Một số ứng dụng sai phân để tính tổng

Đinh Công Hướng
Trường Đại học Quy Nhơn

1 Giới thiệu

Bài toán tính tổng, tổng riêng của chuỗi số thường xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Để giải quyết bài toán này, người ta thường sử dụng các phương pháp truyền thống như quy nạp toán học, sử dụng đạo hàm, tích phân, biến đổi đại số, sử dụng các tính chất của số phức,... Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu một phương pháp khác để giải quyết bài toán trên đó là phương pháp sai phân.

2 Một số khái niệm cơ bản và tính chất của sai phân

Định nghĩa 2.1. Ký hiệu $\mathbb{R}$ là tập hợp số thực. Giả sử $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm số cho trước và $h = \text{const} \neq 0$. Ta gọi sai phân cấp 1 của f là đại lượng

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x).$$

Giả sử đã định nghĩa được sai phân cấp $n-1$ của f. Khi đó, sai phân cấp n của f được định nghĩa như sau:

$$\Delta^n f(x) = \Delta[\Delta^{n-1} f(x)] (n \geqslant 1), \Delta^0 f(x) := f(x).$$

Ví dụ 2.2. $\Delta \sin(a+bx) = 2\sin\frac{b}{2}\cos\left(a+\frac{b}{2}+bx\right)$;

$\Delta \cos(a+bx) = -2\sin\frac{b}{2}\sin\left(a+\frac{b}{2}+bx\right)$;

$\Delta x! = xx!$;

$\Delta(a+bx)^{(n)} = bn(a+bx)^{(n-1)}$, đặc biệt $\Delta x^{(n)} = nx^{(n-1)}$;

$\Delta^n \sin(a+bx) = \left(2\sin\frac{b}{2}\right)^n \sin\left(a+bx+\frac{n(b+\pi)}{2}\right)$;

$\Delta^n \cos(a+bx) = \left(2\sin\frac{b}{2}\right)^n \cos\left(a+bx+\frac{n(b+\pi)}{2}\right)$.

Định lý 2.3. *a. Sai phân của hằng số bằng* 0.

b. Sai phân mọi cấp là toán tử tuyến tính.

c. $\Delta^n(x^n) = n!h^n; \Delta^m(x^n) = 0, \quad (m > n)$ *n, m nguyên dương.*

d. Nếu $P(x)$ là đa thức bậc n thì theo công thức Taylor

$$\Delta P := P(x+h) - P(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{h^i}{i!} P^{(i)}(x).$$

e. $f(x+nh) = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i \Delta^i f(x)$.

f. $\Delta^n f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i f(x+(n-i)h)$.

g. Giả sử $f \in C^n[a,b]$ và $(x, x+nh) \subset [a,b]$. Khi đó

$$\frac{\Delta^n f(x)}{h^n} = f^{(n)}(x+\theta nh), \quad \theta \in (0,1).$$

h. $\Delta f_x g_x = f_x \Delta g_x + g_{x+1} \Delta f_x$ *(Công thức sai phân từng phần).*

k. $\sum\limits_{x=m}^{n} \Delta f_x = f_{n+1} - f_m, \quad (m < n)$.

l. Nếu f_x là một đa thức bậc n của x thì nó có thể biểu diễn dưới dạng

$$f_x = f_0 + x^{(1)} \Delta f_0 + \frac{x^{(2)}}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{x^{(3)}}{3!} \Delta^3 f_0 + \cdots + \frac{x^{(n)}}{n!} \Delta^n f_0.$$

Định nghĩa 2.4. Ta gọi

$$x^{(n)} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$

là đa thức giai thừa.

Nhận xét 2.5. Ý tưởng của đa thức giai thừa có thể mở rộng cho trường hợp n không phải là số nguyên dương. Xuất phát từ công thức $x^{(n+1)} = (x-n)x^{(n)}$, ta có $x^{(n)} = \frac{1}{x-n} x^{(n+1)}$ và dùng nó để định nghĩa $x^{(n)}$ với $n = 0, -1, -2, \cdots$.

Định lý 2.6. *a.* $x^{(0)} = 1, x^{(-n)} = \frac{1}{(x+n)^{(n)}}$ *với* $n = 0, -1, -2, \cdots$.

b. $\Delta x^{(n)} = n x^{(n-1)}$ *với* $n = 0, -1, -2, \cdots$.

Định nghĩa 2.7. Đa thức giai thừa tổng quát:

$$x^{(n)} = x(x-h)(x-2h)\cdots(x-(n-1)h).$$

Định lý 2.8. *a.* $\Delta x^{(n)} = n x^{(n-1)} h, \Delta^{-1} x^{(n)} = \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)h}$.

b. $\Delta x^{(-n)} = -nhx^{-(n+1)}$, *trong đó* $x^{(-n)} = \frac{1}{(x+h)(x+2h)\cdots(x+nh)}$.

3 Tính tổng bằng phương pháp sai phân

Trước tiên ta xét bài toán sau: Xác định g_x sao cho $\Delta g_x = f_x$, với f_x là hàm đã biết. Nhận xét rằng, nếu g_x là một lời giải của bài toán trên thì $g_x + C$ với C là hằng số bất kì cũng là lời giải của nó. Trong tài liệu này ta sẽ kí hiệu

$$g_x + C = \Delta^{-1} f_x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ta dễ dàng kiểm tra được các tính chất sau đây của Δ^{-1}.

Định lý 3.1. *a.* $\Delta^{-1}0 = C, \quad C \in \mathbb{R}$.
b. $\Delta^{-1}(f_x \pm g_x) = \Delta^{-1}f_x \pm \Delta^{-1}g_x + C, \quad C \in \mathbb{R}$.
c. $\Delta^{-1}kf_x = k\Delta^{-1}f_x + C, \quad k, C \in \mathbb{R}$.
d. $\Delta^{-1}[f_x\Delta g_x] = f_x g_x - \Delta^{-1}[g_{x+1}\Delta f_x] + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 3.2. a. $\Delta^{-1}a^x = \frac{a^x}{a-1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.
b. $\Delta^{-1}x^{(n)} = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.
c. $\Delta^{-1}(a+bx)^{(n)} = \frac{(a+bx)^{(n+1)}}{b(n+1)} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.
d. $\Delta^{-1}\sin(a+bx) = \frac{-1}{2\sin\frac{b}{2}}\cos\left(a - \frac{b}{2} + bx\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$.
e. $\Delta^{-1}\cos(a+bx) = \frac{1}{2\sin\frac{b}{2}}\sin\left(a - \frac{b}{2} + bx\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$.
f. $\Delta^{-1}(xx!) = x! + C, \quad C \in \mathbb{R}$.
g. $\Delta^{-1}3^x = \frac{3^x}{3-1} + C = \frac{3^x}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.
h. $x^3 - 2x^2 + 7x - 12 \equiv x^{(3)} + x^{(2)} + 6x^{(1)} - 12$.

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}(x^3 - 2x^2 + 7x - 12) &= \Delta^{-1}(x^{(3)} + x^{(2)} + 6x^{(1)} - 12) \\
&= \Delta^{-1}x^{(3)} + \Delta^{-1}x^{(2)} + 6\Delta^{-1}x^{(1)} - 12\Delta^{-1}x^{(0)} \\
&= \frac{x^{(4)}}{4} + \frac{x^{(3)}}{3} + 3x^{(2)} - 12x^{(1)} + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

k.

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}[x(x+1)(x+2)] &= \Delta^{-1}(x+2)^{(3)} \\
&= \frac{(x+2)^{(4)}}{4} + C \\
&= \frac{(x+2)(x+1)(x)(x-1)}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

l. $\Delta^{-1}(x3^x)$.
Đặt $f_x = x, \quad \Delta g_x = 3^x$. Khi đó

$$\Delta f_x = 1, \quad g_x = \Delta^{-1}3^x = \frac{3^x}{2}, \quad g_{x+1} = \frac{3^{x+1}}{2} = \frac{3}{2}3^x.$$

Do đó ta nhận được

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}x3^x &= x \cdot \frac{3^x}{2} - \Delta^{-1}\left[\frac{3}{2}3^x \cdot 1\right] + C \\
&= x \cdot \frac{3^x}{2} - \frac{3}{2}\frac{3^x}{2} + C = 3^x\left[\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right] + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Tiếp theo ta đề cập đến việc tính tổng bằng phương pháp sai phân. Giả sử ta phải tính tổng $\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k$ khi đó ta tìm dãy $\{x_k\}$ sao cho $x_{k+1} - x_k = a_k$. Tức là $\Delta x_k = a_k$. Khi đó ta có

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta x_k = x_n - x_1 = x_k\big|_1^n = \Delta^{-1}a_k\big|_1^n.$$

Ví dụ 3.3. Tính tổng

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1).$$

Ta có $f_x = x(x+1) = (x+1)^{(2)}$.

$$\begin{aligned}
\sum_1^n f_x &= \Delta^{-1}(x+1)^{(2)}|_1^{n+1} \\
&= \frac{(1+x)^{(3)}}{3}|_1^{n+1} = \frac{(n+2)^{(3)}}{3} - \frac{2^{(3)}}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{3}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 3.4. Tính tổng

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

Ta có $f_x = x^2 = x(x-1) + x = x^{(2)} + x^{(1)}$.

$$\begin{aligned}
\sum_1^n f_x &= \Delta^{-1}[x^{(2)} + x^{(1)}]|_1^{n+1} \\
&= [\frac{x^{(3)}}{3} + \frac{x^{(2)}}{2}]|_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{(3)}}{3} + \frac{(n+1)^{(2)}}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 3.5. Tính tổng của n số hạng đầu tiên của chuỗi với số hạng tổng quát là

$$x^3 + 7x.$$

Ta có $f_x = x^3 + 7x = x^{(3)} + 3x^{(2)} + 8x^{(1)}$.

$$\begin{aligned}
\sum_1^n f_x &= \Delta^{-1}[x^{(3)} + 3x^{(2)} + 8x^{(1)}]|_1^{n+1} \\
&= [\frac{x^{(4)}}{4} + x^{(3)} + 4x^{(2)}]|_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{(4)}}{4} + (n+1)^{(3)} + 4(n+1)^{(2)} \\
&= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+14).
\end{aligned}$$

Ví dụ 3.6. Tính tổng

$$S = \sum_{k=1}^n a_k, \quad a_k = \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})} \\
&= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = -\Delta\frac{1}{\sqrt{k}}.
\end{aligned}$$

Do đó

$$S = \sum_{k=1}^n a_k = -\sum_{k=1}^n \Delta\frac{1}{\sqrt{k}} = -\Big(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1\Big) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Ví dụ 3.7. Tính tổng của n số hạng đầu tiên của chuỗi với số hạng tổng quát là

$$\frac{x2^x}{(x+2)!}.$$

Ta phải tìm $g(x)$ sao cho

$$\Delta g(x) = f(x) = \frac{x2^x}{(x+2)!}.$$

Sử dụng định nghĩa sai phân ta có thể giả sử

$$g(x) = \frac{f(x)}{(x+1)!}2^x,$$

trong đó $f(x)$ là một đa thức của x. Từ

$$\Delta g(x) = g(x+1) - g(x) = f(x),$$

ta có

$$\frac{f(x+1)2^{x+1}}{(x+2)!} - \frac{f(x)2^x}{(x+1)!} = \frac{x2^x}{(x+2)!}$$

hay

$$2f(x+1) - (x+2)f(x) = x.$$

Vế phải của phương trình này là tuyến tính. Do đó vế trái phải tuyến tính, nên $f(x)$ phải là hàm hằng. Giả sử $f(x) \equiv k$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(x) &= k \\ f(x+1) &= k \end{aligned}$$

và

$$2k - (x+2)k = x.$$

Từ đó ta có $k = -1 = f(x)$.

Vậy

$$g(x) = \frac{-1 \cdot 2^x}{(x+1)!}.$$

$$\begin{aligned} \sum_1^n f(x) &= \sum_1^n \frac{x2^x}{(x+2)!} \\ &= \Delta^{-1}\frac{x2^x}{(x+2)!}\Big|_1^{n+1} = \frac{-2^x}{(x+1)!}\Big|_1^{n+1} \\ &= 1 - \frac{2^{n+1}}{(x+2)!}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.8. Tính tổng của n số hạng đầu tiên của chuỗi với số hạng tổng quát là $\frac{2x-1}{2^{x-1}}$.

Ta phải tìm $g(x)$ sao cho

$$\Delta g(x) = f(x) = \frac{2x-1}{2^{x-1}}.$$

Giả sử

$$g(x) = \frac{f(x)}{2^{x-1}}.$$

Vì

$$\Delta g(x) = f(x) = \frac{2x-1}{2^{x-1}}$$

nên

$$\frac{f(x+1)}{2^x} - \frac{f(x)}{2^{x-1}} = \frac{f(x)}{2^{x-1}}$$

hay

$$f(x+1) - 2f(x) = 4x - 2.$$

Vế phải của phương trình này là tuyến tính. Do đó vế trái phải tuyến tính, nên $f(x)$ phải có dạng $f(x) = ax + b$, kéo theo $f(x+1) = ax + a + b$. Do đó

$$(ax + a + b) - 2(ax + b) = 4x - 2.$$

Cân bằng hệ số ta nhận được

$$ax - 2ax = 4x, \quad a + b - 2b = -2.$$

Suy ra $a = -4, b = -2$ và $f(x) = -4x - 2$. Từ đó

$$g(x) = \frac{-4x-2}{2^{x-1}} = -\frac{2x+1}{2^{x-2}}.$$

$$\begin{aligned}
\sum_1^n f(x) &= \sum_1^n \frac{2x-1}{2^{x-1}} \\
&= \Delta^{-1}\frac{2x-1}{2^{x-1}}\Big|_1^{n+1} = -\frac{2x+1}{2^{x-2}}\Big|_1^{n+1} \\
&= 6 - \frac{2n+3}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 3.9. Tính tổng của n số hạng đầu tiên của chuỗi với số hạng tổng quát là $(2^x \sin^2 \frac{\theta}{2^x})^2$.

Dễ tính được

$$\Delta^{-1}(2^x \sin^2 \frac{\theta}{2^x})^2 = (2^{x-1} \sin \frac{\theta}{2^{x-1}})^2.$$

Do đó

$$\sum_1^n (2^x \sin^2 \frac{\theta}{2^x})^2 = (2^{x-1} \sin \frac{\theta}{2^{x-1}})^2\Big|_1^{n+1} = 2^{2n} \sin^2 \frac{\theta}{2^n} - \frac{1}{16}\sin^2\theta.$$

Ví dụ 3.10. Tính tổng sau

$$S = 2^1 \sin\frac{2011}{2^1}\left(\sin\frac{2011}{2^{1+1}}\right)^2 + 2^2 \sin\frac{2011}{2^2}\left(\sin\frac{2011}{2^{2+1}}\right)^2 + \cdots + 2^n \sin\frac{2011}{2^n}\left(\sin\frac{2011}{2^{n+1}}\right)^2.$$

Dễ tính được

$$\Delta^{-1} 2^x \sin\frac{2011}{2^x}\left(\sin\frac{2011}{2^{x+1}}\right)^2 = 2^{x-2}\sin\frac{2011}{2^{x-1}}.$$

Do đó

$$S = 2^{x-2}\sin\frac{2011}{2^{x-1}}\Big|_1^{n+1} = 2^{n-1}\sin\frac{2011}{2^n} - \frac{1}{2}\sin 2011.$$

Ví dụ 3.11. Tính tổng sau $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(i+1)(i+2)}$. Ta có $\Delta i^{(-1)} = -\frac{1}{(i+1)(i+2)}$. Do đó

$$S_n = -\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(i+1)(i+2)} = -\sum_{i=0}^{n-1}\Delta i^{(-1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Vì vậy chuỗi có tổng bằng 1.

Ví dụ 3.12. Tính tổng sau $\sum\limits_{i=1}^{n} i^{(n)}\frac{1}{i(i+1)(i+2)}$.

Sử dụng đa thức giai thừa với số mũ âm, ta được

$$\frac{1}{2i(i+1)} - \frac{1}{2(i+1)(i+2)} = \frac{1}{i(i+1)(i+2)}.$$

Do đó tổng trên là

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

và chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} i^{(n)}\frac{1}{i(i+1)(i+2)}$ hội tụ, có tổng bằng $\frac{1}{4}$.

Ví dụ 3.13. Tính tổng

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}.$$

Ta có

$$(x-h)^{(-3)} = \frac{1}{(x-h+h)(x-h+2h)(x-h+3h)} = \frac{1}{x(x+h)(x+2h)}.$$

Với $h = 2$ ta có

$$\sum_{x=1}^{x=2n-1}(x-2)^{(-3)} = \Delta^{-1}(x-2)^{(-3)}\Big|_1^{2n-1} = \frac{(x-2)^{(-2)}}{(-2)2}\Big|_1^{2n-1} = \frac{(2n-1)^{(-2)}}{-4} - \frac{(-1)^{(-2)}}{-4}$$

$$= \left[\frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right] - \left[\frac{-1}{4}\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{12} - \frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}.$$

Ví dụ 3.14. Tính tổng

$$1^2 + 4^2 + 7^2 + \cdots + (3n-2)^2.$$

Ta có $x^{(2)} = x(x-h) = x^2 - xh$ hay $x^{(2)} + hx^{(1)} = x^2$, với $h = 3$.

$$\sum_{x=1}^{x=3n-2} x^2 = \sum_{x=1}^{x=3n-2} (x^{(2)} + x^{(1)}) = \frac{x^{(3)}}{(3\cdot 3)} + \frac{3x^{(2)}}{(2\cdot 3)}\Big|_1^{3n+1}$$

$$= \left[\frac{(3n+1)(3n-2)(3n-5)}{9} + \frac{(3n+1)(3n-2)}{2} - \frac{(-2)(-5)}{9} - \frac{(-2)}{2}\right] = \frac{n(6n^2-3n-1)}{2}.$$

Ví dụ 3.15. Tính tổng

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{n(n+3)}.$$

Tổng đã cho có thể viết dưới dạng

$$\sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x(x+3)}.$$

Trước hết ta để ý rằng

$$\frac{1}{x(x+3)} = \frac{(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)^{(4)}}$$

và tìm các hệ số c_0, c_1, c_2 sao cho

$$(x+1)(x+2) = c_0 + c_1(x+3)^{(1)} + c_2(x+3)^{(2)} = c_0 + c_1(x+3) + c_2(x+3)(x+2).$$

Đồng nhất ta tìm được $c_0 = 2, c_1 = -2, c_2 = 1$. Vì vậy,

$$\frac{1}{x(x+3)} = \frac{2 - 2(x+3) + (x+3)(x+2)}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{2}{x(x+1)(x+2)(x+3)} - \frac{2}{x(x+1)(x+2)} + \frac{1}{x(x+1)}$$

$$= 2(x-1)^{(-4)} - 2(x-1)^{(-3)} + (x-1)^{(-2)}.$$

Mặt khác, ta có

$$\Delta^{-1}\frac{1}{x(x+3)} = \frac{2(x-1)^{(-3)}}{-3} - 2\frac{2(x-1)^{(-2)}}{-2} + \frac{(x-1)^{(-1)}}{-1}.$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x(x+3)} = \left\{\frac{2(x-1)^{(-3)}}{-3} - 2\frac{2(x-1)^{(-2)}}{-2} + \frac{(x-1)^{(-1)}}{-1}\right\}\Big|_1^{n+1}$$

$$= -\frac{2}{3(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n+1} + \frac{2}{3(1)(2)(3)} - \frac{1}{(1)(2)} + \frac{1}{1}$$

$$= \frac{11}{18} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{2}{3(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Tài liệu

[1] Nguyễn Văn Mậu (2005), *Một số ví dụ chọn lọc về dãy số,* NXB Giáo Dục.

[2] Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Thuỷ Thanh (2003), *Giới hạn của dãy số và hàm số*, NXB Giáo Dục.

[3] Nguyễn Văn Mậu (2007), *Chuyên đề Toán rời rạc và một số vấn đề liên quan,* NXB Giáo Dục.

[4] Lê Đình Thịnh và các tác giả khác (2001), *Phương trình sai phân và một số ứng dụng,* NXB Giáo dục.

[5] Nguyễn Trọng Tuấn (2004), *Ví dụ hàm số qua các kỳ thi Olimpic,* NXB Giáo dục.