\right)=b-a$$

$$\Leftrightarrow\left(f(a)+f'(a)+...+f^{(n)}(a)\right)e^{-a}=\left(f(b)+f'(b)+...+f^{(n)}(b)\right)e^{-b}$$

Xét hàm số: $g(x)=\left(f(x)+f'(x)+...+f^{(n)}(x)\right)e^{-x}$

Ta có g(x) khả vi trên $\mathbb{R}$ và $g(a)=g(b)$.

Theo định lý Rolle tồn tại $c\in(a;b):g'(c)=0$.

Mà $g'(x)=e^{-x}\left(f^{(n+1)}(x)-f(x)\right)$.

Do đó: $f^{(n+1)}(c)=f(c)$.

Câu 59

Cho $f:\mathbb{R}\to[0;+\infty)$ là một hàm liên tục khả vi. Chứng minh rằng:

$$\left|\int_0^1 f^3(x)dx-f^2(0)\int_0^1 f(x)dx\right|\le\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2.$$

Giải

Đặt $M=\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|$.

Khi đó $|f(x)|\le M\ \forall x\in[0;1]\Leftrightarrow -M\le f(x)\le M\ \forall x\in[0;1]$. Nhân $f(x)\ge 0$ vào từng vế của bất đẳng thức này ta được :

$-Mf(x)\le f(x)f'(x)\le Mf(x)\ ,\ x\in[0;1]$

Suy ra: $-M\int_0^x f(t)dt \le \int_0^x f(t)f'(t)dt \le M\int_0^x f(t)dt$

$\Leftrightarrow -M\int_0^x f(t)dt \le \frac{1}{2}f^2(x) - \frac{1}{2}f^2(0) \le M\int_0^x f(t)dt$. Đến đây ta tiếp tục nhân $f(x) \ge 0$ vào từng vế của bất đẳng thức này để được:

$-Mf(x)\int_0^x f(t)dt \le \frac{1}{2}f^3(x) - \frac{1}{2}f^2(0)f(x) \le Mf(x)\int_0^x f(t)dt$, $x \in [0;1]$.

Lấy tích phân 2 vế trên $[0;1]$ của bất đẳng thức này:

$$-M\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 f^3(x)dx - f^2(0)\int_0^1 f(x)dx \le M\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left|\int_0^1 f^2(x)dx - f^2(0)\int_0^1 f(x)dx\right| \le M\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

hay $\left|\int_0^1 f^3(x)dx - f^2(0)\int_0^1 f(x)dx\right| \le \max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\left(\int_0^1 f(x)dx\right)$.

Câu 60

Cho $f:[0;+\infty) \to \mathbb{R}$ khả vi và thoả mãn $f(1)=1$, $f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$.

Chứng minh rằng tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ và bé thua $1+\frac{\pi}{4}$.

Giải

$f'(x) = \frac{1}{x^2+f^2(x)} > 0\ \forall x \in [0;+\infty)$

f(x) đồngbiến$\Rightarrow f(x) > f(1) = 1 \quad \forall x > 1$.

Từ đó ta có: $f(x) = 1 + \int_1^x f'(t)dt < \int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt = 1 + \arctan t\Big|_1^x < 1 + \frac{\pi}{4}$.

Vậy tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ và bé thua $1+\frac{\pi}{4}$.

Câu 61

Tìm tất cả các hàm $f(x)$ thoả mãn điều kiện: $f(x+1) - f(x) = 2^{-x}\ \forall \in \mathbb{R}$.

Giải

Nhận xét: $2^{-x} = 2.2^{-x} - 2^{-x} = 2^{1-x} - 2^{1-(x+1)}$

Ta có: $f(x+1) - f(x) = 2^{-x}\ \forall \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x+1) + 2^{1-(x+1)} = f(x) + 2^{1-x}\ \forall x \in \mathbb{R}$

Đặt $g(x) = f(x) + 2^{1-x} \Rightarrow g(x+1) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $f(x) = g(x) - 2^{1-x}$, với g là hàm tuần hoàn có chu kì $T=1$.

Câu 62

Cho f là hàm liên tục trên $[0;+\infty)$ và thoả mãn $0 < 3xf(x) < 1 \quad \forall x \in (0;+\infty)$.

Chứng minh rằng hàm số $g(x) = \int_0^x t^3 f(t)dt - 3\left(\int_0^x tf(t)dt\right)^3$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Giải

Ta có: $g'(x) = x^3 f(x) - 9xf(x)\left(\int_0^x tf(t)dt\right)^2 = xf(x)\left[x^2 - \left(\int_0^x 3tf(t)dt\right)^2\right]$

Lại có: $0 < \int_0^x 3tf(t)dt < \int_0^x 1dt = x \Rightarrow \left(\int_0^x 3tf(t)dt\right)^2 < x^2 \Rightarrow x^2 - \left(\int_0^x 3tf(t)dt\right)^2 > 0$

Kết hợp với $xf(x) > 0 \ \forall x \in (0;+\infty)$, ta suy ra: $g'(x) > 0 \ \forall x \in (0;+\infty)$.

Vậy $g(x)$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Câu 63

Cho hàm số: $f \in C^2([0,2])$ và $f(0) = 2010,\ f(1) = 2011,\ f(2) = 2012$.

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0;2)$ sao cho $f''(c) = 0$.

Giải

+ Áp dụng định lý Lagrange cho hàm số f trên $[0;1]$, $[1;2]$

$$\exists a \in (0;2): f'(a) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{2011 - 2010}{1 - 0} = 1$$

$$\exists b \in (0;2): f'(b) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2012 - 2011}{2 - 1} = 1$$

+ Vì f' khả vi trên $[0;2]$ và $f'(a) = f'(b)$ nên theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0;2): f''(c) = 0$.

Câu 64

Tồn tại hay không hàm liên tục $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn các điều kiện:

(i) $f(2011) < f(2012)$ $\qquad$ (ii) $f(f(x)) = \dfrac{1}{x}$.

Giải

+ Trước hết ta chứng minh f là đơn ánh.

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, ta có:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

+ f liên tục và đơn ánh suy ra f đơn điệu. Kết hợp với điều kiện (i) suy ra f đồng biến trên $\mathbb{R}^+$. Khi đó $f\left(f(x)\right)=\frac{1}{x}$ cũng là hàm đồng biến. Điều này vô lý vì $y=\frac{1}{x}$ là hàm nghịch biến.

Vậy không tồn tại hàm f thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 65

Cho f xác định trên $[0;1]$ thoả mãn: $f(0)=f(1)=0$ và

$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le f(x)+f(y)$ $\forall$x, y$\in[0,1]$.

Chứng minh rằng: phương trình $f(x)=0$ có vô số nghiệm trên đoạn $[0,1]$.

Giải

Cho $x=y$, từ giả thiết ta có: $f(x)\le 2f(x)\Rightarrow f(x)\ge 0$ $\forall$x$\in[0,1]$.

Ta có: $0\le f\left(\frac{1}{2}\right)\le f(0)+f(1)=0\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

Ta sẽ chứng minh $f\left(\frac{1}{2^n}\right)=0\quad \forall n\in\mathbb{N}$ (1)

+ (1) đúng với $n=0,\ n=1$.

+ Giả sử (1) đúng đến $n=k$, tức là: $f\left(\frac{1}{2^k}\right)=0$.

+ Ta có: $0\le f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)\le f(0)+f\left(\frac{1}{2^k}\right)=0\Rightarrow f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)=0$. Do đó (1) đúng đến $n=k$.

Vậy phương trình $f(x)=0$ có vô số nghiệm trên đoạn $[0,1]$.

Câu 66

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện:

$f\left(f(x)\right)f(x)=1$ $\forall$x và $f(1000)=999$. Hãy tính $f(500)$.

Giải

Với $x=1000$, ta có: $f\left(f(1000)\right)f(1000)=1\Rightarrow f(999)=\frac{1}{999}$.

Xét hàm số: $g(x)=f(x)-500$

f liên tục trên $\mathbb{R}\Rightarrow f$ liên tục trên $[999;1000]\Rightarrow g$ liên tục trên $[999;1000]$.

$g(999)=f(999)-500=\frac{1}{999}-500<0$

$g(1000) = f(1000) - 500 = 999 - 500 > 0$

Suy ra: $g(999).g(1000) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (999;1000) : g'(x_0) = 0$

$\Leftrightarrow \exists x_0 \in (999;1000) : f(x_0) = 500$.

Thay $x = x_0$ ta được $f(f(x_0))f(x_0) = 1 \Rightarrow f(500) = \dfrac{1}{500}$.

Câu 67

Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện:

$\dfrac{f(x)f(y) - f(xy)}{3} = x + y + 2$ $\forall$x, y$\in \mathbb{R}$ (1) . Hãy xác định giá trị có thể có của $f(2011)$.

Giải

Cho $x = y = 0$ thay vào (1) ta được:

$$\frac{f^2(0) - f(0)}{3} = 2 \Rightarrow f^2(0) - f(0) - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0) = -2 \\ f(0) = 3 \end{array}\right.$$

+ Xét $f(0) = -2$. Khi đó: $\dfrac{f(x)f(0) - f(0)}{3} = x + 2 \Rightarrow f(x) = -\dfrac{3}{2}x - 2$.

Thay vào (1) thấy không thoả.

+ Xét $f(0) = 3$, khi đó $f(x) = x + 3$. Thay vào (1) thấy thoả mãn.

Vậy $f(2011) = 2011 + 3 = 2014$.

Câu 68

Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

$f(x^3 + 2y) = f(y^3 + 2x)$ $\forall$x, y$\in \mathbb{R}$.Chứng minh rằng f là hàm hằng.

Giải

Với mọi a, b thuộc $\mathbb{R}$, chứng minh tồn tại $x, y \in \mathbb{R}$ sao cho:

$x^3 + 2y = a$, $y^3 + 2x = b$.

Rõ ràng $f(a) = f(b) \Rightarrow f$ là hàm hằng.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 2y = a \\ y^3 + 2x = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{a - x^3}{2} \\ y^3 + 2x = b \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{a - x^3}{2}\right)^2 + 2x - b = 0$.

Đây là phương trình đa thức bậc lẻ (bậc 9) đối với x nên luôn có nghiệm trên $\mathbb{R}$. Suy ra hệ trên luôn có nghiệm (x, y).

Vậy f là hàm hằng.

Câu 69

Tìm giá trị của k sao cho tồn tại hàm liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn:

$f\left(f\left(x\right)\right)=kx^9 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Giải

- Trường hợp: k = 0 thì hàm $f\left(x\right)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.
- Trường hợp: $k\neq 0$
  + f đơn điệu
  + f là một đơn ánh. Thật vậy! $\forall x,y\in\mathbb{R}$,

$f\left(x\right)=f\left(y\right)\Rightarrow f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(f\left(y\right)\right)\Rightarrow kx^9=ky^9\Rightarrow x^9=y^9\Rightarrow x=y$.

Vì f liên tục và là đơn ánh nên f đơn điệu thực sự

- Nếu f tăng thực sự.

  Khi đó:

$x<y\Rightarrow f\left(x\right)<f\left(y\right)\Rightarrow f\left(f\left(x\right)\right)<f\left(f\left(y\right)\right)\Rightarrow f\left(f\left(x\right)\right)$ tăng thực sự.

- Nếu f giảm thực sự

$x<y\Rightarrow f\left(x\right)>f\left(y\right)\Rightarrow f\left(f\left(x\right)\right)<f\left(f\left(y\right)\right)\Rightarrow f\left(f\left(x\right)\right)$ giảm thực sự.

Vậy $f\left(f\left(x\right)\right)$ là hàm tăng thực, vì thế $y=kx^9$ cũng là hàm tăng thực sự. Do đó $k>0$.

Ngược lại với k > 0, ta luôn tìm được hàm $f\left(x\right)=\sqrt[4]{k}x^3\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 70

Tồn tại hay không hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$ ta có:

$f\left(xy\right)=\max\left\{f\left(x\right),y\right\}+\min\left(f\left(y\right),x\right)$.

Giải

Thay $x=y=1$ ta được

$f\left(1\right)=\max\left\{f\left(1\right),1\right\}+\min\left\{f\left(1\right),1\right\}=f\left(1\right)+1\Rightarrow 0=1$ (Vô lý).

Vậy hàm f không tồn tại.

Câu 71

Tìm $K=\min\limits_{f\in\wp}\int\limits_0^1\left(1+x^2\right)f^2\left(x\right)dx$, ở đây $\wp=\left\{f\in C\left(\left[0,1\right]\right):\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=1\right\}$.

Giải Áp dụng bất đẳng thức Schwarz ta có:

$$1=\left(\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx\right)^2=\left(\int\limits_0^1\sqrt{x^2+1}f\left(x\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx\right)^2\leq\int\limits_0^1\left(1+x^2\right)f^2\left(x\right)dx\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=K.\frac{\pi}{4}$$

Suy ra: $K=\min\limits_{f\in\wp}\int\limits_0^1\left(1+x^2\right)f^2\left(x\right)dx\geq\frac{4}{\pi}$.

Câu72 Giả sử rằng f và g là các hàm khả vi trên $[a;b]$; trong đó $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho:

$$\frac{\det\begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b)\end{pmatrix}}{g(b)-g(a)}=\frac{\det\begin{pmatrix} f(c) & g(c) \\ f'(c) & g'(c)\end{pmatrix}}{g'(c)}.$$

Giải

Xét hai hàm số: $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $k(x)=\dfrac{1}{g(x)}$ khả vi trên $[a;b]$.

Áp dụng định lý Cauchy ta có:

$$\exists c\in(a;b):\frac{h(b)-h(a)}{k(b)-k(a)}=\frac{h'(c)}{k'(c)}$$

$$\Leftrightarrow \exists c\in(a;b):\frac{\dfrac{f(b)}{g(b)}-\dfrac{f(a)}{g(a)}}{\dfrac{1}{g(b)}-\dfrac{1}{g(a)}}=\frac{\dfrac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{(g(c))^2}}{-\dfrac{g'(c)}{(g(c))^2}}$$

Câu 73 Chứng minh rằng: $f(x)=\arctan x$ thoả mãn phương trình:

$(1+x^2)f^{(n)}(x)+2(n-1)f^{(n-1)}(x)+(n-2)(n-1)f^{(n-2)}(x)=0$ với $x\in\mathbb{R}$ và $n\geq 2$.

Giải

$f(x)=\arctan x$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow(1+x^2)f'(x)=1 \qquad (1)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) suy ra: $(1+x^2)f''(x)+2xf'(x)=0$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được:

$(1+x^2)f^{(n)}(x)+2(n-1)xf^{(n-1)}(x)+(n-2)(n-1)f^{(n-2)}(x)=0$

$(\forall x\in\mathbb{R},\ n\geq 2)$

+ Mệnh đề đúng trong trường hợp n = 2.

+ Giả sử mệnh đề đúng đến $n=k$

tức là: $(1+x^2)f^{(k)}(x)+2(k-1)xf^{(k-1)}(x)+(k-2)(k-1)f^{(k-2)}(x)=0$ (*)

Lấy đạo hàm hàm hai vế của (*) ta được

$$2xf^{(k)}(x)+(1+x^2)f^{(k+1)}(x)+2(k-1)f^{(k-1)}(x)$$
$$+2(k-1)xf^{(k)}(x)+(k-2)(k-1)f^{(k-1)}(x)=0$$
$$\Leftrightarrow (1+x^2)f^{(k+1)}(x)+2kxf^{(k)}(x)+(k-1)kf^{(k-1)}(x)=0$$

Câu 74 Cho f là hàm khả vi đến cấp n trên $(0;+\infty)$. Chứng minh rằng với $x>0$,

$$\frac{1}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)=(-1)^n\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}$$

Giải

+ Mệnh đề đúng trong trường hợp $n=1$.

+ Giả sử mệnh đề đúng trong trường hợp $n\le k$, tức là:

$$\frac{1}{x^{k+1}}f^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right)=(-1)^k\left(x^{k-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k)}$$

+ Ta sẽ chứng minh mệnh đề trên đúng với $n=k+1$.

Thật vậy!

$$(-1)^{k+1}\left(x^kf\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k+1)}=(-1)^k\left(\left(x^kf\left(\frac{1}{x}\right)\right)'\right)^{(k)}=(-1)^{k+1}\left(kx^{k-1}f\left(\frac{1}{x}\right)-x^{k-2}f'\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k)}$$

$$=(-1)^{k+1}k\left(x^{k-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k)}-(-1)^{k+1}\left(x^{k-2}f'\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k)}$$

$$=-\frac{k}{x^{k+1}}f^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right)-(-1)^{k-1}\left(x^{k-2}f'\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k)}.$$

Lại có: $(-1)^{k-1}\left(x^{k-2}f'\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k)}=(-1)^{k-1}\left(\left(x^{k-2}f'\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k-1)}\right)'$

Theo giả thiết quy nạp với trường hợp $n=k-1$ ta được:

$$\frac{1}{x^k}f^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right)=(-1)^{k-1}\left(x^{k-2}f'\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k-1)}.$$

Từ đó suy ra $(-1)^{k+1}\left(x^kf\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(k+1)}=\frac{1}{x^{k+2}}f^{(k+1)}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Vậy bài toán đã được chứng minh xong

Câu 75 Cho f khả vi trên $(a;b)$ sao cho với $x\in(a;b)$ ta có:
$f'(x)=g(f(x))$, trong đó $g\in C^{\infty}(a;b)$. Chứng minh $f\in C^{\infty}(a;b)$.

Giải

Ta có: $f'(x)=g(f(x))\Rightarrow f''(x)=g'(f(x))f'(x)=g'(f(x))g(f(x))$

$$f'''(x)=g'(f(x))(g(f(x)))^2+(g'(f(x)))^2 g(f(x))$$

Do đó f'', f''' đều liên tục trên $(a;b)$.

Chứng minh bằng quy nạp ta được $f^{(n)}$ $(n\ge 3)$ đều là tổng các đạo hàm $g^{(k)}(f)$ với $k=\overline{0;n-1}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu 76 Cho $f:\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\to[-1;1]$ là một hàm khả vi có đạo hàm liên tục và không âm. Chứng minh tồn tại $x_0\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho

$(f(x_0))^2+(f'(x_0))^2\le 1.$

Giải

Xét hàm số:

$$g:\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\to\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$
$$x\mapsto \arctan f(x)$$

g là hàm liên tục trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Nếu $f(x)\ne\pm 1$ thì g khả vi tại mọi x và

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(f(x))}}.$$

Nếu tồn tại $x_0\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\left[\begin{array}{l} f(x_0)=1\\ f(x_0)=-1\end{array}\right.$ thì x_0 là cực trị địa phương của hàm f nên theo định lý Fermat ta suy ra được $f'(x_0)=0$. Vì thế ta có:

$(f(x_0))^2+(f'(x_0))^2=1.$

Nếu $f(x)\ne\pm 1\ \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thì áp dụng định lý Lagrange cho hàm g trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\exists x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right): g\left(\frac{\pi}{2}\right)-g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{f'(x_0)}{\sqrt{1-(f(x_0))^2}}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Dễ thấy: $0\le \dfrac{f'(x_0)}{\sqrt{1-(f(x_0))^2}}\pi \le \pi$.

Vậy ta chứng minh được $(f(x_0))^2+(f'(x_0))^2\le 1$.

<u>Câu 77</u>

Cho f khả vi trên $[a;b]$ và thoả mãn:

a) $f(a)=f(b)=0$ b) $f'(a)=f(a^+)>0$, $f'(b)=f'(b^-)>0$.

Chứng minh rằng tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$ và $f'(c)\le 0$.

<u>Giải</u>

Từ giả thiết suy ra f bằng 0 tại ít nhất một điểm trong khoảng $(a;b)$.

Đặt $c=\inf\{x\in(a;b): f(x)=0\}$, ta có $f(c)=0$.

Vì $f'(a)>0$ nên $f(x)>0\ \forall x\in(a;c)$. Hơn nữa $f'(c)$ tồn tại nên

$$f'(c)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(c+h)}{h}\le 0.$$

<u>Câu 78</u>

Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm tại điểm $x_0=2011$ và $n\in\mathbb{N}$. Chứng minh rằng:
$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{1+2011n}{n}\right)-f(2011)\right]=f'(2011).$$

<u>Giải</u>

Vì f có đạo hàm tại điểm $x_0=2011$ nên theo định nghĩa ta có:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2011+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

Xét riêng: Nếu lấy $\Delta x=\dfrac{1}{n}$, ta có $\Delta x\to 0$ khi $n\to\infty$.

Ta có:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{1+2011n}{n}\right)-f(2011)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(2011+\frac{1}{n}\right)-f(2011)}{\frac{1}{n}}=f'(2011).$$