ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Nguyễn Trung Thành

SỬ DỤNG BẤT BIẾN TRONG GIẢI TOÁN SƠ CẤP

LUẬN VĂN THẠC SĨ

CHUYÊN NGÀNH: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH. Hà Huy Khoái

Thái Nguyên - 2011

Công trình được hoàn thành tại
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Người hướng dẫn khoa học: GS-TSKH-HÀ HUY KHOÁI

Phản biện 1: ....
....

Phản biện 2: ....
....

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
Ngày .... tháng .... năm 2011

Có thể tìm hiểu tại
THƯ VIỆN ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Mục lục

Mở đầu

"Dĩ biến ứng vạn biến" đó là lời Bác Hồ dặn cụ Huỳnh Thúc Kháng trước khi Bác lên đường sang Pháp năm 1946, giao lại trọng trách Quyền Chủ Tịch nước cho cụ Huỳnh Thúc Kháng. "Bất biến" ở đây là độc lập dân tộc, trên cơ sở đó mà tìm ra những đối sách mềm dẻo thích hợp với tình hình trong hoàn cảnh đất nước đang ngàn cân treo sợi tóc. Câu nói trên cũng là "cẩm nang" cho chúng ta khi giải một loạt bài toán rời rạc, từ Hình học đến Số học, mà điều quan trọng nhất là tìm cho ra một "bất biến".

Vậy bất biến là gì? Đó là những đặc điểm có tính cố định của một đối tượng trong suốt quá trình biến đổi, chuyển hoá. Nếu ta xác định được bất biến ta sẽ phân biệt được mối quan hệ của các vật thể trước và sau quá trình biến đổi, để từ đó giải đáp được nhiều vấn đề một cách độc đáo và bất ngờ. Ta có thể phân tích trạng thái của hệ thống để xác định vị trí cần đạt được từ những vị trí khác. Một trong những công cụ rất mạnh cho việc phân tích hệ thống là tính bất biến của một số đại lượng trong hệ thống. Những đại lượng này không thay đổi dưới những thao tác khác nhau trong hệ thống. Hơn nữa, tính bất biến có thể dùng để chỉ ra rằng từ một cấu hình không thể đạt tới một cấu hình khác. Trong các kỳ thi học sinh giỏi, bất biến cũng thường xuyên xuất hiện một cách độc đáo trong các bài toán tổ hợp, số học, đại số, hình học, ... Tuy bài toán phức tạp, nhưng đã ẩn chứa những đại lượng bất biến, chẳng hạn như tính chẵn, lẻ hoặc tổng, tích các biến không thay đổi.

Mặc dù bất biến được sử dụng rộng rãi trong giải toán sơ cấp, cho đến nay, theo chỗ chúng tôi được biết, chưa có một tài liệu nào viết một cách có hệ thống về vấn đề này. Vì thế, chúng tôi cố gắng sưu tầm từ rất nhiều tài liệu khác nhau, chọn lọc những bài toán mà công cụ chủ yếu sử dụng là phương pháp bất biến để làm thành luận văn này. Trong chừng mực có thể, chúng tôi không chỉ nêu lời giải của các bài toán như những tài liệu khác, mà còn cố gắng phân tích, phát hiện bất biến mới và lời giải của bài toán dựa vào đó. Điều này có thể có ích cho học sinh khi tìm hiểu về phương pháp đó. Chúng tôi cũng cố gắng trình bày thông qua những bài tập thuộc nhiều loại khác nhau như hình học, tổ hợp, số học, nhằm làm nổi bật tính phổ dụng của phương pháp bất biến trong giải toán sơ cấp.

Luận văn gồm 3 chương:

Chương 1. Nguyên lý về bất biến. Trong chương I này chúng tôi tập trung trình bày về nguyên lý bất biến đây là cơ sở để giải những bài toán ở 2 chương sau. Nó được chia thành 2 mục trong đó mục 1.1 giới thiệu về phương pháp bất biến, mục 1.2 trình bày khái niệm về bất biến.

Chương 2. Một số bất biến trong bảng số. Trong chương này, chúng tôi chọn lọc giới thiệu một số bài toán thuộc dạng đó và chia thành 2 dạng toán; trong đó mục 2.1 chúng tôi trình bày một số bài toán mà bất biến dựa trên tính chia hết, mục 2.2 trình bày một số bài toán mà bất biến của nó là một đại lượng nào đó.

Chương 3. Một số loại bài toán khác. Ngoài những bài toán trên bảng ô vuông mà đã trình bày ở chương II, ở chương này chúng tôi trình bày một số dạng bài toán khác nhau mà phương pháp giải cũng là sử dụng bất biến nào đó.

Luận văn này đã được hoàn thành dưới sự chỉ bảo và hướng dẫn tận tình của GS.TSKH. Hà Huy Khoái - Viện Toán học Hà Nội. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến GS.TSKH. Hà Huy Khoái.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến các thầy, cô đang công tác tại Khoa Toán, Phòng quản lý khoa học Trường Đại Học Khoa Học cũng như các thầy, cô tham gia giảng dạy Khóa Cao học 2009 - 2011 đã tạo điều kiện tốt cho tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Do thời gian có hạn và sự hiểu biết của bản thân nên luận văn này mới chỉ dừng lại ở việc tìm hiểu, tập hợp tài liệu, sắp xếp và trình bày kết quả theo từng chủ đề đặt ra. Dù đã rất cố gắng, nhưng chắc chắn nội dung trình bày trong luận văn không tránh khỏi thiếu sót nhất định và tác giả rất mong nhận được góp ý của các thầy cô giáo và các bạn.

Thái Nguyên, ngày 16 tháng 05 năm 2011

Tác giả

Nguyễn Trung Thành

Chương 1

NGUYÊN LÍ BẤT BIẾN

1.1. Giới thiệu về phương pháp đại lượng bất biến

Ví dụ 1.1.1. *Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ta xét tổng $S = a + b + c$. Nếu ta đổi chỗ a cho b, b cho c và c cho a thì tổng S luôn chỉ là một số.*

Ví dụ 1.1.2. Ta xét bài toán xuất phát từ câu chuyện cổ tích: *Người nông dân trồng được một cây khế thần có 99 quả chưa chín màu xanh và 1000 quả đã chín màu vàng. Một con Quạ đến ăn mỗi ngày hai quả khế và nói với người nông dân: "Ăn một quả trả cục vàng, may túi ba gang đem đi mà đựng". Quạ đến ăn hai quả khế bất kì không phân biệt quả xanh và quả vàng. Nếu Quạ ăn một quả vàng và một quả xanh thì cây khế lại sinh ra một quả xanh. Nếu Quạ ăn hai quả vàng thì cây khế lại sinh ra một quả vàng. Nếu Quạ ăn hai quả xanh thì cây khế lại sinh cũng quả vàng. Hỏi có thể xảy ra trường hợp quả khế cuối cùng còn lại trên cây là màu vàng không?*

Để thuận tiện cho việc giải bài toán ta kí hiệu: Quả khế xanh là X; quả khế vàng là V; quạ ăn quả là $(+)$ và cây khế sinh quả là (-). Khi đó bài toán có thể viết lại ngắn gọn: $V + V = V, X + X = V, V + X = X$. Từ cách viết trên ta thấy rằng số lượng quả xanh hoặc không thay đổi hoặc là giảm đi hai quả sau mỗi lần ăn (mỗi lần Quạ ăn hai quả). Vì trên cây, số những quả màu xanh là lẻ, còn số những quả màu vàng là chẵn, nên quả cuối cùng trên cây sẽ là màu xanh, không phụ thuộc vào cách ăn quả của Quạ.

Tính bất biến trong bài toán trên là gì? Đó là số những quả xanh dù Quạ có ăn quả như thế nào đi nữa thì nó không thay đổi hoặc nếu nó thay đổi thì thay đổi một cách cố định là giảm đi hai quả. Như vậy, tính chẵn lẻ của số các quả xanh là một bất biến. Chính điều bất biến đối với quả xanh và giả thiết của bài toán đưa ta đến lời giải. Như vậy việc tìm ra bất biến trong những đại lượng đã cho của bài toán là rất quan trọng.

Những bài toán có dạng như một quy trình hay thuật toán thường tồn tại một trạng thái khởi đầu và một dãy những bước đi hợp lệ (bước biến đổi). Kết luận của những bài toán loại này thường phải trả lời những câu hỏi sau đây:

1. Có thể đạt tới một trạng thái cuối cùng đã cho không?
2. Tìm tất cả trạng thái cuối cùng có thể đạt tới?
3. Có tồn tại giới hạn tiến tới một trạng thái cuối cùng không?
4. Tìm tất cả chu kì có thể có trong dãy trạng thái?

1.2. Khái niệm về bất biến

Xét những bài toán mang cấu trúc một hệ thống mà trên đó ta phải xử lý những thao tác khác nhau ở từng mức độ. Vấn đề đặt ra: Có thể xác định được một vị trí nào đấy từ những vị trí đã biết? Một công cụ rất mạnh để giải quyết những bài toán như vậy là xét một số tính chất trong hệ thống mà nó không thay đổi trong từng bước thực hiện thao tác. Tính chất không thay đổi như trên thường được xem như là bất biến. Theo một số tài liệu tham khảo chúng tôi đưa ra định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.2.1. *Giả sử ta có một hệ thống (F) các đại lượng và các phép biến đổi theo thứ tự. Tính chất P được gọi là một bất biến sau s bước trong hệ thống (F) nếu cứ s bước biến đổi ta đều nhận lại được tính chất P.*

Ví dụ 1.2.1. *Xét dãy số $(a_n), (b_n), (c_n)$ và (d_n) được xác định như dưới đây: $a_0, b_0, c_0, d_0 \in \mathbb{Z}$, $a_{n+1} = a_n - b_n$, $b_{n+1} = b_n - c_n$,$c_n + 1 = c_n - d_n$,$d_{n+1} = d_n - a_n, n \geq 0$.*
(i) Hãy chỉ ra không tồn tại số nguyên ban đầu a_0, b_0, c_0, d_0 để sao cho $|a_nb_n - c_nd_n|, |a_nc_n - b_nd_n|, |a_nd_n - b_nc_n|$ là số nguyên tố khi $n \geq 4$

(ii) Chứng minh rằng $a_{2012}b_{2012}, b_{2012}c_{2012}, c_{2012}d_{2012}, d_{2012}a_{2012}$ đều chia hết cho 4^{503}

Lời giải.

Kiểm tra trực tiếp

$$\begin{cases} a_4 = 2(a_0 - 2b_0 + 3c_0 - 2d_0) \\ b_4 = 2(b_0 - 2c_0 + 3d_0 - 2a_0) \\ c_4 = 2(c_0 - 2d_0 + 3a_0 - 2b_0) \\ d_4 = 2(d_0 - 2a_0 + 3b_0 - 2c_0) \end{cases}$$

Như vậy, cứ sau 4 bước biến đổi ta đều nhận được những số nguyên chia hết cho 2. Từ đây suy ra các số nguyên $|a_nb_n - c_nd_n|, |a_nc_n - b_nd_n|, |a_nd_n - b_nc_n|$ đều là các số nguyên chia hết cho 4 khi $n \geq 4$. Vì cứ sau 4 bước nhận được số chia hết cho 2 nên $a_{2012}, b_{2012}, c_{2012}, d_{2012}$ đều chia hết cho 2^{503}. Do vậy $a_{2012}b_{2012}, b_{2012}c_{2012}, c_{2012}d_{2012}, d_{2012}a_{2012}$ đều chia hết cho 4^{503}.

Ví dụ 1.2.2. *Xét dãy số $(a_n), (b_n), (c_n)$ và (d_n) được xác định như dưới đây:*

$$\begin{cases} a_0, b_0, c_0, d_0 \in \mathbb{Z} \\ a_{n+1} = a_n - b_n + c_n \\ b_{n+1} = b_n - c_n + d_n \\ c_n + 1 = c_n - d_n + a_n \\ d_{n+1} = d_n - a_n + b_n, n \geq 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $a_{2012} - a_0, b_{2012} - b_0, c_{2012} - c_0, d_{2012} - d_0$ đều là những số nguyên chia hết cho 4.

Lời giải.

Kiểm tra trực tiếp

$$\begin{cases} a_4 = 21a_0 - 20b_0 + 20c_0 - 20d_0 \\ b_4 = 21b_0 - 20c_0 + 20d_0 - 20a_0 \\ c_4 = 21c_0 - 20d_0 + 20a_0 - 20b_0 \\ d_4 = 21d_0 - 20a_0 + 20b_0 - 20c_0 \end{cases}$$

Như vậy, cứ sau 4 bước biến đổi ta đều nhận được những số nguyên thỏa mãn tính chất P: $x_{k+4} \equiv x_k (\mathrm{mod} 4)$. Từ đây suy ra $a_{2012} - a_0, b_{2012} - b_0, c_{2012} - c_0, d_{2012} - d_0$ đều là những số nguyên chia hết cho 4.

Ví dụ 1.2.3. *Xét dãy số (a_n) và (b_n) được xác định như dưới đây:*

$$\begin{cases} a_0, b_0 \in \mathbb{R}, 0 < b_0 < a_0 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \dfrac{2a_nb_n}{a_n + b_n}, n \geq 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{a_0b_0}$.

Lời giải.

Do $a_0, b_0 > 0$ nên dễ dàng chỉ ra $a_n, b_n > 0$. Do bởi $(a_n + b_n)^2 \geq 4a_nb_n, a_n \neq b_n$, nên $(a_n > b_n)$ với mọi $n \geq 0$. Vì $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} = a_n$ nên dãy (a_n) là dãy đơn điệu giảm, bị chặn dưới nên tồn tại $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Bởi vì $b_{n+1} = \dfrac{2a_nb_n}{a_n + b_n} > b_n$ nên dãy (b_n) là dãy đơn điệu tăng, bị chặn trên nên tồn tại $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Sử dụng tính chất bất biến P: $a_nb_n = a_{n+1}b_{n+1}$ và $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n + b_n}{2} = \dfrac{a + b}{2}$ ta nhận được $a = b = \sqrt{a_0b_0}$.

Chương 2

MỘT SỐ BẤT BIẾN TRONG BẢNG SỐ

Bài toán về bảng số thường xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, quốc tế. Trong việc giải những bài toán đó, phương pháp dùng bất biến tỏ ra rất có hiệu quả. Trong chương này, chúng tôi chọn lọc giới thiệu một số bài toán thuộc loại đó. Phương pháp chung thường gặp là dựa trên tính chia hết (đồng dư) của một đại lượng nào đó, hoặc giá trị của đại lượng. Việc tìm ra những đại lượng thích hợp với từng bài toán không phải là điều dễ dàng, và thường dẫn đến những lời giải ngắn gọn và thú vị.

2.1. Bất biến dựa trên tính chia hết

Trong nhiều bài toán, bất biến được sử dụng là tính chẵn lẻ (phần dư khi chia cho 2), phần dư khi chia cho 3, hay chia cho một số nguyên dương nào đó của một đại lượng trong quá trình biến đổi. Ta sẽ tìm hiểu việc sử dụng bất biến thông qua một số bài tập.

Bài toán 2.1.1. *Trên bảng đen ta viết 2010 dấu cộng (+) và 2011 dấu trừ (-). Cho phép xóa 2 dấu tùy ý và viết thay vào đó một dấu cộng nếu 2 dấu xóa là như nhau, và dấu trừ trong trường hợp ngược lại. Lặp lại phép tính đó 4010 lần. Hỏi trên bảng còn lại dấu gì?*

Lời giải. Cách 1. Giả sử thay cho dấu cộng ta viết số 1, thay cho dấu trừ ta viết số -1. Khi đó phép toán đã cho tương đương việc thay 2 số tùy ý bởi tích của chúng. Phép tính này không làm thay đổi tích của tất cả các số đã cho. Như vậy tích của tất cả các số đã cho là một bất biến trong quá trình lặp phép toán. Tại trạng thái xuất phát, tích này bằng -1, và vì nó là một bất biến nên ở trạng thái cuối cùng, tích đó cũng bằng -1. Sau 4010 lần lặp, ta chỉ còn 1 số trên bảng, vậy đó là số -1. Điều này có nghĩa dấu còn lại trên bảng là dấu (-).

Cách 2. Ta có thể thay mỗi dấu cộng bằng số 0, mỗi dấu trừ bằng số 1. Khi thực hiện phép toán đã cho, tổng của 2 số bị xóa sẽ cùng tính chẵn lẻ với số thay thế cho 2 số đó. Như vậy, tính chẵn lẻ của tổng tất cả các số đã cho là một bất biến của bài toán. Tại trạng thái xuất phát, tổng các số đã cho là 2011, đồng dư 1 môđulô 2, nên tổng của trạng thái cuối cùng phải lẻ. Suy ra số còn lại là số 1, tức là ứng với dấu trừ (-).

Cách 3. Sau mỗi lần thực hiện phép toán, ta thấy số các dấu trừ hoặc không đổi, hoặc giảm 2 đơn vị. Như vậy, tính chẵn lẻ của số các dấu trừ cũng là một bất biến. Tại trạng thái ban đầu, số các dấu trừ (2011) là số lẻ, nên khi còn lại một dấu, đó phải là dấu trừ (-).

Phân tích ba cách giải ta nhận thấy: cách 1 lợi dụng tính bất biến của tích các số viết trên bảng; cách 2 sử dụng tính bất biến của tổng các số; cách 3 là sự bất biến của tính chẵn lẻ của số các dấu trừ. Như vậy trong cách giải ta đã sử dụng tính bất biến của tích, tổng hoặc tính chẵn lẻ của các số.

Bài toán 2.1.2. *Trên bảng đen, ta viết một số dấu cộng $(+)$ và một số dấu trừ $(-)$. Cho phép xóa 2 dấu tùy ý và viết thay vào đó một dấu cộng nếu hai dấu đã xóa là khác nhau, và dấu trừ trong trường hợp ngược lại. Chứng minh rằng dấu cuối cùng còn lại trên bảng không phụ thuộc vào cách xóa dần các dấu.*

Lời giải. Ta thay mỗi dấu $(+)$ bởi số 1, dấu $(-)$ bởi số 0. Như vậy, quy tắc đã nêu trong đề ra tương đương với việc thay hai số tùy ý bởi tổng của chúng theo môđulô 2, tức là thay $a+b$ bởi x với $(a+b) \equiv x(\bmod 2)$.

Điều đó có nghĩa là, tính chẵn lẻ của tổng các số không thay đổi. Suy ra rằng, tính chẵn lẻ của số các dấu $(+)$ là một bất biến của quá trình. Vì thế, dấu cuối cùng còn lại trên bảng là dấu $(+)$ nếu ở thời điểm xuất phát, số dấu $(+)$ là lẻ, và sẽ là dấu (-) nếu ngược lại. Kết quả này không phụ thuộc cách xóa dần các dấu.

Bài toán 2.1.3. *Viết trên bảng đen một số số 0, 1 và 2. Xoá hai số khác nhau tuỳ ý và viết thay vào đó số còn lại (ví dụ xoá số 0, 1 và viết số 2). Có một người thực hiện phép toán này liên tiếp và cuối cùng chỉ còn một số trên bảng. Chứng minh rằng số còn lại trên bảng không phụ thuộc quá trình thực hiện phép toán đã cho.*

Lời giải. Dĩ nhiên, không phải cách thực hiện phép toán đã cho như thế nào cũng đưa đến kết quả chỉ còn một số trên bảng.

Trong bài toán này, ta đã giả thiết là có một cách thực hiện việc đó. Vấn đề là cần chứng tỏ rằng, với mọi cách thực hiện phép tính để thu được một số duy nhất còn lại, số cuối cùng này không phụ thuộc vào cách thực hiện phép toán.

Gọi x_0, x_1, x_2 lần lượt là số các số 0, 1 và 2 đã được viết. Mỗi lần thực hiện phép toán, các số x_0, x_1, x_2 đều tăng hoặc giảm một đơn vị, tức là thay đổi tính chẵn lẻ. Khi chỉ còn một số cuối cùng trên bảng, hai trong các số x_0, x_1, x_2 trở thành 0, số kia trở thành 1. Vậy, ở thời điểm xuất phát, hai trong các số đó có cùng tính chẵn lẻ, số kia khác tính chẵn lẻ với chúng. Do đó, không phụ thuộc quá trình thực hiện phép toán, chỉ có một trong ba số x_0, x_1, x_2 trở thành 1, đó là số mà ban đầu nó khác tính chẵn lẻ với hai số còn lại.

Lời giải trên đây cũng cho thấy rằng, khi cả ba số x_0, x_1, x_2 có cùng tính chẵn lẻ thì bằng phép tính đã cho, không thể xoá dần để đến lúc chỉ còn lại một số trên bảng. Tuy nhiên, lời giải trên đây cũng không chỉ ra rằng, điều đó luôn luôn có thể làm được nếu trong ba số x_0, x_1, x_2 có đúng hai số cùng tính chẵn lẻ.

Bây giờ, giả sử ta thay đổi phép toán trong bài toán 2.1.3 mỗi lần đòi hỏi xoá 4 số, gồm 2 cặp số bằng nhau và thay vào đó là một số thuộc loại còn lại (ví dụ, xoá hai số 0, hai số 1 và thay vào đó là số 2). Giả sử sau một số phép toán như vậy, chỉ còn lại một số trên bảng. Nếu biết số các số 0, 1, 2 tại thời điểm xuất phát, có thể nói gì về số còn lại trên bảng?

Trong trường hợp này, việc xét tính chẵn lẻ như trước sẽ không đưa đến kết quả, bởi vì một trong các số x_0, x_1, x_2 thay đổi tính chẵn lẻ khi thực hiện phép toán, trong khi hai số kia giữ nguyên tính chẵn lẻ, do đó các số ban đầu có tính chẵn lẻ khác nhau có thể có tính chẵn lẻ như nhau sau một số lần thực hiện phép toán.

Để giải bài toán, ta cần tìm một bất biến khác. Để ý rằng, khi xét tính chẵn lẻ, ta đã xét đồng dư theo môđulô 2, tức là một đồng dư đơn giản nhất. Khi việc đó không còn có ích nữa, lẽ tự nhiên là ta tính đến đồng dư tiếp theo: đồng dư theo môđulô 3. Rõ ràng các lớp đồng dư của $x_1 - x_2, x_1 - x_0, x_2 - x_0$ bất biến trong quá trình thực hiện phép toán.

Như vậy, nếu sau khi thực hiện một số phép toán quy định mà trên bảng còn lại đúng một số thì khi xuất phát, phải có đúng 2 số trong các số x_0, x_1, x_2 đồng dư nhau theo môđulô 3. Dễ suy ra chữ số cuối cùng còn lại trên bảng.

Bài toán 2.1.4. *Cho bảng ô vuông 8 x 8, trong mỗi ô vuông của bảng ta viết một số nguyên. Chọn tuỳ ý một bảng ô vuông con có kích thước 3 x 3 hoặc 4 x 4 rồi nâng mọi số có trong các ô của bảng con đã chọn lên một đơn vị. Xuất phát từ một bảng tuỳ ý, với việc thực hiện liên tiếp phép tính đó, ta có thể nhận được hay không một bảng mà tất cả các số viết trong các ô đều chia hết cho 3?*

Lời giải. Ta dự đoán rằng, phải tồn tại những bảng mà không có cách nào để đưa về bảng thoả mãn yêu cầu bài toán. Vì điều kiện duy nhất ở đây là chia hết cho 3 nên ta cần tìm một tập hợp nào đó các ô mà tổng các số viết tại các ô của tập hợp đó có đồng dư môđulô 3 bất biến trong quá trình thực hiện phép tính. Nếu tồn tại tập hợp như vậy, ta chỉ cần lấy trong bảng xuất phát các số sao cho tổng không chia hết cho 3.

Khi thực hiện phép tính, các số trong mỗi ô thuộc bảng con được chọn sẽ được cộng thêm một đơn vị. Do đó, tập hợp A các ô cần tìm phải thoả mãn tính chất sau: mọi bảng con kích thước 3 x 3 hoặc 4 x 4 đều phải chứa 0, 3, 6, 9, 12 hoặc 15 ô của tập hợp A.

Dễ thấy rằng, nếu ta lấy A là tập các ô đánh dấu trong hình 2.1 thì

A sẽ thoả mãn điều kiện đặt ra.

x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x

Hình 2.1

Bài toán 2.1.5. *Cho bảng ô vuông 8 x 8, trong mỗi ô, ta viết một số nguyên. Chọn tuỳ ý một bảng con trong đó kích thước 3 x 3 hoặc 4 x 4 rồi nâng mọi số có trong các ô của bảng con đã chọn lên một đơn vị. Xuất phát từ một bảng tuỳ ý, có thể thu được một bảng gồm toàn số lẻ hay không?*

Lời giải.

x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x

Hình 2.2

Tương tự như bài trước, nếu ta lấy tập hợp A gồm các ô đánh dấu như hình 2.2 thì mỗi bảng 3 x 3 hoặc 4 x 4 đều chứa 6 hoặc 12 ô của tập hợp A. Như vậy, khi tăng thêm 1 đơn vị vào mỗi số trong ô của bảng con được chọn, tính chẵn lẻ của tổng các số đã viết không thay đổi.

Nói cách khác, ta có bất biến là: tính chẵn lẻ của tổng các số đã viết trong các ô thuộc tập hợp A. Nếu tất cả các số trong bảng đều lẻ thì tổng các số đã viết trong A là số chẵn. Như vậy, nếu trong bảng xuất phát, tổng các số trong A là lẻ (chẳng hạn, mọi số đều chẵn, trừ một số lẻ duy nhất) thì bảng đó không thể đưa được về bảng mọi số lẻ.

Bài toán 2.1.6. *Cho bảng số có tính chất sau:*

a_1	a_2	a_3
a_4	*2*	a_5
a_6	a_7	a_8

Hình 2.3

Tổng của những phần tử trong mỗi hàng, mỗi cột hoặc đường chéo chia hết cho 2. Một thao tác cho phép chuyển một đơn vị ở một ô sang ô bên cạnh (ô bên cạnh của một ô là ô có chung cạnh). Có thể từ hình 2.3 nhận được hình 2.4, sao cho tất cả phần tử ở các ô xung quanh là số chẵn không?

b_1	b_2	b_3
b_4	*2*	b_5
b_6	b_7	b_8

Hình 2.4

Lời giải. Từ giả thiết suy ra cặp số a_2, a_7 và a_4, a_5 là cùng tính chẵn lẻ. Bởi vì $a_1+a_4+a_6$ và $a_6+a_7+a_8$ chia hết cho 2 suy ra $a_1+a_4+2a_6+a_7+a_8$ chia hết cho 2, nghĩa là $a_1+a_4+a_7+a_8$ chia hết cho 2. Cũng từ điều kiện đã cho ta có a_1+2+a_8 chia hết cho 2, nghĩa là a_1+a_8 chia hết cho 2. Khi đó a_4+a_7 chia hết cho 2 và suy ra a_4 và a_7 cùng tính chẵn lẻ. Như vậy ta đi đến kết luận là a_2, a_4, a_5 và a_7 cùng tính chẵn lẻ. Nếu a_2, a_4, a_5 và a_7 là những số chẵn thì a_1, a_3, a_6 và a_8 hoặc tất cả đều chẵn hoặc đều lẻ. Khi đó số lượng của những số chẵn là 5 hoặc là 9. Nếu a_2, a_4, a_5 và a_7 là những số lẻ thì a_1, a_3, a_6 và a_8 hoặc tất cả đều chẵn hoặc đều lẻ. Khi đó số lượng của những số chẵn là 1 hoặc là 5. Vậy số lượng những số chẵn trong bảng là một số lẻ (1, 5 hoặc 9). Ta xét những biến đổi trên những ô bên cạnh một ô. Nếu x và y là những số ở hai ô bên cạnh nhau, thì ta có thao tác $x, y \to x-1, y+1$. Xét tất cả các trường hợp chẵn lẻ cho x và y: (chẵn, chẵn), (chẵn, lẻ), (lẻ, chẵn). Sau khi thực hiện thao tác ta nhận được tương ứng (lẻ, lẻ), (lẻ, chẵn), (chẵn, chẵn). Như vậy, thao tác biến đổi không thay đổi tính chẵn của số lượng số chẵn (vì thay đổi số lượng 0 hoặc 2). Trong hình 2.3 có số số lẻ những số chẵn, còn trong hình 2.4 có 8 số chẵn, nghĩa là số chẵn. Suy ra bảng như vậy không nhận được khi thực hiện các thao tác trên.

Bài toán 2.1.7. *Một bảng hình chữ nhật kẻ ô vuông có* 2010 *hàng và* 2011 *cột. Kí hiệu ô vuông nằm ở giao của hàng thứ* m *(kể từ trên xuống dưới) là* $(m; n)$. *Tô màu các ô vuông của bảng theo hai cách sau: lần thứ nhất tô ba ô* $(r; s), (r+1; s+1), (r+2; s+1)$, *với* r, s *là hai số tự nhiên cho trước thoả mãn* $1 \leq r \leq 2008$ *và* $1 \leq s \leq 2010$*; từ lần thứ hai, mỗi lần tô đúng ba ô chưa có màu nằm cạnh nhau hoặc trong cùng một hàng hoặc trong cùng một cột. Hỏi bằng cách đó có thể tô màu được tất cả các ô vuông của bảng đã cho hay không?*

Lời giải. Ta ghi vào mỗi ô vuông của bảng một số tự nhiên theo quy tắc sau: ở mỗi hàng, lần lượt từ trái qua phải ghi các số tự nhiên từ 1 đến 2011. Như vậy, ba số được ghi vào ba ô nằm cạnh nhau trong cùng một hàng là ba số tự nhiên liên tiếp, còn ba số được ghi vào ba ô nằm cạnh nhau trong cùng một cột là ba số tự nhiên bằng nhau. Từ đó suy ra, kể từ lần thứ hai, mỗi lần tô màu ta sẽ xoá đi ba số có tổng chia hết cho 3. Hơn nữa, dễ thấy ba số được ghi vào ba ô $(r; s), (r+1; s+1), (r+2; s+1)$ là $s, s+1, s+1$ và chúng có tổng là một số chia cho 3 và dư 2. Tuy nhiên, ta có $T = 2010.(1+2+\cdots+2011) = 2010.2011.1006$ chia hết cho 3. Mâu thuẫn nhận được cho ta thấy không thể tô màu được tất cả các ô vuông của bảng.

Bài toán 2.1.8. *Trong một bảng ô vuông có 100 x 100 ô được điền dấu cộng (+). Một cách thực hiện bằng cách đổi toàn bộ những dấu ở một hàng hoặc một cột nào đó sang dấu ngược lại. Có khả năng sau hữu hạn bước như trên, bảng ô vuông nhận được sẽ có đúng 2010 dấu trừ (-)?*

Lời giải. Giả sử có khả năng sau một số hữu hạn bước nhận được bảng có 2010 dấu trừ. Giả sử hàng thứ i ta đã đổi dấu x_i lần, còn cột thứ j ta đã đổi dấu y_j lần. Khi đó dấu tại ô (i, j) đã thay đổi $x_i + y_j$ lần. Suy ra tại ô này có dấu trừ (-) khi và chỉ khi $x_i + y_j$ là số lẻ. Giả sử p là số số lẻ trong các số x_i, còn q là số số lẻ trong các số y_j. Khi đó số dấu trừ trong bảng sẽ là $p(100 - q) + (100 - p)q = 100p + 100q - 2pq$. Ở đây, ta nhận được đẳng thức $100p + 100q - 2pq = 2010$ hay $(p - 50)(q - 50) = 1495 = 5.911$.

Bởi vì 911 là số nguyên tố, ít nhất một trong những số $p - 50, q - 50$ chia hết cho 911, nhưng khi đó phải suy ra $p - 50$, hoặc $q - 50$ chia hết cho 911, vô lý. Vậy sau hữu hạn bước thì bảng ô vuông không nhận được 2010 dấu trừ (-).

Bài toán 2.1.9. *Cho số nguyên dương r và một bảng hình chữ nhật chia thành 20 x 12 ô vuông. Những bước đi được thực hiện trên bảng như sau: Ta chuyển từ một ô vuông đến một ô vuông khác chỉ khi nào khoảng cách giữa hai tâm của hai ô vuông đó bằng $\sqrt{r}$. Bài toán đặt ra là làm sao có thể tìm một dãy các nước đi để chuyển từ ô này sang ô kia, mà hai ô đó nằm ở hai góc kề nhau của bảng, hai góc đó nằm trên cùng một chiều dài của bảng hình chữ nhật nói trên. Chứng minh rằng bài toán không giải được nếu r chia hết cho 2 hoặc 3.*

Lời giải. Giả sử cứ mỗi lần di chuyển nước đi là một hình chữ nhật có hai cạnh a và b (đơn vị). Do đó $a^2 + b^2 = r$. Nếu r chia hết cho 2 thì a và b sẽ cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Nếu tô màu các ô vuông như bàn cờ thì điều này có nghĩa là ô trắng sẽ được chuyển đến ô trắng, ô đen chuyển đến ô đen. Nhưng hai ô ở hai góc kề nhau (dọc theo chiều dài bảng) khác màu, do đó bài toán không giải được. Nếu r chia hết cho 3 thì cả a lẫn b đều là bội của 3. Như thế, nếu giả sử ô đầu tiên có toạ độ $(0; 0)$, ô được chuyển đến sẽ có toạ độ $(3m; 3n)$. Nhưng yêu cầu ô được chuyển đến sau cùng phải có toạ độ $(19; 0)$ nên trong trường hợp này bài toán cũng không giải được.

2.2. Bất biến của một đại lượng nào đó

Trong mục này, ta sẽ mô tả phương pháp tìm một đại lượng nào đó bất biến trong quá trình biến đổi.

Bài toán 2.2.1. *Các dấu cộng và trừ được viết vào các ô trong một bảng 4 x 4 như trong hình vẽ. Mỗi lần, ta cho phép đảo ngược tất cả các dấu trong cùng một hàng, trong cùng một cột, hoặc dọc theo một đường bất kì song song với một trong 2 đường chéo của bảng (đặc biệt, có thể đảo dấu các ô ở góc). Có thể hay không, bằng cách thực hiện các phép tính trên đây, nhận được một bảng không có dấu trừ?*

+	+	-	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Hình 2.5

Lời giải. Ta thay các dấu cộng và dấu trừ tương ứng bởi các số $+1, -1$. Rõ ràng tích của tất cả các số đã biết, hoặc tính chẵn lẻ của số các dấu trừ, hoặc tính chẵn lẻ của tổng các số (khi thay dấu cộng bởi số 0 và dấu trừ bởi số 1) đều không phải là một bất biến của bài toán. Như vậy để giải bài toán này, ta cần tìm bất biến khác với các bất biến đã được dùng khi giải bài toán 2.1.1. Mặc dù tích tất cả các số không bất biến, nhưng rất có thể tích của các số ở một số ô cố định nào đó là một bất biến. Để tìm các ô như vậy, ta cần tìm một tập hợp các ô mà khi thực hiện phép tính cho phép, số ô có thể đảo dấu trong tập hợp này phải là số chẵn. Dễ thấy rằng, tập hợp các ô được đánh dấu x trong bảng sẽ có tính chất đó:

	x	x	
x			x
x			x
	x	x	

Hình 2.6

Tại trạng thái xuất phát, tích các số viết trong các ô nói trên là -1. Do tích này là một bất biến nên trong quá trình thực hiện phép toán đã cho, ta không thể nào nhận được một bảng không có dấu trừ nào.

Bài toán 2.2.2. *Các dấu cộng và trừ được viết vào các ô trong một bảng 6 x 6 như trong hình vẽ. Mỗi lần, ta cho phép đảo ngược tất cả các dấu trong cùng một hàng, trong cùng một cột, hoặc dọc theo một đường bất kì song song với một trong 2 đường chéo của bảng (đặc biệt, có thể đảo dấu các ô ở góc). Có thể hay không, bằng cách thực hiện các phép tính trên đây, nhận được một bảng không có dấu trừ?*

Lời giải.

a) Với bảng ban đầu cho như hình sau:

+	+	-	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+

Hình 2.7

Ta thay các dấu cộng và dấu trừ tương ứng bởi các số $+1, -1$. Rõ ràng tích của tất cả các số đã viết, hoặc tính chẵn lẻ của số các dấu trừ, hoặc tính chẵn lẻ của tổng các số (khi thay dấu cộng bởi số 0 và dấu trừ bởi số 1) đều không phải là một bất biến của bài toán. Như vậy để giải bài toán này, ta cần tìm bất biến khác với các bất biến đã được dùng khi giải bài toán 2.1.1. Mặc dù tích tất cả các số không bất biến, nhưng rất có thể tích của các số ở một số ô cố định nào đó là một bất biến. Để tìm các ô như vậy, ta cần tìm một tập hợp các ô mà khi thực hiện phép tính cho phép, số ô có thể đảo dấu trong tập hợp này phải là số chẵn. Dễ thấy rằng, tập hợp các ô được đánh dấu x trong bảng sẽ có tính chất đó:

	x	x	x	x	
x					x
x					x
x					x
x					x
	x	x	x	x	

Hình 2.8

Tại trạng thái xuất phát, tích các số viết trong các ô nói trên là -1. Do tích này là một bất biến nên trong quá trình thực hiện phép toán đã cho, ta không thể nào nhận được một bảng không có dấu trừ nào.
b) Với bảng ban đầu cho như hình sau:

+	+	-	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	-	+	+

Hình 2.9

Ta thay các dấu cộng và dấu trừ tương ứng bởi các số $+1, -1$. Rõ ràng tích của tất cả các số đã viết, hoặc tính chẵn lẻ của số các dấu trừ, hoặc tính chẵn lẻ của tổng các số (khi thay dấu cộng bởi số 0 và dấu trừ bởi số 1) đều không phải là một bất biến của bài toán. Như vậy để giải bài toán này, ta cần tìm bất biến khác với các bất biến đã được dùng khi giải bài toán 2.1.1. Mặc dù tích tất cả các số không bất biến, nhưng rất có thể tích của các số ở một số ô cố định nào đó là một bất biến. Để tìm các ô như vậy, ta cần tìm một tập hợp các ô mà khi thực hiện phép tính cho phép, số ô có thể đảo dấu trong tập hợp này phải là số chẵn. Dễ thấy rằng, tập hợp các ô được đánh dấu x trong bảng sẽ có tính chất đó:

	x	x	x	x	
x					x
x					x
x					x
x					x
	x	x	x	x	

Hình 2.10

Tại trạng thái xuất phát, tích các số viết trong các ô nói trên là -1. Do tích này là một bất biến nên trong quá trình thực hiện phép toán đã cho, ta không thể nào nhận được một bảng không có dấu trừ nào.
c) Với bảng ban đầu cho như hình sau:

+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	-	-	+	+

Hình 2.11

Ta thay các dấu cộng và dấu trừ tương ứng bởi các số $+1, -1$. Rõ ràng tích của tất cả các số đã viết, hoặc tính chẵn lẻ của số các dấu trừ, hoặc tính chẵn lẻ của tổng các số (khi thay dấu cộng bởi số 0 và dấu trừ bởi số 1) đều không phải là một bất biến của bài toán. Như vậy để giải bài toán này, ta cần tìm bất biến khác với các bất biến đã được dùng khi giải bài toán 2.1.1. Mặc dù tích tất cả các số không bất biến, nhưng rất có thể tích của các số ở một số ô cố định nào đó là một bất biến. Để tìm các ô như vậy, ta cần tìm một tập hợp các ô mà khi thực hiện phép tính cho phép, số ô có thể đảo dấu trong tập hợp này phải là số chẵn. Dễ thấy rằng, tập hợp các ô được đánh dấu x trong bảng sẽ có tính chất đó:

	x	x	x	x	
x					x
x					x
	x				x
		x			x
			x	x	

Hình 2.12

Tại trạng thái xuất phát, tích các số viết trong các ô nói trên là -1. Do tích này là một bất biến nên trong quá trình thực hiện phép toán đã cho, ta không thể nào nhận được một bảng không có dấu trừ nào.

Bài toán 2.2.3. *Điền 29 số nguyên dương đầu tiên vào các ô vuông con của bảng 6 x 5 như sau:*

1	*2*	*3*	*4*	*5*
6	*7*	*8*	*9*	*10*
11	*12*		*13*	*14*
15	*16*	*17*	*18*	*19*
20	*21*	*22*	*23*	*24*
25	*26*	*27*	*28*	*29*

Bảng 1

Cho phép thay đổi vị trí của các ô trong bảng theo quy tắc: Mỗi lần lấy một số nằm ở ô kề với ô trống rồi chuyển số đó sang ô trống. Hỏi nhờ việc thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép chuyển số nói trên đối với bảng số ban đầu ta có thể nhận được bảng số sau hay không?

29	*2*	*3*	*4*	*5*
6	*7*	*8*	*9*	*10*
11	*12*		*13*	*14*
15	*16*	*17*	*18*	*19*
20	*21*	*22*	*23*	*24*
25	*26*	*27*	*28*	*1*

Bảng 2

Lời giải. Giả sử nhờ phép chuyển số theo quy tắc của đề bài, từ bảng 1 ta có thể nhận được bảng 2 (*). Ta coi ô trống của mỗi bảng là ô được điền số 0. Với mỗi bảng số nhận được trong quá trình chuyển số, ta liệt kê tất cả các số trong bảng theo thứ tự từ trái qua phải, từ trên xuống dưới. Khi đó, ứng với mỗi bảng số ta sẽ có một hoán vị của 30 số tự nhiên đầu tiên. Và do đó, giả sử (*) cho thấy, từ hoán vị (1, 2, 3, ..., 11, 12, 0, 13, 14, ..., 28, 29) (gọi là hoán vị I) ta có thể nhận được hoán vị (29, 2, 3, 4, ...,11, 12, 0, 13, 14, 15, ..., 27, 28, 1) (gọi là hoán vị II) nhờ việc thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép đổi chỗ các số hạng trong hoán vị theo quy tắc: mỗi lần, lấy một số hạng khác không của hoán vị rồi đổi vị trí của số hạng đó và 0 cho nhau (1).

Giả sử $(a_1, a_2, ..., a_{30})$ là một hoán vị của 30 số tự nhiên đầu tiên. Ta gọi cặp số $(a_i; a_j)$ là cặp số ngược của hoán vị vừa nêu, nếu $a_i > a_j$ và $i < j$. Dễ thấy, sau một số lần thực hiện phép đổi chỗ các số hạng theo quy tắc (1) đối với hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_{30})$ thì cặp số ngược lại của hoán vị đó sẽ tăng hoặc giảm một số lẻ đơn vị (2). Ta có, số cặp số ngược của hoán vị I là 12 và số cặp số ngược của hoán vị II là 67. Từ đó kết hợp với (2), suy ra từ hoán vị I ta chỉ có thể nhận được hoán vị II sau một số lẻ lần thực hiện phép đổi chỗ các số hạng. Điều đó cho thấy, nếu từ bảng 1 ta nhận được bảng 2 thì số lần chuyển số phải là số lẻ (3).

Tô màu tất cả các ô vuông con của bảng 6 x 5 bởi hai màu xanh, đỏ sao cho hai ô kề nhau có màu khác nhau. Thế thì, sau mỗi lần chuyển số số 0 sẽ được chuyển từ ô có màu này sang ô có màu kia. Và vì thế, do số 0 ở bảng 1 và số 0 ở bảng 2 nằm ở hai ô cùng màu nên từ bảng 1 ta chỉ có thể nhận được bảng 2 sau một số chẵn lần chuyển số. Điều này mâu thuẫn với (3) và mâu thuẫn đó cho thấy: Từ bảng 1 ta không thể nhận được bảng 2 nhờ phép chuyển số theo quy tắc của đề bài.

Bài toán 2.2.4. *Trên một bảng ô vuông có 8 x 8 ô vuông bao gồm 32 ô trắng và 32 ô đen. Nếu một người chơi có thể thay tất cả các ô trắng thành đen và ô đen thành trắng cùng một lúc trong một hàng hoặc một cột bất kì, thì có thể thực hiện hữu hạn bước thay đổi như vậy để trên bảng chỉ còn đúng một ô đen hay không?*

Lời giải. Câu trả lời là không. Nếu có đúng k ô đen trong một hàng hoặc một cột trước khi thực hiện thay đổi, thì sau thực hiện một lần thay đổi, số ô đen trong hàng đó hoặc cột đó sẽ là $8 - k$, sự thay đổi ô đen là $(8 - k) - k = 8 - 2k$ ô đen trên bảng. Vì $8 - 2k$ là một số chẵn, tính chẵn lẻ của số những ô đen vẫn giữ nguyên trước cũng như sau thực hiện thay đổi. Do bắt đầu có 32 ô đen, nên không thể chỉ còn lại một ô đen trên bảng tại một bước biến đổi nào đó.

Bài toán 2.2.5. *Một hình vuông có cạnh 4 cm được chia thành 16 ô vuông, mỗi ô vuông có cạnh 1 cm. Trong mỗi ô vuông đánh dấu cộng (+), trừ một ô vuông đánh dấu trừ (-). Những dấu ở các ô vuông có thể thay đổi đồng thời theo hàng, cột hoặc đường chéo. Có khả năng sau hữu hạn lần đổi dấu theo nguyên tắc trên dẫn đến tất cả các ô vuông đều có dấu cộng (+) không?*

+	+	-	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Hình 2.13

Lời giải. Ta thay dấu cộng, trừ bằng các số tương ứng 1 và -1. Trạng thái ban đầu giả sử là hình 2.14.

1	1	-1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

Hình 2.14

Đại lượng bất biến ở bài toán này là tích các số ở các ô gạch chéo trong hình 2.15.

	x	x	
x			x
x			x
	x	x	

Hình 2.15

Sau những thao tác mô tả trong bài toán, đại lượng này luôn luôn có giá trị là -1. Nghĩa là trong các ô được gạch chéo luôn luôn tồn tại một ô có số -1, suy ra không thể nhận được bảng không chứa dấu trừ nào.

Bài toán 2.2.6. *Cho một bảng hình vuông 10 x 10 và trong mỗi ô ta ghi theo thứ tự một số tự nhiên gồm từ số 1 đến số 100. Hàng thứ nhất ghi từ 1 đến 10, hàng thứ hai ghi từ 11 đến 20, ... Chứng minh rằng tổng S của 10 số bất kì của bảng, trong đó không có hai số nào thuộc cùng một hàng và không có hai số nào thuộc cùng một cột, là một số không đổi. Tìm số S.*

Lời giải. Ta kí hiệu số hạng của tổng là S.

- Thuộc hàng 1 là a_1.

- Thuộc hàng 2 là $10 + a_2$.

...

- Thuộc hàng 10 là $90 + a_{10}$.

Trong đó, các số tự nhiên $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ bao gồm giữa 1 và 10, và những số này đôi một khác nhau, vì nếu ta có $a_1 = a_2$ thì hai số a_1 và $10 + a_2$ phải nằm trong cùng một cột của bảng. Do đó:

$$S = a_1 + (10 + a_2) + (20 + a_3) + \cdots + (90 + a_{10})$$

$$= (10 + 20 + \cdots + 90) + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})$$

$$= 450 + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})$$

Bởi vì các số $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ đôi một khác nhau và nhận giá trị nguyên từ 1 đến 10, mỗi một số có mặt trong tổng $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$ với tư cách là một số hạng, cũng chỉ có một lần. Do đó: $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 1 + 2 + \cdots + 10 = 55$. Như vậy $S = 450 + 55 = 505$ là đại lượng bất biến đối với mọi cách chọn tổng các số trong bảng.

Bài toán 2.2.7. *Có một bảng vuông gồm 16 ô và trong mỗi ô người ta viết một dấu (+) hoặc một dấu (-). Cho phép thay đổi tất cả các dấu* *của cùng một dòng hoặc một cột nào đó thành những dấu ngược với nó. Ta tiến hành một số lần phép toán như vậy cho đến khi số dấu trừ (-) không thể giảm đi được nữa. Khi đó số nhỏ nhất các dấu (-) trong bảng mà ta có thể thực hiện một số phép toán đã nên để đưa về được, gọi là đặc trưng của bảng. Hỏi đặc trưng của bảng có thể nhận được những giá trị nào?*

Lời giải. Giả sử bảng T_1 sau các phép biến đổi nào đó, đã được mô tả trong bài toán, biến bảng T_2 mà số dấu (-) trong T_2 là nhỏ nhất, nghĩa là khi biến đổi bảng T_2 , số dấu trừ không thể nhỏ hơn được nữa. Ta sẽ gọi bảng như vậy là bảng cực tiểu.

Ta chứng minh số dấu (-) trong bảng cực tiểu không lớn hơn 4. Thật vậy, trong mỗi dòng và mỗi cột của bảng có không có quá 2 dấu (-). Giả sử tồn tại bảng cực tiểu có quá 4 dấu (-). Khi đó trong dòng A nào đó của bảng có ít nhất hai dấu (-). Ta kí hiệu P và Q là các cột chứa những dấu (-) ấy. Hai dấu (-) khác có thể ở trong P và Q hoặc ở các cột khác. Khi thay đổi dòng A (nếu cần thiết) ta sẽ có bảng mà mỗi cột P và Q có đúng 2 dấu (-). Ta xét dấu (-) thứ 5. Dấu (-) này ở dòng B. Khi đổi dấu một trong hai cột P và Q, ta sẽ có bảng mà dòng B có 3 dấu (-). Điều này mâu thuẫn với giả thiết bảng T_2 cực tiểu.

Các bảng có 1, 2, 3, 4 dấu (-) ở đường chéo, còn các vị trí khác dấu (+), chính là các bảng cực tiểu. Để chứng minh điều này ta chú ý rằng kết quả của phép biến đổi T_1 thành T_2 không phụ thuộc vào số lần đổi dấu của một dòng hoặc một cột mà chỉ phụ thuộc vào tính chẵn lẻ của số đó. Thật vậy, giả sử, ví dụ dòng thứ nhất đổi dấu a lần, còn các cột thay đổi tương ứng b_1, b_2, b_3, b_4 lần. Khi đó, dấu đứng ở góc trên bên trái thay đổi $a + b_1$ lần, còn các dấu ở 3 ô còn lại thay đổi lần lượt là $a + b_2, a + b_3, a + b_4$ lần. Nếu a chẵn, lấy 0 thay a; nếu a lẻ, lấy 1 thay a thì kết quả vẫn giữ nguyên. Vì vậy chỉ cần xét những biến đổi không quá 1 lần.

Sử dụng kết quả này ta sẽ thấy ngay các bảng trên đúng là các bảng cực tiểu. Vậy đặc trưng của bảng chỉ có thể nhận một trong các giá trị là 1, 2, 3, 4.

Bài toán 2.2.8. *Xét một bảng vuông 4 x 4 ô. Tại mỗi ô của bảng vuông có chứa dấu (+) hoặc dấu trừ (-). Mỗi lần thực hiện cho phép ta đổi dấu tất cả các ô trên cùng một hàng hoặc cùng một cột. Giả sử bảng vuông ban đầu có 1 dấu (+) và 15 dấu (-). Hỏi có thể đưa bảng ban đầu về bảng có toàn dấu cộng được không?*

Lời giải. Câu trả lời là không. Và lời giải khá đơn giản. Thay dấu cộng bằng số 1 và dấu trừ bằng -1. Xét tích tất cả các số trên bảng vuông. Khi đó, qua mỗi phép biến đổi, tích này không thay đổi (vì sẽ đổi dấu 4 số). Vì vậy, cho dù thực hiện bao nhiêu lần, từ bảng vuông $(1, 15)$ sẽ chỉ đưa về các dạng bảng vuông có số lẻ dấu trừ (-), có nghĩa là sẽ không thể đưa về bảng ô vuông có toàn dấu cộng.

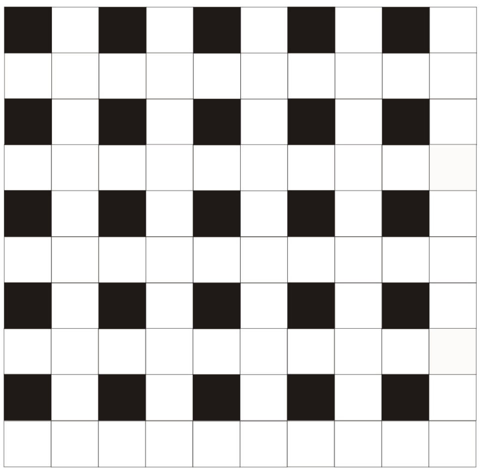
Chương 3

MỘT SỐ LOẠI BÀI TOÁN KHÁC

Ngoài những bài toán trên bảng ô vuông, còn có rất nhiều dạng bài toán khác mà phương pháp giải cũng là sử dụng một bất biến nào đó. Ở đây chúng tôi chỉ giới hạn trong việc đưa ra một số ví dụ minh họa.

Bài toán 3.0.9. *Cho một bảng hình ô vuông có cạnh 10 cm được chia ra thành 100 ô vuông nhỏ có cạnh bằng 1 cm. Ngoài ra ta đặt lên đó 25 hình chữ nhật như nhau có có chiều cao 4 cm và chiều rộng 1 cm, mỗi hình chữ nhật được chia ra thành 4 ô vuông có cạnh là 1 cm. Có thể sắp đặt những hình chữ nhật trên bảng hình vuông sao cho chúng phủ toàn bộ bảng vuông hay không? (không chấp nhận hình chữ nhật nào có cạnh lồi ra khỏi bảng).*

Lời giải. Ta tô bảng ô vuông bằng màu đen, trắng như hình 3.16.

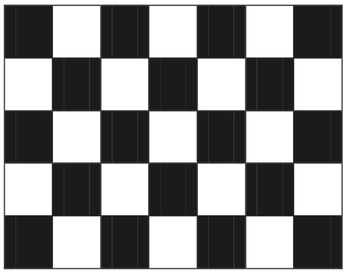


Hình 3.16

Ta nhận được 25 ô đen và 75 ô trắng. Ta chú ý là đặt những hình chữ nhật trên bảng vuông sao cho mỗi ô vuông của hình chữ nhật trùng với một ô vuông nào đó của bảng vuông. Hình chữ nhật này sẽ phủ lên hoặc là 2 hoặc là 0 ô vuông đen. Từ đó suy ra khi đặt tất cả 25 hình chữ nhật trên bảng vuông, chúng sẽ phủ kín một số chẵn những ô vuông đen. Bởi vì, số lượng của ô vuông đen đã tô là 25, nó không phải là một số chẵn. Như vậy không thể phủ bằng 25 hình chữ nhật trên hình vuông đã cho.

Bài toán 3.0.10. *Một lưới hình chữ nhật được tô màu theo kiểu bàn cờ, và trong mỗi ô có một số nguyên. Giả sử rằng tổng các số trong mỗi hàng và tổng các số trong mỗi cột là một số chẵn. Chứng minh rằng tổng tất cả các số trong ô đen là chẵn.*

Lời giải. Giả sử các màu tô là đỏ và đen, trong đó ô vuông góc trái trên là màu đỏ.



Hình 3.17

(Vì tổng tất cả các số trong lưới hình chữ nhật là chẵn nên điều cần chứng minh cũng tương đương với tổng các ô màu đỏ là số chẵn.) Tổng các hàng thứ nhất, thứ ba, ... (từ trên xuống), và các cột thứ nhất, thứ ba, ... (từ trái sang) bằng tổng các số trong các ô đen trừ đi hai lần tổng tất cả các số trong các ô đỏ. Vì tổng này là số chẵn nên tổng các số trong các ô đen là chẵn.

Bài toán 3.0.11. *Trong một bảng ô vuông có n x n ô với n là số lẻ. Trong mỗi ô ta viết +1 hoặc -1. Gọi a_i là tích tất cả các số thuộc hàng thứ i và b_j là tích tất cả các số thuộc cột thứ j với $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$. Chứng minh rằng $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n \neq 0$.*

Lời giải. Nếu ta đổi dấu của số nằm ở hàng thứ p và cột thứ q, những số a_p và b_q cũng đổi dấu, còn những số khác vẫn giữ nguyên. Ta xem sự thay đổi của $a_p + b_q$ trước và sau khi đổi dấu:

	Trước	Sau	Trước	Sau	Trước	Sau	Trước	Sau
a_p	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1
b_q	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1
a_p+b_q	-2	+2	0	0	0	0	+2	-2

Ta thấy rằng a_p+b_q biến đổi bằng cách thêm vào một số bội của 4. Ta xét bảng chỉ có số $+1$, với bảng này $a_1+a_2+\cdots+a_n+b_1+b_2+\cdots+b_n = 2n$ và theo điều kiện n là một số lẻ, như vậy tổng này không chia hết cho 4. Bởi vì mỗi bảng khác nhận được từ bảng toàn số $+1$ bằng cách biến đổi một số phần tử và ta thấy rằng tổng $a_1+a_2+\cdots+a_n+b_1+b_2+\cdots+b_n$ đều không chia hết cho 4 và như vậy tổng này luôn khác 0.

Bài toán 3.0.12. *Trên tờ giấy có kẻ một lưới các ô vuông, người ta vẽ một đường gấp khúc khép kín với các đỉnh tại các mút của lưới và tất cả các đoạn của nó có độ dài bằng nhau. Chứng minh rằng, số các đoạn của đường gấp khúc khép kín như vậy là chẵn.*

Lời giải. Giả sử $A_1A_2...A_nA_1$ là một đường gấp khúc đã cho. Ta lấy hệ trục toạ độ vuông góc là các đường biên của lưới và chiều rộng của một ô làm đơn vị. Khi đó toạ độ $(x_i; y_i)$ của đỉnh A_i là nguyên với $i = 1, 2, \ldots, n$.
Đặt $X_i = x_{n+1} - x_n; Y_i = y_{n+1} - y_n; X_n = x_1 - x_n; Y_n = y_1 - y_n$.
Ta có:

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0 \tag{3.1}$$

$$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = 0 \tag{3.2}$$

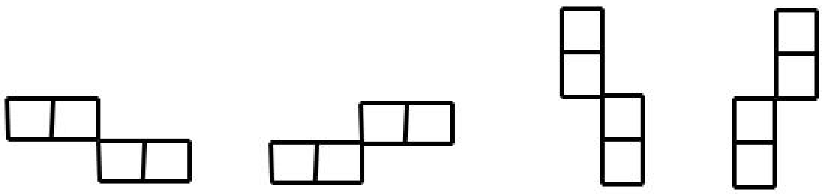
$$X_1^2 + Y_1^2 = X_2^2 + Y_2^2 = \cdots = X_n^2 + Y_n^2 = C \tag{3.3}$$

Để ý là $X^2 + Y^2$ chia 4 dư 0 nếu X và Y đều chẵn, dư 1 nếu một số lẻ và dư 2 nếu 2 số đều lẻ. Có thể giả thiết rằng trong $X_1, X_2, ..., X_n, Y_1, Y_2, ..., Y_n$ có ít nhất một số lẻ, nói cách khác là ta chia tất cả các số này cho ước chung của chúng và xét bộ số nhận được. Như vậy chỉ có 2 trường hợp xảy ra :

Trường hợp 1: C chia cho 4 dư 2, khi đó với mỗi i thì X_i và Y_i đều lẻ nên từ điều kiện (1.1) suy ra n chẵn.
Trường hợp 2: C chia cho 4 dư 1, khi đó, với mỗi i thì X_i hoặc Y_i lẻ, còn số kia chẵn. Từ (1.1) suy ra số các cặp $(X_i; Y_i)$ mà X_i lẻ là chẵn. Từ (1.2) suy ra số các cặp $(X_i; Y_i)$ mà Y_i lẻ là chẵn nên số các cặp $(X_i; Y_i)$ là chẵn.

Như vậy, trong mọi trường hợp n đều chẵn.

Bài toán 3.0.13. *Cho m và n là các số nguyên dương lớn hơn 3 và bảng ô vuông kích thước m x n. Cho phép đặt bi vào các ô vuông con của bảng theo cách sau: mỗi lần, đặt vào 4 ô vuông con (mỗi ô 1 viên) mà 4 ô vuông đó tạo thành 1 trong các hình dưới đây:*



Hình 3.18

Hỏi bằng cách trên ta có thể đặt bi vào các ô vuông con của bảng sao cho số bi trong mỗi ô vuông con đều bằng nhau hay không, nếu $m = 2005$ và $n = 2006$.

Lời giải. Giả sử sau một số hữu hạn lần phép thực hiện đặt bi của đề bài, ta đặt được vào mỗi ô vuông con của bảng 2005 x 2006 là k viên bi.

Tô màu tất cả các ô vuông con thuộc hàng lẻ của bảng bởi màu đen và coi các ô không tô màu có màu trắng. Khi đó, số ô màu đen bằng 2.10032 và số ô màu trắng bằng 2006.1002. Ta thấy, ở mỗi lần đặt bi, ta đều đặt đúng hai viên bi vào các ô màu đen và đúng 2 viên bi vào các ô màu trắng. Do đó, sau mỗi lần đặt bi, số bi trong các ô màu đen và số bi trong các ô màu trắng luôn bằng nhau. Suy ra, khi ở mỗi ô có k viên bi, ta phải có $2.1032.k = 2006.1002.k$ suy ra $k = 0$. Điều vô lí này chứng tỏ giả sử ban đầu là sai, vì thế ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.0.14. *Một cái nền nhà dạng hình chữ nhật được lát kín bằng những viên gạch mem kích thước 2 x 2 và 1 x 4. Khi sửa nền nhà, người ta phải dỡ tất cả số gạch men đã lát, nhưng không may bị vỡ mất một viên kích thước 2 x 2. Vì không có loại gạch men kích thước 2 x 2 nên người ta phải thay viên bị vỡ bởi các viên kích thước 1 x 4. Chứng minh rằng, bây giờ nền nhà không thể lát được bởi các viên gạch ấy.*

Lời giải. Ta chia nền nhà thành các hình vuông có kích thước 1 x 1, và tô đen các ô đứng ở dòng lẻ, cột lẻ. Ta thấy mỗi viên gạch 1 x 4 chiếm 4 ô vuông trên nền nhà sẽ chứa một số chẵn các ô đen, còn các viên gạch 2 x 2 chiếm đúng một ô đen. Như vậy, lúc đầu tất cả gạch lát kín nền nhà nên số viên gạch 2 x 2 có cùng tính chẵn lẻ với số các ô được tô đen. Vì vậy, nếu số các viên gạch 2 x 2 bớt đi một đơn vị tức là tính chẵn lẻ bị thay đổi, tức là khác tính chẵn lẻ với số các ô đen. Do đó nền nhà không được lát kín.

Bài toán 3.0.15. *Cho bảng ô vuông kích thước 2000 x 2001. Hãy tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho ta có thể tô màu k ô vuông con của bảng thoả mãn điều kiện: hai ô vuông con nào được tô màu cũng không có đỉnh chung.*

Lời giải. Ta qui ước: Thứ tự của các hàng được tính từ trên xuống dưới và thứ tự của các cột được tính theo thứ tự từ trái qua phải.
Kí kiệu $(i; j)$ là ô vuông nằm ở giao của hàng thứ i và cột thứ j. Kí hiệu $k(T)$ là số ô được tô màu ở cách tô màu T.

Xét một cách tô màu T thoả mãn điều kiện đề bài. Dễ thấy nếu ô $(i; j)$ được tô màu $(1 \leq i \leq 1999)$ thì ô $(i+1; j)$ và các ô kề với nó trong cùng hàng đều không được tô màu. Điều này cho phép ta thực hiện phép biến đổi sau đối với T: Xoá màu ở tất cả các ô $(i; j)$ mà $i \equiv 1 (\bmod 2)$ và đồng thời tô màu các ô $(i+1; j)$. Rõ ràng sau khi thực hiện phép biến đổi nói trên đó với T, ta sẽ được một cách tô màu T' thoả mãn điều kiện đề bài và thỏa mãn

$$+\ k(T') = k(T).$$

+ Tất cả các ô nằm ở các hàng thứ hai: $i-1$ với $i = 1, 2, 3, \ldots, 10^3$, đều không có màu.

Từ điều kiện của đề suy ra số ô được tô màu trong một hàng không vượt quá 1001. Do đó : $k(T') \leq 1001.10^3$. Vì vậy: $k(T) \leq 1001.10^3$, với mọi cách tô màu T thoả mãn điều kiện bài toán.

Xét cách tô màu sau: Tô màu tất cả các ô $(2i; 2j-1)$ với $i = 1, 2, \ldots, 10^3; j = 1, 2, \ldots, 1001$. Dễ thấy, cách tô màu vừa nêu thoả mãn điều kiện đề bài và có số ô được tô màu bằng 1001.10^3. Vậy số nguyên dương k lớn nhất cần tìm là $k = 1001.10^3$.

Bài toán 3.0.16. *Trên bảng có các số* $\frac{1}{96}, \frac{2}{96}, \frac{3}{96}, ..., \frac{96}{96}$. *Mỗi lần thực hiện, cho phép xoá đi hai số a, b bất kì trên bảng và thay bằng $a+b-2ab$. Hỏi sau 95 lần thực hiện phép xoá, số còn lại trên bảng là số nào?*

Lời giải. Khi đặt bài toán này thoạt đầu ta cũng lắc đầu lè lưỡi vì đề bài yêu cầu tính toán quá nhiều. Hơn nữa, trong bài toán trên, thứ tự thực hiện các phép toán lại không được nói rõ, tạo ra một tình huống gần như không thể xử lý nổi. Nhưng chính những khó khăn đó lại gợi mở ra cách giải.

Ta cố gắng tìm một đại lượng nào đó bất biến trong quá trình biến đổi. Thông thường, chỉ nghĩ đến những hàm đơn giản, chẳng hạn tích hoặc tổng các số, hay biến đổi chút ít các hàm đó. Từ đẳng thức $-2(a+b-2ab)+1 = (2a-1)(2b-1)$, ta nghĩ đến việc xét bất biến sau đây.

Giả sử các số trên đây là $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$. Ta cho tương ứng bảng này với tích $(2a_1-1)(2a_2-1)...(2a_k-1)$. Khi đó, sau mỗi lần biến đổi, tích trên bị mất đi hai thừa số $(2a-1)(2b-1)$ và thêm vào thừa số $2(a+b-2ab)-1 = -(2a-1)(2b-1)$. Do đó tích trên vẫn không đổi (chỉ đổi dấu). Vì tích ban đầu bằng 0 (do bảng ban đầu có chứa số $\frac{48}{96} = \frac{1}{2}$), nên số cuối cùng S cũng phải cho tích số bằng 0, tức là $2S-1 = 0$ suy ra $S = \frac{1}{2}$.

Bài toán 3.0.17. *Các số nguyên từ 1 đến* 2010 *được viết liền nhau* 123...2010. *Nhân chữ số thứ nhất với 2 rồi cộng với chữ số thứ 2, kết* *quả lại nhân với 2, cộng với chữ số thứ 3 ... Sau hết cộng với chữ số cuối cùng. Với số nhận được ta lại làm như trên và tiếp tục mãi mãi cho đến khi nhận được kết quả là một số có một chữ số. Hãy tìm số đó?*

Lời giải. Sau lần thứ nhất ta nhận được số dạng:

$$1.2^{2010} + 2.2^{2010} + \cdots + 1.2 + 0.1$$

Ta sẽ chứng tỏ số này với số ban đầu khi chia cho 8 có cùng một số dư. Muốn vậy, ta chỉ cần chứng tỏ $10^k - 2^k$ chia hết cho 8 với mọi số nguyên $k \geq 0$. Với $k = 0$ thì điều đó là hiển nhiên.
Với $k \geq 1$ thì $10^k - 2^k = 8(10^{k-1} + 10^{k-2}.2 + \cdots + 2^{k-1})$ chia hết cho 8.

Như vậy, sau mỗi lần thực hiện phép biến đổi, số dư của phép chia cho 8 là một bất biến. Số ban đầu chia cho 8 dư là 2, nên số có một chữ số cuối cùng nhận được là số 2.

Bài toán 3.0.18. *Các số* $1, 2, \ldots, n$ *được sắp xếp theo một thứ tự nào đó. Ta có thể đổi chỗ hai số kề nhau tuỳ ý. Chứng minh rằng, với một số lẻ lần thực hiện phép tính, dãy nhận được khác với dãy ban đầu.*

Lời giải. Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số $1, 2, \ldots, n$ viết theo thứ tự nào đó. Ta có một phép thế của các số $1, 2, \ldots, n$. Các số a_i, a_j trong phép thế này gọi là lập nên một nghịch thế, nếu $i > j$ nhưng $a_i > a_j$. Khi đổi chỗ hai số kề nhau, ta đổi thứ tự của chúng trong khi vẫn giữ nguyên thứ tự các số còn lại. Như vậy, số các nghịch thế sẽ tăng hoặc giảm một đơn vị. Sau một số lẻ lần thực hiện phép toán, ta làm thay đổi tính chẵn lẻ của số các nghịch thế, và do đó nhận được một dãy khác với dãy ban đầu.

Bài toán 3.0.19. *Trên bảng ta viết 3 số nguyên. Sau đó xoá đi một số và viết vào đó tổng hai số còn lại trừ đi 1. Thao tác như vậy lặp lại một số lần và cuối cùng ta nhận được ba số* $1945, 1975, 2011$. *Phải chăng những số đầu tiên trên bảng được viết là* $2, 2, 2$?

Lời giải. Bài toán có cho thao tác biến đổi ba số nhưng không cho biết gì về bắt đầu từ số nào và thứ tự ra sao? Thế thì cái gì bất biến trong bài toán này?

Bài toán giải được nhờ phát hiện bất biến tính chẵn lẻ của ba số không thay đổi, nên từ trạng thái xuất phát không thể nhận được trạng thái kết quả.

Sau bước đầu tiên từ ba số $2, 2, 2$ ta đã nhận được $2, 2, 3$ ba số này có hai số chẵn và một số lẻ. Từ bước thứ hai trở đi thì kết quả luôn có hai số chẵn và một số lẻ dù ta thực hiện từ đầu bất cứ số nào (vì những số chẵn bằng tổng của một số chẵn và một số lẻ trừ đi 1; số lẻ là tổng của hai số chẵn trừ đi 1). Nhưng trong kết quả đã cho đều là 3 số lẻ cả, nên thao tác đã cho và xuất phát từ $2, 2, 2$ không thể cho kết quả.

Bài toán 3.0.20. *Một tờ giấy được xé thành 5 mảnh, sau đó lại xé một số mảnh con thành 5 mảnh, và cứ tiếp tục như vậy. Hỏi bằng cách đó có thể nhận được tại thời điểm nào đó có đúng 2011 mảnh giấy hay không? 2009 mảnh giấy không?*

Lời giải. Khi ta chia tờ giấy thành 5 mảnh và sau này chia các mảnh giấy ra làm 5 mảnh nhỏ thì cứ mỗi lần số mảnh giấy tăng thêm 4. Vậy số mảnh giấy sau mỗi lần xé thì có dạng $4k + 1$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, biểu thức này là bất biến trong quá trình xé giấy. Vì $2011 \neq 4k + 1$ nên không thể xé được 2011 mảnh. Ngược lại, $2009 = 4.502 + 1$ nên có thể xé thành 2009 mảnh sau lần thứ 502.

Bài toán 3.0.21. *Những số 1, 2, 3,..., 2010 được viết trên một bảng. Người ta thay hai số bất kì bằng một số hoặc là tổng hoặc là hiệu của hai số đó. Chứng minh rằng sau* 2009 *lần thực hiện thao tác trên, chỉ còn một số còn lại trên bảng không thể là số 0.*

Lời giải. Ta quan tâm đến tính chẵn lẻ của các số đã cho và sau mỗi lần thao tác được số chẵn lẻ như thế nào. Khi bắt đầu trên bảng có 1005 số lẻ. Mỗi lần ta thực hiện thay đổi, số của những số lẻ hoặc là còn nguyên (khi ta lấy hai số có tính chẵn lẻ khác nhau hoặc hai số cùng tính chẵn) hoặc là giảm đi hai số (khi ta lấy hai số cùng tính lẻ). Như vậy số của những số lẻ còn lại sau mỗi lần thực hiện thay đổi luôn luôn là một số lẻ. Vậy khi còn lại một số cuối cùng trên bảng thì nó phải là số lẻ, do đó nó không thể là 0.

Bài toán 3.0.22. *Trên bảng đen ta viết 200 dấu cộng và 305 dấu trừ. Ta thực hiện phép xoá hai dấu bất kì trong đó và viết vào đó một dấu cộng nếu xoá đi hai dấu giống hệt nhau và dấu trừ nếu xoá đi hai dấu khác nhau. Hỏi sau một số lần trên bảng có thể chỉ còn lại toàn dấu cộng hay không?*

Lời giải. Trước hết ta hãy phân tích giả thiết của bài toán, trong phép biến đổi thứ nhất xoá hai dấu giống hệt nhau và viết vào đó một dấu cộng thì dấu cộng giảm một hoặc tăng một, dấu trừ giảm hai hoặc không thay đổi. Trong phép biến đổi thứ hai, ta điền dấu trừ nếu xoá hai dấu khác nhau, như vậy số dấu cộng giảm một và số dấu trừ không thay đổi. Sự biến chuyển của dấu cộng dường như không cho ta hy vọng gì, bởi lẽ nó tăng giảm một cách khá liên tục một đơn vị, thế còn dấu trừ thì sao, thật may mắn nó giữ nguyên hoặc giảm đi hai đơn vị sau mỗi lần biến đổi. Như vậy tính chẵn lẻ của số dấu trừ là không thay đổi, ban đầu số dấu trừ là lẻ nên số lượng số dấu trừ luôn lẻ. Nếu cuối cùng trong bảng chỉ còn lại dấu cộng thì số dấu trừ là 0, là một số chẵn. Như vậy, không thể có chuyện trong bảng không chỉ toàn dấu cộng được.

Bài toán 3.0.23. *Trong mặt phẳng toạ độ, cho một tập hữu hạn các điểm có toạ độ nguyên. Hỏi rằng, có phải ta luôn luôn có thể tô màu đỏ một số điểm của tập hợp này, và số còn lại được tô màu xanh, sao cho với bất kì đường thẳng L nào song song với một trong hai trục toạ độ thì sự khác nhau (về giá trị tuyệt đối) của số điểm màu xanh và số điểm màu đỏ trên L sẽ không lớn hơn 1. Hãy chứng minh cho câu trả lời trên.*

Lời giải. Gọi T là tập hợp hữu hạn các điểm có toạ độ nguyên đã cho ở đề bài. Xét một đường thẳng L tuỳ ý song song với một trong các trục toạ độ và cắt tập hợp T theo thứ tự tại các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (thứ tự từ trái sang phải hoặc từ dưới lên trên). Nối A_1 và A_2, A_3 và $A_4, \ldots$
Cũng làm như vậy đối với đường thẳng L khác. Khi đó, ta được một họ các đoạn thẳng mà mỗi điểm của T đều thuộc không quá hai đoạn thẳng. Vì vậy, ta được các đường gấp khúc đóng này gồm một số chẵn các đoạn. Ta có thể tô màu xen kẽ đỏ, xanh, đỏ, xanh, ... đối với mỗi

đường gấp khúc. Các điểm rời rạc khác không thuộc đường gấp khúc nào thì ta tô màu tuỳ ý. Ta được một cách tô màu thoả mãn điều kiện đầu bài vì các điểm nằm trên các đường song song với các trục toạ độ được nối với nhau bởi các đoạn mà các đầu mút đầu và cuối có màu khác nhau. Tóm lại, ta có thể tô màu như bài toán yêu cầu.

Bài toán 3.0.24. *Có 2010 quả cầu trắng trong một chiếc hộp. Bên ngoài chiếc hộp cũng có các quả cầu trắng, xanh và đỏ với số lượng không hạn chế. Trong mỗi lần thay đổi, chúng ta có thể thay đổi 2 quả cầu trong hộp bởi 1 hoặc 2 quả cầu theo cách sau: 2 quả cầu trắng bởi 1 quả xanh, 2 quả đỏ bởi 1 quả xanh, 2 quả xanh bởi 1 quả trắng và 1 quả đỏ, 1 quả trắng và 1 quả xanh bởi 1 quả đỏ hoặc 1 quả xanh và 1 quả đỏ bởi 1 quả trắng.*
a) Sau một số lần thực hiện như trên còn lại 3 quả cầu trong hộp. Chứng minh rằng có ít nhất một quả xanh trong 3 quả cầu còn lại.
b) Liệu có thể xảy ra sau một số hữu hạn lần thực hiện như trên trong hộp còn lại đúng một quả cầu.

Lời giải. a) Ta gán giá trị i cho mỗi quả cầu trắng, $-i$ cho mỗi quả cầu đỏ và -1 cho mỗi quả cầu xanh. Ta có thể kiểm tra lại rằng các phép thay thế đã cho không làm thay thế các giá trị của các quả cầu trong hộp. Tích các giá trị của các quả cầu ban đầu là $i^{2010} = -1$. Nếu trong hộp còn lại ba quả cầu không có quả nào màu xanh thì tích các giá trị của chúng sẽ là i hoặc $-i$ mâu thuẫn. Do đó, nếu trong hộp còn lại ba quả cầu, thì phải có ít nhất một quả màu xanh.
b) Hơn nữa, vì không có quả nào có giá trị 1 nên trong hộp phải chứa ít nhất hai quả cầu. Do đó, không thể xảy ra trường hợp trong hộp còn lại một quả.

Bài toán 3.0.25. *Cho n điểm trên mặt phẳng ($n \geq 4$) sao cho khoảng cách giữa 2 điểm bất kỳ trong n điểm đó là một số nguyên. Chứng minh rằng ít nhất $\dfrac{1}{6}$ trong số các khoảng cách đó chia hết cho 3.*

Lời giải. Ta xét các đồng dư theo môđulô 3. Trước hết ta chứng minh với $n = 4$, thì ít nhất có hai điểm rời nhau mà khoảng cách giữa chúng chia hết cho 3. Ký hiệu 4 điểm đó là A, B, C, D. Giả sử các khoảng cách AB, BC, CD, DA, AC, BD không chia hết cho 3. Khi đó, không mất tính tổng quát, ta giả sử $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} = \widehat{CAD}$. Gọi $x = \widehat{BAC}; y = \widehat{CAD}$ và $\alpha = 2.AB.AC.\cos x, \beta = 2.AD.AC.\cos y$ và $\gamma = 2.AB.AD.\cos(x+y)$. Áp dụng định lý hàm số côsin cho tam giác ABC, ACD, ABD ta được:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - \alpha$$

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - \beta$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - \gamma$$

Vì bình phương mỗi khoảng cách là một số nguyên, nên α, β và γ cũng là các số nguyên. Do đó:

$$\begin{aligned} 2AC^2.\gamma &= 4AC.AB.AD.\cos(x+y) \\ &= 4AC^2.AB.AD.(\cos x.\cos y - \sin x.\sin y) \\ &= \alpha\beta - 4AB.AD.\sin x.\sin y \end{aligned}$$

là số nguyên. Vì vậy: $4AC^2.AB.AD.\sin x.\sin y$ là một số nguyên chẵn và $\sin x.\sin y = \sqrt{(1-\cos^2 x)(1-\cos^2 y)}$ là một số hữu tỷ, khi viết dưới dạng tối giản tử số là số không chia hết cho 3. Đặt $p = 2AB.AC$ và $q = 2AD.AC$, do đó $\cos x = \dfrac{\alpha}{p}$ và $\cos y = \dfrac{\beta}{q}$ vì $\sin x.\sin y = \dfrac{\sqrt{(p^2-\alpha^2)(q^2-p^2)}}{pq}$ là số hữu tỷ nên tử số ở vế phải cũng là một số nguyên. Tử số chia hết cho 3 vì $p^2 \equiv 1(\bmod 3)$ và $\alpha^2 \equiv 1(\bmod 3)$. Nhưng mẫu số không chia hết cho 3. Do đó, khi viết dưới dạng tối giản thì tử số của nó chia hết cho 3, điều này mâu thuẫn. Do đó, điều giả sử ban đầu là sai. Vậy có ít nhất một khoảng cách chia hết cho 3 với $n = 4$.

Xét trường hợp $n \geq 4$. Từ một tập n điểm, có C_n^4 các tập con chứa 4 điểm có ít nhất hai điểm trong mỗi tập rời nhau đó có khoảng cách chia hết cho 3, và mỗi khoảng cách đó được đếm ít nhất C_{n-2}^2 tập con. Vậy có ít nhất $\dfrac{C_n^4}{C_{n-2}^2} = \dfrac{C_n^2}{6}$ các khoảng cách chia hết cho 3.

Bài toán 3.0.26. *Cho n là số nguyên dương lẻ. Người ta viết các số $1, 2, \ldots, 2n$ lên bảng. Sau đó người ta lấy hai số bất kì a, b thuộc dãy trên, xóa chúng đi và viết vào đó $|a - b|$. Chứng minh rằng sau một số lần thực hiện như vậy, một số lẻ sẽ còn lại cuối cùng.*

Lời giải. Kí hiệu S là tổng của tất cả những số trên bảng (chưa xoá). Khởi đầu $S = 1+2+\cdots+2n = n(2n+1)$ là một số lẻ. Sau mỗi bước S bị giảm đi $2\min(a, b) = |a + b| - |a - b|$ đây là một số chẵn. Như vậy tính chẵn lẻ của S không đổi. Trong quá trình giảm dần ta có $S \equiv 1 (\mod 2)$. Khởi đầu S là một số lẻ. Như vậy kết thúc sẽ cũng là một số lẻ.

Bài toán 3.0.27. *Những số $1, 2, 3, \ldots, n$ được sắp xếp theo một thứ tự nào đó. Một phép biến đổi là đổi chỗ bất kì hai số cạnh nhau trong bộ số có sẵn. Chứng minh rằng nếu ta thực hiện số lẻ lần phép biến đổi như vậy, thì luôn luôn nhận được một số khác với bộ số ban đầu về các vị trí của các số $1, 2, \ldots, n$.*

Lời giải. Ta kí hiệu $a_1, a_2, ..., a_n$ là một hoán vị của bộ số $1, 2, \ldots, n$. Ta nói rằng hai số a_i và a_j trong hoán vị này là nghịch thế nếu $i < j$ mà $a_i > a_j$. Khi ta thay đổi hai số cạnh nhau trong hoán vị, nghĩa là chúng đã tăng hoặc giảm số lượng nghịch thế đi 1.

Ta thực hiện số lẻ lần thao tác như vậy, thì ta đã biến đổi tính chẵn lẻ của số các nghịch thế, điều đó nghĩa là ta thay đổi hoán vị.

Bài toán 3.0.28. *Các số 1, 2, ..., 2011 được viết trên bảng đen. Ta xóa hai số tùy ý và thay vào đó viết phần dư của tổng hai số đó khi chia cho* 13*. Lặp lại phép tính này cho đến khi trên bảng chỉ còn một số. Tìm số đó.*

Lời giải. Dễ thấy rằng, thặng dư dương bé nhất môđulô 13 của tổng các số đã viết là một bất biến trong toàn bộ quá trình. Mặt khác, ta có:

$$1 + 2 + \ldots + 2011 = 2024072 \equiv 11 (\text{mod} 13).$$

Vậy số cuối cùng còn lại trên bảng là số 11.

Bài toán 3.0.29. *Ta thay mỗi số từ 1 đến 1.000.000 bởi tổng các chữ số của nó. Các số nhận được lại tiếp tục thay bằng tổng các chữ số. Làm như vậy cho đến khi chỉ còn lại các số có một chữ số. Hỏi trong dãy cuối cùng này, số chữ số 1 nhiều hơn hay ít hơn số chữ số 2?*

Lời giải. Trong suốt quá trình, thặng dư dương bé nhất môđulô 9 của mỗi số là không thay đổi. Trong các số từ 1 đến 1.000.000 có 111112 số đồng dư 1 môđulô 9, và có 111111 số đồng dư 2 môđulô 9. Vậy trong dãy cuối cùng, số chữ số 1 nhiều hơn số chữ số 2.

Bài toán 3.0.30. *Giả sử M và N là hai số nguyên dương có 9 chữ số có tính chất là nếu bất kì chữ số của M được thay bởi chữ số của N tương ứng thì ta được một bội của 7. Chứng minh rằng với bất kì một số đạt được bằng cách thay một chữ số của N tương ứng bởi một chữ số của M cũng là một bội của 7.*

Lời giải. Kết quả đúng với bất kì $d \equiv 2(\text{mod}7)$.
Viết $M = \sum m_k 10^k, N = \sum n_k 10^k$, ở đây m_k và n_k là các chữ số. Khi đó với bất kì k ta có $10^k(n_k - m_k) \equiv 0 - M(\bmod 7)$. Lấy tổng theo k, ta được $M - N \equiv dM(\bmod 7)$. Vì thế $N \equiv -M(\bmod 7)$ và $10^k(n_k - m_k) \equiv N(\text{mod}7)$. Vậy khi thay bất kì chữ số N bởi chữ số tương ứng trong M chúng ta được một số chia hết cho 7.

Bài toán 3.0.31. *Các số 1, 2, 3, ..., 2005 được viết theo thứ tự tăng dần. Bốn số tuỳ ý trong dãy có thể được xếp lại theo thứ tự đảo ngược tại cùng vị trí đã có. Bằng cách đó, có thể nhận được dãy 2005, 2004, ..., 2, 1 hay không?*

Lời giải. Ta chứng minh với $n = 4k + 1$ thì yêu cầu của bài toán thực hiện được cho dãy $1, 2, \ldots, n$.

Với $k = 1$, biến đổi như sau: $12345 \rightarrow 15432 \rightarrow 34512 \rightarrow 32154 \rightarrow 51234 \rightarrow 54321$.

Giả sử $k > 1$ và điều phải chứng minh đã đúng với $k' < k$. Xét dãy 1, 2, ..., $4k + 1$. Theo giả thiết quy nạp cho $k - 1$, ta biến đổi được nó thành dãy: 1, 2, 3, 4, $4k + 1$, $4k$, ..., 6, 5.

Áp dụng liên tiếp trường hợp $k = 1$, ta lại thu được các dãy sau

$4k + 1$, 4, 3, 2, 1, 4k, ..., 6, 5.

$4k + 1$, $4k$, 1, 2, 3, 4, $4k - 1$,..., 6, 5.

$4k + 1$, $4k$, $4k - 1$, 4, 3, 2, 1, $4k - 2$, ..., 6, 5.

...

$4k + 1$, $4k$, $4k - 1$, ..., 6, 1, 2, 3, 4, 5.

Và cuối cùng là dãy sau đây: $4k + 1$, $4k$, ..., 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Bài toán 3.0.32. *Có 25 xe ô tô xuất phát cùng một lúc từ các vị trí khác nhau dọc theo một đường đua khép kín, và chạy theo cùng một hướng. Theo quy tắc của cuộc đua, các xe có thể vượt nhau, nhưng không được vượt 2 xe cùng một lúc (khi có hai xe nào đó đang vượt nhau thì tại thời điểm chúng cùng vị trí, xe thứ ba không được vượt). Sau một thời gian, các xe trở về vị trí xuất phát của chúng cùng một lúc. Chứng minh rằng trong quá trình chạy, số lần các xe vượt nhau là một số chẵn.*

Lời giải. Để giải bài toán này, ta phải dùng một phương pháp rất thông dụng khi giải các bài toán rời rạc, là "đánh dấu" một đối tượng nào đó, khi mà các đối tượng "bình đẳng" nhau trong bài toán (làm như thế sẽ dễ dàng hơn khi lý luận). Trong bài toán đã cho, vì đường đua khép kín nên vị trí của các ô tô là hoàn toàn bình đẳng. Ta chọn một xe và "sơn màu vàng" cho nó (tất nhiên với giả thiết các xe còn lại đều không có màu vàng). Xem xe màu vàng đứng đầu tiên, tiếp theo là các xe số $1, 2, \dots, 24$. Giả sử có một quan sát viên ghi lại thứ tự các xe, và gắn cho mỗi xe số thứ tự ban đầu của nó. Mỗi lần có một xe nào vượt xe khác, hai số nào đó sẽ đổi chỗ cho nhau. Giả sử tại thời điểm nào đó, có một xe vượt qua xe màu vàng. Nếu thứ tự các số xe trước khi vượt là $a_1, a_2, \dots, a_{24}$ thì sau khi vượt, thứ tự sẽ là $a_2, a_3, \dots, a_{24}, a_1$. Phép thế này có thể nhận được bởi 23 phép dịch chuyển sau đây:

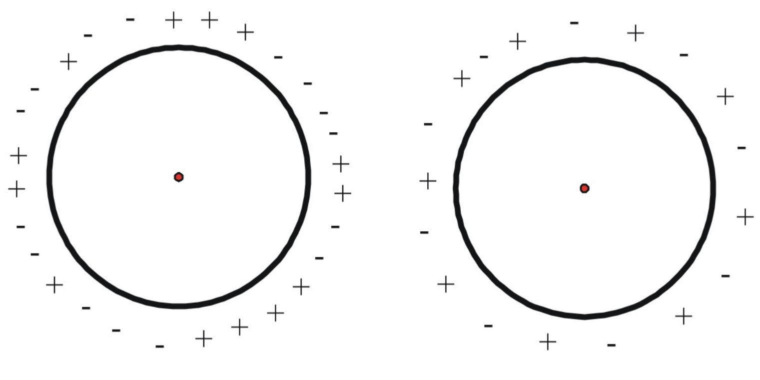
$a_1, a_2, ..., a_{24} \rightarrow a_2, a_1, ..., a_{24} \rightarrow a_2, a_3, a_1, ..., a_{24} \rightarrow \cdots \rightarrow a_2, a_3, ..., a_1, a_{24} \rightarrow a_2, a_3, ..., a_{24}, a_1$.

Nếu xe màu vàng vượt một xe khác thì phép thế $a_1, a_2, \dots, a_{24}$ trở thành $a_{24}, a_1, \dots, a_{23}$. Dễ thấy rằng, phép thế này cũng có thể nhận được bởi việc thực hiện 23 phép dịch chuyển.

Tóm lại, bất kỳ một lần vượt nhau nào của hai xe tuỳ ý cũng tương ứng với một số lẻ các phép dịch chuyển. Tại thời điểm cuối cùng, thứ tự các xe trùng với thứ tự xuất phát nên tổng số phép dịch chuyển phải là số chẵn. Từ đó suy ra số lần các xe vượt nhau phải là số chẵn.

Bài toán 3.0.33. *Hai tổ học sinh của một lớp cùng ngồi họp quanh một cái bàn tròn sao cho số học sinh có bạn cùng tổ ngồi bên phải. Chứng minh rằng tổng số học sinh của hai tổ là một số chia hết cho 4.*

Lời giải. Cách thứ nhất: Ta kí hiệu các học sinh của một tổ bởi dấu (+) và (-). Khi đó ta có một hệ thống các dấu (+) và (-) sắp xếp theo một hình tròn (Hình 3.19). Bây giờ ta xoá tất cả các dấu của mỗi nhóm các dấu giống nhau trừ dấu cuối cùng (khi đếm các dấu theo chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ). Khi đó ta dẫn đến hệ thống ở hình 2 mà trong đó, dĩ nhiên số các dấu cộng bằng số các dấu trừ. Do đó, tổng số các dấu trên hệ thống này là số chẵn. Nhưng khi chuyển từ hệ thống 1 sang hệ thống 2 ta đã xoá tất cả các dấu có dấu giống nó ở bên phải và chỉ còn lại những dấu có dấu khác nó ở bên phải.



Hình 3.19

Theo điều kiện bài toán, số các dấu bị xoá bằng số chẵn các dấu còn lại. Do đó, tổng số các dấu (tức là tổng số học sinh) là một số chẵn chia hết cho 4.

Cách thứ hai: Ta kí hiệu các học sinh của một tổ bởi số 1 và tổ kia bởi số -1. Khi đó ta có n số 1 và -1 được sắp xếp theo một hình tròn. Ta đánh số các số là $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bắt đầu từ số nào đó theo chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ. Theo điều kiện của bài toán ta có: $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1 = 0$ (*). Vì các số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là 1 và -1 nên: $(x_1x_2)(x_2x_3)...(x_nx_1) = 1$. Do đó số các số âm trong tích này là một số chẵn. Nhưng từ (*) suy ra số các số dương bằng số các số âm, nên n chia hết cho 4.

Bài toán 3.0.34. *Một vòng tròn được chia thành 10 cung, trên mỗi cung đặt một miếng bìa. Có thể di chuyển hai miếng bìa tuỳ ý sang cung kề bên, nhưng phải di chuyển hai miếng theo chiều ngược nhau. Với việc thực hiện liên tiếp hai phép toán trên, có thể hay không dồn tất cả các miếng bìa vào một cung?*

Lời giải. Đánh số các cung tròn từ 1 đến 10. Ở trạng thái ban đầu s_0, mỗi cung có 1 miếng bìa. Giả sử ở trạng thái s nào đó, số miếng bìa ở cung thứ k là $a_k(s)$. Đặt $r(s) = (1.a_1(s) + 2.a_2(s) + \cdots + 10.a_{10}(s)) \bmod 10$. Kiểm tra rằng đại lượng này không thay đổi trong quá trình di chuyển các miếng bìa theo cách đã cho. Ta có $r(s_0) = (1 + 2 + \cdots + 10) \bmod 10 = 5$. Trong khi đó đối với trạng thái t mà 10 miếng bìa nằm ở cùng một cung thì $r(t) = 0$. Do vậy không thể chuyển từ trạng thái s_0 về trạng thái t theo cách đã cho.

Bài toán 3.0.35. *Vẽ 9 vòng tròn quanh 3 cạnh của một tam giác, một vòng ở mỗi góc, hai vòng ở mỗi cạnh, mỗi số từ 1 đến 9 được viết vào 1 trong những vòng tròn này sao cho:*

i) Tổng của 4 số ở mỗi cạnh của tam giác là bằng nhau.

ii) Tổng của bình phương của 4 số trên mỗi cạnh của tam giác là bằng nhau.

Tìm tất cả các cạnh thoả mãn yêu cầu này.

Lời giải. Xét một cách viết tùy ý các số, gọi x, y, z là số ở trong góc và S_1, S_2 lần lượt là tổng của 4 số, tổng của bình phương 4 số trên 1 cạnh bất kỳ. Do điều kiện đã cho ta có: $3S_2 = x^2+y^2+z^2+\sum_1^9 k^2 = x^2+y^2+z^2+285.$

Từ đẳng thức thứ 2 ta suy ra x, y, z hoặc tất cả chia hết cho 3 hoặc không có số nào chia hết cho 3. Bởi nguyên lý Pigeouhole có hai số là đồng dư mođulô 3. Lấy phương trình thứ nhất theo môđulô 3 ta cũng suy ra $3\,|(x+y+z)$. Do đó $x \equiv y \equiv z(\text{mod}3)$.

Nếu $(x, y, z) = (3, 6, 9)$ hay $(1, 4, 7)$ thì $S_2 = 137$ hoặc 17.

Nếu $S_2 = 137$ thì $S_2 \equiv 1(\mod 3)$ suy ra chỉ có 1 số trên ba cạnh là lẻ. Điều này không thể vì $5 > 3$ số lẻ được viết trong mỗi khe. Vì thế $(x, y, z) = (2, 5, 8)$ và $S_2 = 126$. Vì $9^2 + 8^2 > 126$ nên 9 không thể nằm cùng cạnh với 8, tức là nó nằm trên cạnh chứa 2 và 5. Vì $\min\left\{7^2 + 9^2.7^2 + 5^2 + 8^2\right\} > 126$ nên số 7 phải nằm trên cạnh chứa 2 hoặc 8 như vậy 4 lần các số trên 3 cạnh phải là $(2, 4, 9, 5); (5, 1, 6, 8); (8, 7, 3, 2)$ để cho tổng bình phương các số trên mỗi cạnh là 126. Cuối cùng ta thấy các bộ số trên thoả mãn.

Bài toán 3.0.36. *Một hình tròn được chia thành sáu rẻ quạt. Những số $1, 0, 1, 0, 0, 0$ được viết vào trong các rẻ quạt này thứ tự theo ngược chiều kim đồng hồ. Ta thực hiện thao tác lặp. Tăng số của hai rẻ quạt cạnh nhau lên 1 đơn vị. Khi thực hiện các thao tác trên có đưa đến kết quả các số trong các rẻ quạt đều bằng nhau không?*

Lời giải. Kí hiệu $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ là những số trong các rẻ quạt hiện thời. Khi đó tổng $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ là một đại lượng không đổi. Khởi đầu ta có $S = 2$ và đích cuối cùng thoả mãn bài ra sẽ không bao giờ đạt tới.

Bài toán 3.0.37. *Người ta chia hình tròn thành 6 hình quạt và đặt vào mỗi hình quạt 1 quân cờ. Mỗi lượt đi cho phép chuyển một quân cờ bất kì sang một trong hai hình quạt cạnh bên. Hỏi sau khi thực hiện đúng 20 lượt đi có thể tập trung các quân cờ vào một hình quạt được không?*

Lời giải. Ta chứng minh sau 20 lượt đi không thể tập trung các quân cờ vào một hình quạt được.

Ta tô đen các hình quạt I, III, V như hình vẽ trên. Ta kí hiệu số quân cờ ở ô đen trước lần đi thứ n là a_{n-1}. Dĩ nhiên $a_0 = 3$ và với $k \geq 1$ thì a_k khác a_{k-1} là 1. Do đó $a_1, a_3, \ldots, a_{19}$ là những số chẵn, còn $a_2, a_4, \ldots, a_{20}$ là những số lẻ. Sau 20 lượt đi số các quân cờ ở các quạt đen là lẻ. Nhưng nếu các quân cờ đều đứng ở một hình quạt thì số đó là số chẵn (bằng 0 hoặc bằng 6). Mâu thuẫn với điều khẳng định của chúng ta là đúng.

Bài toán 3.0.38. *Ở 6 đỉnh của một lục giác lồi có ghi 6 số chẵn liên tiếp theo chiều kim đồng hồ. Ta thay đổi các số như sau: Mỗi lần chọn một cạnh bất kì rồi cộng mỗi số ở hai đỉnh thuộc cạnh đó với cùng một số nguyên nào đó. Hỏi sau một số lần thay đổi như thế thì 6 số mới ở các đỉnh lục giác có thể bằng nhau không?*

Lời giải. Gọi các số chẵn ghi ở 6 đỉnh của lục giác lúc đầu theo thứ tự từ nhỏ đến lớn là $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Ta có: $(a_2+a_4+a_6)-(a_1+a_3+a_5) = 6$. Mỗi lần thay đổi thì hai số kề nhau (theo thứ tự trên, coi a_6 kề với a_1) đều cộng thêm cùng một số nên hiệu của hai tổng trên không đổi và luôn bằng 6. Nếu 6 số mới ở các đỉnh lục giác đều bằng nhau thì hiệu trên bằng 0, nên điều này không thể xảy ra.

Bài toán 3.0.39. *Mỗi cạnh và đường chéo của một n-giác đều ($n \geq 3$) được tô màu đỏ hoặc màu xanh. Ta chọn một đỉnh và thay đổi màu của các đoạn thẳng nhận điểm đó làm đầu mút đó từ màu đỏ thành màu xanh và ngược lại. Chứng minh rằng, với bất kì cách tô màu lúc đầu thế nào, ta vẫn có thể biết số cạnh màu xanh xuất phát từ mỗi đỉnh là số chẵn. Chứng minh rằng, kết quả cuối cùng của việc tô màu được quy định dựa trên cách tô màu ban đầu.*

Lời giải. Nhận thấy, thứ tự các đỉnh không ảnh hưởng tới kết quả tô màu cuối cùng và việc chọn một đỉnh hai lần không ảnh hưởng đến kết quả tô màu. Vì thế, việc chọn một tập hợp các đỉnh cũng cho kết quả như việc chọn các đỉnh còn lại. Quá trình sau cũng tương tự như việc chọn một tập hợp các đỉnh đầu tiên, sau đó chọn tất cả các đỉnh (Ở đây, trong tập hợp các đỉnh còn lại, những đỉnh ban đầu được chọn số lẻ lần bây giờ được chọn theo số chẵn lần và ngược lại). Đặt tên các đỉnh là

$1, 2, 3, \dots, 2n+1$. Gọi a_i là các đoạn màu xanh xuất phát từ đỉnh thứ i, gọi b_i là số lần mỗi đỉnh được chọn và $B = \sum b_i$. Khi chọn đỉnh k thì a_k trở thành $2n - a \equiv a_k$. Mặt khác, mỗi đoạn từ đỉnh k đến một đỉnh khác đổi màu nên a_i còn lại không thay đổi tính chẵn lẻ. Tính tổng số a_i thì cho ra kết quả là hai lần tổng số các đoạn màu xanh, vì thế có một số chẵn với các đỉnh a_i thay đổi $2x - 1$ lần để thành số chẵn. Tính chẵn của các số a_i còn lại thì thay đổi $2x$ lần để giữ nguyên là số chẵn. Do đó, tất cả các đỉnh đều có một số chẵn các đoạn màu xanh. Vậy ta đã chứng minh được kết quả tô màu cuối cùng là duy nhất.

Ta xét một cách tô màu với kết quả như mong muốn. Cuối cùng, số đoạn màu xanh a_i xuất phát từ đỉnh thứ i là $a_i + B - b_i (\bmod 2)$. Khi đó, số đoạn màu xanh xuất phát từ các đỉnh là bằng nhau, do đó $b_j \equiv b_k$ khi và chỉ khi lúc đầu $a_j \equiv a_k$. Vì vậy, hoặc $b_i \equiv 1$ khi và chỉ khi $a_i \equiv 1$ hoặc là $b_i \equiv 1$ khi và chỉ khi $a_i \equiv 0$, ta có kết quả tô màu như trên. Do đó kết quả tô màu là duy nhất. Bài toán được chứng minh.

Bài toán 3.0.40. *Chứng minh rằng trong một đa diện lồi, luôn tồn tại ít nhất một đỉnh là đỉnh của một góc tam diện hoặc ít nhất một mặt là tam giác.*

Lời giải. Ta nhận thấy ví dụ này hơi xa lạ so với các ví dụ trước vì không có phép biến đổi nào. Thực ra, bất biến không chỉ xuất hiện ở những chỗ có các phép biến đổi mà nó còn xuất hiện khi ta xét một lớp các đối tượng thoả mãn những tính chất nào đó. Ví dụ với cặp số $(x; y)$ ở trên đường tròn đơn vị thì $x^2 + y^2$ là một bất biến. Còn đối với đa diện lồi thì ta có công thức Euler $V - E + F = 2$, trong đó V là số đỉnh, F là số mặt và E là số cạnh của một đa diện lồi bất kỳ. Ta sẽ dùng công thức này để giải bài toán trên.

Giả sử ngược lại, tồn tại một đa diện mà không có đỉnh nào là đỉnh của một góc tam diện và không có mặt nào là tam giác. Khi đó, do một mặt sẽ có ít nhất 4 cạnh và một cạnh chỉ có thể là cạnh của hai mặt nên ta có $F \leq \dfrac{E}{2}$. Với lý luận tương tự, ta có $V \leq \dfrac{E}{2}$. Vì vậy $V + F - E \leq \dfrac{E}{2} + \dfrac{E}{2} - E = 0$, mâu thuẫn.

Xoá bỏ đi một mặt của đa diện. Bằng cách kéo các cạnh của mặt bị bỏ đi, ta biến phần còn lại thành một mạng lưới phẳng với các điểm và các đường, như hình vẽ đầu minh hoạ cho trường hợp đặc biệt của hình lập phương. Sau phép biến đổi này, các mặt nói chung không còn là đều nữa, thậm chí có thể không còn là đa giác. Nhưng số đỉnh, số cạnh và số mặt vẫn giống với đa diện ban đầu. (Mặt bị xoá tương ứng với phần ngoài của mạng lưới). Nếu như có một mặt nào đó có nhiều hơn 3 cạnh, ta vẽ đường chéo, tức là đường cong nằm trên mặt và nối 2 đỉnh chưa được nối. Điều này sẽ làm số cạnh tăng lên 1, số mặt tăng lên 1 còn số đỉnh thì không thay đổi, có nghĩa là giá trị $V - E + F$ không đổi. Bằng cách thêm cạnh theo quy tắc này, ta sẽ đi đến tình huống khi tất cả các mặt đều là tam giác. Tiếp theo ta áp dụng 2 phép biến đổi sau:

i) Xoá đi tam giác chỉ có 1 cạnh giáp với phần ngoài, như minh hoạ trên hình thứ 2. Điều này sẽ làm giảm số cạnh và số mặt đi một đơn vị nhưng không làm thay đổi số đỉnh, vì thế phép xoá này bảo toàn $V - E + F$.

ii) Xoá đi tam giác có 2 cạnh giáp với phần ngoài, như minh hoạ trên hình thứ 3. Một phép xoá như vậy sẽ xoá đi một đỉnh, 2 cạnh và 1 mặt, vì thế vẫn bảo toàn $V - E + F$. Lặp lại hai bước này nhiều lần cho đến khi chỉ còn một tam giác. Lúc này ta có $V = 3, E = 3, F = 2$ (tính đến phần ngoài), như thế $V - E + F = 2$. Con số này bằng con số $V - E + F$ ban đầu, vì các phép biến đổi mà ta đã thực hiện bảo toàn đại lượng này. Như vậy ngay từ bước đầu của quá trình ta phải có $V - E + F = 2$. Định lý được chứng minh.

Bài toán 3.0.41. *Có ba đống sỏi gồm những viên sỏi nhỏ có số lượng tương ứng là 19, 8 và 9 (viên sỏi). Ta được phép chọn hai đống sỏi và chuyển một viên sỏi của những đống sỏi đã chọn sang đống sỏi thứ ba. Sau một số lần làm như vậy thì có khả năng tạo ra mọi đống sỏi đều có 12 viên sỏi hay không?*

Lời giải. Đặt số viên sỏi trong ba đống sỏi tương ứng là a, b và c. Ta xét số dư chia cho 3 của những số này. Khi xuất phát, những số đồng dư này là 1, 2, 0. Sau một lần chọn thay đổi, những số dư này là 0, 1, 2 vì hai đống sỏi có sự chuyển một viên sỏi đến đống thứ ba. Như vậy, những số dư luôn luôn là 0, 1, 2 với những thứ tự khác nhau. Do đó tất cả các đống sỏi đều có 12 viên sỏi là không thể được (vì khi đó số dư của ba đống sỏi là 0, 0, 0, vô lí). Vậy không thể tạo ra mọi đống sỏi đều có 12 viên sỏi.

Bài toán 3.0.42. *Ngoài biển đông, trên hòn đảo sinh sống giống thằn lằn có ba loại màu: màu xám có 133 con, màu nâu có 155 con và màu đỏ có 177 con. Nếu hai con thằn lằn khác màu gặp nhau, thì chúng đồng thời đổi màu sang màu thứ ba. Trong những trường hợp hai con thằn lằn cùng màu gặp nhau thì chúng giữ nguyên không đổi màu. Có xảy ra tình trạng là trên đảo tất cả thằn lằn trở thành cùng một màu được không?*

Lời giải. Ta có ba số nguyên 133, 155, 177 chia cho 3 được bộ số dư là 1, 2 và 0. Khi đó xét các khả năng sau:

Nếu một con thằn lằn màu xám gặp một con thằn lằn màu nâu, thì chúng đồng thời đổi thành màu đỏ. Khi đó ta có 132 con thằn lằn màu xám, 154 con nâu và 179 con đỏ. Nhưng số dư của 132, 154 và 179 chia cho 3 tương ứng là 0, 1 và 2, nghĩa là lại gặp lại đầy đủ các số dư đã có.

Nếu một con thằn lằn màu xám gặp một con thằn lằn màu đỏ thì chúng đồng thời đổi thành màu nâu. Khi đó ta có 132 thằn lằn màu xám, 157 thằn lằn nâu và 176 thằn lằn màu đỏ. Lấy những số trên chia cho 3 cho số dư tương ứng là 0, 1 và 2, nghĩa là lại gặp cả ba khả năng của số dư.

Nếu con thằn lằn màu nâu và thằn lằn màu đỏ gặp nhau thì chúng cùng đổi màu thành màu xám. Khi đó có 135 thằn lằn xám, 154 thằn lằn nâu và 176 thằn lằn đỏ. Số dư của những số thằn lằn trên chia cho 3 tương ứng là 0, 1 và 2, vẫn có đầy đủ các số dư khi chia cho 3.

Vậy bất biến ở đây là dù thay đổi màu như thế nào thì số dư của các số lượng thằn lằn chia cho 3 đều có đầy đủ ba số 0, 1 và 2.

Số lượng tất cả thằn lằn trên đảo là $133 + 155 + 177 = 465$ là một số chia hết cho 3. Nếu tất cả thằn lằn đều cùng một màu thì số dư của số lượng thằn lằn màu xám, nâu và đỏ chia cho 3 tương ứng là 0, 0, 0. Điều này vô lí, vì các số dư phải có đầy đủ các số dư này khi chia cho 3. Như vậy, câu trả lời là không thể được.

Bài toán 3.0.43. *Trong một thành phố nhiệm màu có 10 kị sĩ tóc vàng, 15 kị sĩ tóc đỏ và 23 kị sĩ tóc xanh. Các kị sĩ có một đặc điểm rất thú vị là hai người khác màu tóc gặp nhau thì tóc họ sẽ đổi sang màu thứ ba. Liệu sau một số lần nào đó thì tất cả các kị sĩ có cùng màu tóc hay không?*

Lời giải. Chúng ta sẽ phân tích tính chất của các kị sĩ mà đề bài đã nêu ra, nếu hai người khác màu tóc gặp nhau thì tóc họ sẽ đổi sang màu thứ ba. Tính chất đặc biệt này cho ta điều gì, hãy giả sử hai người gặp nhau là xanh và vàng, họ sẽ đổi thành hai kị sĩ tóc đỏ. Như vậy chúng ta sẽ được gì, số kị sĩ tóc xanh giảm đi 1, số kị sĩ tóc vàng giảm đi 1, số kị sĩ tóc đỏ tăng hai. Sự tăng giảm này cho ta tính chẵn lẻ nào ư, số kị sĩ tóc đỏ tăng lên 2 đấy thôi, thế nhưng lại có trường hợp giảm hay tăng 1. Vậy thì chúng đâu giữ nguyên tính chẵn lẻ ư. Ta thử xét tổng các số, tổng không đổi, bất biến xuất hiện nhưng điều này không giúp ta giải quyết bài toán. Như vậy ta thử xét hiệu đi, hiệu là $0, 0, 3$. Các số này có tính chất gì, các số này đều chia hết cho 3. Tuyệt quá, bất biến xuất hiện rồi, như vậy dù thay đổi thế nào thì hiệu số hai loại kị sĩ luôn chia hết cho 3. Đây chính là sự bất biến theo môđulô 3. Ban đầu hiệu số về số lượng kị sĩ không chia hết cho 3, như vậy thì không thể xảy ra trường hợp có hai loại kị sĩ mang số lượng 0, 0 được, nghĩa là cũng không có trường hợp tất cả các loại kị sĩ đều cùng màu tóc.

Bài toán 3.0.44. *Trong một cuộc thi đấu bóng đá có 15 đội bóng, các đội đấu với nhau vòng tròn một lượt. Đội chiến thắng được 2 điểm, đội thua được 0 điểm, còn nếu kết quả hoà thì mỗi đội đều được một điểm. Chứng minh rằng sau khi kết thúc mùa giải, ít nhất có một đội mà số điểm ghi được là số chẵn.*

Lời giải. Bất biến trong các bài toán dạng thi đấu này thường nằm trong số điểm mà mỗi đội có được sau mỗi trận đấu. Ở đây, nếu ta xét tổng điểm mà hai đội thu được sau mỗi trận đấu luôn là 2. Đây chính là bất biến giữa hai phép biến đổi thắng thua và hoà. Bất biến này cho ta biết điều gì, thứ nhất là chúng ta có thể tính được số điểm tổng cộng của tất cả đội bóng, từ đây ta có thể suy ra giá trị nhỏ nhất số điểm mà đội đứng thứ nhất nhận được chẳng hạn. Tuy nhiên ở đây, đề bài lại liên quan đến tính chẵn lẻ nên ta hãy chú ý tới tính chẵn lẻ.

Theo phân tích trên, tổng số điểm hai đội sau một trận đấu là 2, tức là một số chẵn. Như vậy, sau khi kết thúc mùa giải thì số điểm mà tất cả các đội thu được cũng là một số chẵn, do đó không có chuyện mọi đội đều có số điểm lẻ được, do số đội là 15 đội là một số lẻ. Như vậy phải có một đội ghi được số điểm chẵn.

Bài toán 3.0.45. *A và B tiến hành trò chơi với 2013 hạt đậu. Một nước đi là lấy khỏi đống hạt đậu 1, 2 hoặc 3 hạt đậu. A đi trước và thay phiên nhau. Người nào lấy được hạt đậu cuối cùng là người chiến thắng. Vậy người nào có chiến thuật để luôn thắng trong cuộc chơi và chiến thuật đó như thế nào?*

Lời giải. A luôn luôn thắng nếu A thực hiện chiến thuật sau: khởi đầu A lấy 1 hạt đậu, nước tiếp theo A sẽ lấy đi $4 - x$ hạt, ở đây x là số hạt đậu B đã lấy ở nước đi trước đó. Thậy vậy, sau khi A đi lần đầu tiên, còn lại 2012 hạt đậu. Tiếp theo, theo chiến thuật trên thì sau mỗi lần B rồi đến A đi, đống hạt đậu luôn còn lại số hạt bằng bội số của 4. Do vậy, cuối cùng đến lượt B thì còn lại 4 hạt. Dù B thực hiện cách nào thì A cũng đi được nước cuối sẽ lấy đi hết số hạt đậu và A thắng cuộc.

Bài toán 3.0.46. *Trong một chiếc hộp có đựng 15 quả cầu xanh, và trong một hộp khác có 12 quả cầu trắng. Hai người chơi, trong một lượt đi, họ buộc phải lấy đi 3 quả cầu xanh hoặc 2 quả cầu trắng. Người thứ nhất phải chơi như thế nào thì mới thắng cuộc?*

Lời giải. Ta nhận thấy rằng, điểm bất biến ở bài toán nay chính là tỉ lệ $3 : 2$ giữa các quả cầu xanh và quả cầu trắng. Như vậy, với lượt chơi đầu tiên, người chơi thứ nhất sẽ lấy đi 2 quả cầu trắng và lúc đó tỉ lệ giữa quả cầu xanh và quả cầu trắng là $15 : 10 = 3 : 2$, ở các bước tiếp theo chỉ cần lấy ngược lại người thứ hai thì người thứ nhất sẽ thắng, đảm bảo sự bất biến của tỉ lệ 3 : 2 đến cuối cuộc chơi.

Bài toán 3.0.47. *Hai người chơi một trò chơi với hai đống kẹo. Đống kẹo thứ nhất có 12 cái và đống kẹo thứ 2 có 13 cái. Mỗi người chơi được lấy hai cái kẹo hoặc chuyển một cái kẹo từ đống thứ nhất sang đống thứ hai. Người chơi nào không thể làm được những thao tác trên coi như là thua. Hãy chứng minh rằng người chơi đi lượt thứ hai không thể thua. Người đó có thể thắng không?*

Lời giải. Ta kí hiệu S là giá trị tuyệt đối của đống kẹo thứ hai trừ đi đống kẹo thứ nhất. Khởi đầu $S = |13 - 12| = 1$. Sau mỗi lần chơi S sẽ giảm hoặc tăng lên 2. Như vậy, số dư của S chia cho 4 có dạng $1, 3, 1, 3, \ldots$ Mỗi lần sau khi người thứ nhất chơi số dư của S chia cho 4 luôn luôn dư 3. Ta thấy rằng người chơi bị thua khi và chỉ khi không còn cái kẹo nào ở đống thứ nhất và chỉ còn một cái kẹo ở đống thứ hai, khi đó $S = |1 - 0| = 1$. Do đó người chơi thứ hai luôn thực hiện được cách chơi, do đó người đó không thua. Ta thấy rằng, hoặc là tổng số kẹo ở hai đống giảm đi hoặc là số kẹo ở đống thứ nhất giảm đi, như vậy trò chơi phải có kết thúc, do đó người chơi thứ hai phải thắng.

Bài toán 3.0.48. *Hai người chơi thay phiên nhau viết liên tiếp các chữ số để cuối cùng ta có một con số có 10 chữ số, theo quy định: Người thứ nhất viết chữ số thứ nhất, người thứ hai viết chữ số thứ hai, lại người thứ nhất viết chữ số thứ ba, ... Người thứ hai muốn có một số chia hết cho 7, còn người thứ nhất chống lại ý muốn này. Vậy ai và chơi thế nào để đạt được ý muốn của mình?*

Lời giải. Người thứ hai là viết số cuối cùng để quyết định kết quả số ấy có chia hết cho 7 không. Khi người thứ nhất viết chữ số cuối cùng của mình thì người thứ hai nhận được một số có 9 chữ số. Để tìm số thứ mười, người thứ hai thêm số 0 vào số đó, sau đó đem chia cho 7, kết quả thu được sau phép chia có số dư là r, thì số cần viết thêm vào của người thứ hai là $7 - r$. Đây cũng là chiến thuật người đi sau luôn luôn thắng.

Bài toán 3.0.49. *Có một bàn vuông với số ô vuông trên các cạnh là lẻ. Hai người chơi lần lượt đặt những đồng xu vào các ô vuông của bàn. Người chơi nào không còn chỗ để đặt đồng xu coi như là thua trận. Hãy chỉ ra rằng người chơi thứ nhất có thể luôn chiến thắng.*

Lời giải. Ta nhận thấy rằng, đại lượng bất biến ở đây là ô vuông tâm bàn (do số ô vuông là lẻ nên ô vuông tại tâm này luôn tồn tại). Từ gợi ý đó, cho ta được chiến thuật thắng của người chơi thứ nhất là: đặt đồng xu đầu tiên vào ô vuông tại tâm bàn, các nước đi còn lại thì đặt đồng xu đối xứng với đồng xu mà người thứ hai đặt qua đồng xu ở tâm bàn. Vì diện tích của mặt bàn còn trống giảm, trò chơi phải kết thúc. Như vậy, người chơi thứ nhất sẽ thắng.

Kết luận

Bất biến là một phương pháp được sử dụng nhiều trong giải toán sơ cấp, từ những bài toán số học, hình học đến tổ hợp. Tuy vậy cho đến nay ở Việt Nam chưa có một tài liệu nào tổng kết, phân loại các bài toán mà phương pháp giải là dùng bất biến. Tác giả luận văn cũng chưa biết tài liệu nước ngoài nào chuyên dành để trình bày phương pháp dùng bất biến. Vì thế, luận văn đã đặt ra và hoàn thành một số việc sau:

- Giới thiệu chung về phương pháp sử dụng bất biến trong việc giải toán sơ cấp.

- Tổng kết, phân loại các bài toán mà lời giải cần dùng phương pháp bất biến.

- Sưu tầm (chủ yếu từ các kỳ thi Olympic quốc gia, quốc tế và của một số nước) mà trong đó bất biến được sử dụng như một công cụ chủ yếu.

Luận văn có thể giúp ích cho học sinh và giáo viên trong việc tìm hiểu một phương pháp hiệu quả để giải nhiều bài toán sơ cấp. Việc sưu tầm, phân loại đòi hỏi nhiều công sức và thời gian. Bản luận văn này cũng chỉ mới là kết quả bước đầu, và tác giả sẽ cố gắng hoàn chỉnh để có được một chuyên đề với nội dung phong phú.

Tài liệu tham khảo

[1] Lê Trần Chính, Nguyễn Quý Di, Nguyễn Văn Lộc, Vũ Văn Thảo (2002),*Tuyển tập 200 bài thi vô định toán (Số học và đại số)*, NXB Giáo Dục.

[2] Nguyễn Hữu Điển (2004), *Giải toán bằng phương pháp đại lượng bất biến*, NXB Giáo Dục.

[3] Toán học và tuổi trẻ (1997-2004), NXB Giáo Dục.

[4] Tủ sách toán học và tuổi trẻ (2007), *Các bài thi Olympic toán trung học phổ thông Việt Nam (1990-2006)*, NXB Giáo Dục.

[5] Tuyển tập các đề thi Olympic toán quốc gia, quốc tế (1995-2010).

[6] Agakhanov. N (2007), *Olypic Toán toàn nước Nga*, NXB MCCME.

[7] Kvant (Tạp chí toán học cho nhà trường phổ thông của Liên Xô cũ và ngày nay là Liên bang Nga, năm 1970-2002).

[8] McEliece. R. J, Ash. R. B, Ash. C (1989), *Introduction to Discrete Mathematics*, McGraw-Hill Book Co.

[9] Schen. A (2007), *Trò chơi và chiến thuật dưới quan điểm toán học*, NXB MCCME.