CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

Chuyên Đề: ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÍ LAGRANG

I. **Lý thuyết**:

1. ***Định lí Lagrang***: Cho hàm số y=f(x) liên tục trên [a;b] và khả vi trên (a;b), khi đó tồm tại số thực $c\in(a;b)$: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Hệ quả 1:*Nếu hàm số y=f(x) liên tụa trên [a;b] , khả vi trên (a;b) và f(a)=f(b) thì Pt: f'(x)=0 có ít nhất một nghiệm trên (a;b)*

Hệ quả 2:*Cho hàm số y=f(x) có đạo hàm đến cấp n. .Nếu pt* $f^{(n)}(x)=0$ *có k nghiệm thì Pt* $f^{(n-1)}(x)=0$ *có nhiều nhất (k+1) nghiệm*

II. **Các ứng dụng:**

1.Ứng dụng đ/l Lagrang để giải pt:

Phương pháp: Để giải pt f(x)=0 ta sử dụng hệ quả 2 chứng minh số nghiệm nhiều nhất của pt có thể có được, sau đó ta chỉ ra được các nghiệm của pt

Bài 1: Giải pt: $2003^x+2005^x=4006x+2$ (***HSG Nghệ an 2005)***

Giải: Xét hàm số : $f(x)=2003^x+2005^x-4006x-2$

Ta có: $f'(x)=2003^x\ln 2003+2005^x\ln 2005-4006$

$f''(x)=2003^x\ln^2 2003+2005^x\ln^2 2005>0\ \ \forall x\ \Rightarrow f''(x)=0$ vô nghiệm

$\Rightarrow$ f'(x)=0 có nhiều nhất là một nghiệm $\Rightarrow$ f(x)=0 có nhiều nhất là hai nghiệm

Mà ta thấy f(1)=f(0)=0 nên pt đã cho có hai nghiệm x=0 và x=1

Bài 2: Giải pt: $3^{\cos x}=2^{\cos x}+\cos x$

Giải: Đặt t=cosx; $t\in[-1;1]$ khi đó pt trở thành: $3^t=2^t+t\Leftrightarrow 3^t-2^t-t=0$**,** ta thấy pt này có hai nghiệm t=0 và t=1 ta sẽ c/m đó là số nghiệm nhiều nhất mà pt có thể có:

Xét hàm số: $f(t)=3^t-2^t-t$ với $t\in[-1;1]$ ta có $f'(t)=3^t\ln 3-2^t\ln 2-1$

$f''(x)=3^t\ln^2 3-2^t\ln^2 2>0\Rightarrow$ f'(x)=0 có nhiều nhất 1 nghiệm nên f(x) =0 có nhiều nhất hai nghiệm từ đó ta có đpcm

Vậy pt có hai họ nghiệm: $x=k2\pi$; $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

Bài 3: Giải pt: $3^x=1+x+\log_3(1+2x)$ (***TH&TT)***

Giải: Đk: x>-1/2

$pt\Leftrightarrow 3^x+x=1+2x+\log_3(1+2x)\Leftrightarrow 3^x+\log_3 3^x=1+2x+\log_3(1+2x)$ (1)

Xét hàm số: $f(t)=t+\log_3 t$ ta có f(t) là hàm đồng biến nên

$(1)\Leftrightarrow f(3^x)=f(1+2x)\Leftrightarrow 3^x=2x+1\Leftrightarrow 3^x-2x-1=0$ (2)

Xét hàm số: $f(x)=3^x-2x-1\Rightarrow f'(x)=3^x\ln 3-2\Rightarrow f''(x)=3^x\ln^2 3>0$

$\Rightarrow f(x)=0$ có nhiều nhất là hai nghiệm, mà f(0)=f(1)=0 nên pt đã cho có hai nghiệm x=0 và x=1

Bài 4: Giải pt: $5^x+12^x=6^x+11^x$

Giải: $pt \Leftrightarrow 12^x-11^x=6^x-5^x$**.** Giả sử m là nghiệm của pt, xét hàm số $f(t)=t^m-(t-1)^m$ ta có f(12)=f(6) nên theo hệ quả 1 thì tồn tại $c\in(6;12)$: f'(c)=0 hay $mc^{m-1}-m(c-1)^{m-1}=0 \Leftrightarrow m[c^{m-1}-(c-1)^{m-1}]=0 \Leftrightarrow m=0,\ m=1$

Thử lại ta thấy thoả mãn. Vậy x=0 và x=1 là nghiệm của pt

Bài Tập: Giải các pt sau

1. $3^x+5^x=2.4^x$
2. $(1+x)(2+4^x)=3.4^x$
3. $9^x+3^x=(2x+1)2^{x+1}$
4. $4^{x^2}+2^x=3^{x^2}+3^x$

<u>2.Ứng dụng định lí Lagrang để cm pt có nghiệm</u>:

<u>*Phương pháp*</u>*:*Để cm pt f(x)=0 có nghiệm trên (a;b) ta đi xét hàm F(x) có tính chất :thỏa mãn các điều kiện đ/l Lagrang , F'(x)=f(x) sau đó ta cm hàm F(x) thỏa mãn đk của *Hệ quả 1* từ đó ta có điều phải chứng minh

Bài 1: Cho các số thực a,b,c thỏa mãn đk: $\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$. Cmr $b^2\geq 4ac\,(1)$

Giải: Ta có (1) chính là điều kiện cần và đủ để pt: $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm nên ta chuyển việc cm (1) về cm pt $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm

* Nếu a=0 thì (1) luôn đúng

* Nếu $a\neq 0$. Xét hàm số $f(x)=a\frac{x^{m+2}}{m+2}+b\frac{x^{m+1}}{m+1}+c\frac{x^m}{m}$ ta thấy f(x) có đạo hàm trên R và f(1)= $\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$ =f(0) nên theo hệ quả 1 thì pt f'(x)=0 có nghiệm (0;1) hay pt: $ax^{m+1}+bx^m+cx^{m-1}=0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c=0$ có nghiệm trên (0;1) từ đó ta có đpcm

Bài 2: Cho các số thực a,b,c và số nguyên n>0 thoả mãn: 5c(n+2)+6(a+b)=0. Cmr pt $a.\sin^n x+b.\cos^n x+c.\sin x+c=0$ luôn có n_o trên $(0;\frac{\pi}{2})$ ***(HSG Nghệ an 2004)***

Giải: Ta có: $gt \Leftrightarrow \frac{a}{n+2}+\frac{5c}{6}=-\frac{b}{n+2}$ (*)

Xét hàm số $f(x)=a\frac{\sin^{n+2}x}{n+2}-b\frac{\cos^{n+2}x}{n+2}+c\frac{\sin^3 x}{3}+c\frac{\sin^2 x}{2}$ trên $[0;\frac{\pi}{2}]$ ta thấy f(x) thoả mãn đk đ/l Lagrang trên $[0;\frac{\pi}{2}]$. Mặt khác ta lại có: $f(0)=-\frac{b}{n+2}$; $f(\frac{\pi}{2})=\frac{a}{n+2}+\frac{5c}{6}$

$\Rightarrow f(0)=f(\frac{\pi}{2})$ (do (*)). Theo đ/l Lagrang thì pt f'(x) có nghiệm trên $(0;\frac{\pi}{2})$

hay pt: $a.\sin^{n+1}x.\cos x+\cos^{n+1}x\sin x+c.\sin^2x.\cos x+c.\sin x.\cos x=0$

$\Leftrightarrow \sin x.\cos x(a\sin^n x+b.\cos^n x+c\sin x+c)=0 \Leftrightarrow a.\sin^n x+b.\cos^n x+c.\sin x+c=0$ (vì sinx, cosx >0 trên $(0;\frac{\pi}{2})$) có nghiệm trên $(0;\frac{\pi}{2})$ (đpcm)

Bài 3: Cho các số thực $a_1,a_2,...,a_n$ thỏa mãn: $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+...+\frac{a_n}{n+1}=0$ và $a_0+\frac{a_1k}{2}+\frac{a_2k^2}{3}+...+\frac{a_nk^n}{n+1}=0$ với k >0. Cmr pt sau luôn có nghiệm $a_1+2a_2x+...+na_nx^n=0$

Giải: Xét hàm số $f(x)=a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\frac{a_2x^3}{3}+...+\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}$ ta có f(0)=f(1)=f(k)=0

Nên theo hệ quả 1 thì pt: $f'(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2 \Rightarrow f'(x_1)=f'(x_2)=0 \Rightarrow$ Pt $f''(x)=a_1+2a_2x+....+na_nx^{n-1}=0$ có nghiệm

Bài 4: Pt: $a\sin x+p^2b\sin px+q^2c\sin qx=0$ (với p,q là các số nguyên dương lẻ) có ít nhất bao nhiêu nghiệm trên $[0;2\pi]$?

Giải: Xét pt: f(x)= asinx+bsinpx+csinqx=0 . $f(0)=f(\pi)=f(2\pi)$ nên pt $f'(x)=a\cos x+pb.\cos px+qc.\cos qx=0$ có 2 n_0 x_1,x_2 : $0<x_1<\pi<x_2<2\pi$

Vì p,q là các số nguyên dương lẻ nên ta có : $f'(\frac{\pi}{2})=0 \Rightarrow f'(x_1)=f'(x_2)=f'(\frac{\pi}{2})=0$

$\Rightarrow$ pt f''(x)= $a\sin x+p^2b\sin px+q^2c\sin qx=0$ có 2 n_0 y_1,y_2 :

$\text{Min}\{x_1,\frac{\pi}{2}\}<y_1<\text{Max}\{x_1,\frac{\pi}{2}\}<y_2<x_2$, Hơn nữa $f''(0)=f''(\pi)=0$

Vậy pt: f''(x)=0 có ít nhất 4 nghiệm trên $[0;2\pi]$.

CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

3. Ứng dụng đ/l Lagrang để chứng minh Bất Đẳng Thức:

*Phương pháp:** Để c/m Bđt có dạng: $m < \dfrac{f(a) - f(b)}{a-b} < M$ ta xét hàm số y=f(x) thỏa mãn điều kiện đ/l Lagrang trên [a;b], khi đó có $c \in (a;b)$: $f'(c) = \dfrac{f(a) - f(b)}{a-b}$ sau đó ta chứng minh: *m<f'(c)<M*

* Để c/m Bđt có dạng : $m \le f(a) - f(b) \le M$ ta xét hàm số y=f(x) thỏa mãn điều kiện đ/l Lagrang trên [a;b], khi đó có $c \in (a;b)$: $f(a) - f(b) = f'(c)(a-b)$

sau đó ta chứng minh: *m<(a-b)f'(c)<M*

Bài 1: Cho 0<a<b. Cmr: $\dfrac{b-a}{b} < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b-a}{a}$

Giải:Bđt đã cho $\Leftrightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{\ln b - \ln a}{b-a} < \dfrac{1}{a}$

Xét hàm số f(x)=lnx trên [a;b]. Ta thấy f(x) thỏa mãn đk đ/l Lagrang trên [a;b] nên tồn tại số c: a<c<b: $f'(c) = \dfrac{1}{c} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = \dfrac{\ln b - \ln a}{b-a}$. Vì $c \in (a;b) \Rightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{a}$

Do đó ta có $\dfrac{1}{b} < \dfrac{\ln b - \ln a}{b-a} < \dfrac{1}{a}$ đpcm

Bài 2: Cho 0<x<y và m là một số nguyên dương bất kì. Cmr: $y^m < \dfrac{x(x^{m-1} + my^{m-1})}{m+1}$

Giải: Bđt đã cho $\Leftrightarrow \dfrac{y^m - x^m}{y-x} < my^{m-1}$

Xét hàm số $f(t) = t^m$ trên [x;y], ta thấy f(t) thỏa mãn đk đ/l Lagrang trên [x ;y] nên tồn tại số $c \in (x;y)$: $\dfrac{f(y) - f(x)}{y-x} = f'(c) = mc^{m-1} < my^{m-1}$ đpcm

Bài 3: Cmr : $n^{n+1} > (n+1)^n \quad \forall n \ge 3$ ***(ĐH AN NINH 2001)***

Giải: Bđt $\Leftrightarrow (n+1)\ln n > n\ln(n+1) \Leftrightarrow \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} - \dfrac{\ln n}{n} < 0 \Leftrightarrow f(n+1) - f(n) < 0$

Với $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ ta thấy f(x) thỏa mãn đk đ/l Lagrang trên [n;n+1] nên có số c: n<c<n+1

$$f(n+1) - f(n) = f'(c)(n+1-n) = f'(c) = \frac{1 - \ln c}{c^2} < 0 \Rightarrow \text{đpcm}$$

Bài 4: CMR: $\sin e\sqrt[3]{\cos(e-1)} - \sin(e-1)\sqrt[3]{\cos e} > \sqrt[3]{\cos e.\cos(e-1)}$

Giải: Vì cose, cos(e-1)>0 nên Bđt $\Leftrightarrow \dfrac{\sin e}{\sqrt[3]{\cos e}} - \dfrac{\sin(e-1)}{\sqrt[3]{\cos(e-1)}} > 1$

Xét hàm số: $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}$ trên [e-1;e], ta có $f'(x)=\dfrac{2\cos^2 x+1}{3\sqrt[3]{\cos^4 x}}$

Áp dụng đ/l Lagrang thì có số e-1<c<e: $f(e)-f(e-1)=f'(c)$

Mặt khác: $\cos^2 c+\cos^2 c+1\geq 3\sqrt[3]{\cos^4 c}\Rightarrow f'(c)>1\Rightarrow$ đpcm