Chuyên đề 7

Đơn biến và bài toán hội tụ

Nói một cách đơn giản thì đơn biến (monovariant) là đại lượng biến đổi theo một chiều nhất định (tăng hoặc giảm). Cũng như bất biến, đơn biến có vai trò quan trọng trong toán học. Ta sử dụng đơn biến để chứng minh một quá trình nào đó hội tụ (dừng) hay phân kì (không dừng).

7.1 Hàm đơn biến

Cho $A \neq \varnothing$ là không gian các trạng thái và thuật toán $T : A \to A$. Ánh xạ $H : A \to \mathbb{R}$ gọi là hàm đơn biến trên A nếu H thoả mãn một trong hai điều kiện sau:

a) $\forall a, b \in A : b \in \overline{a} \Rightarrow H(b) < H(a)$.

b) $\forall a, b \in A : b \in \overline{a} \Rightarrow H(b) > H(a)$.

(Kí hiệu $\overline{a}$ là tập các trạng thái nhận được từ a sau khi thực hiện thuật toán T hữu hạn lần).

7.2 Bài toán hội tụ và bài toán phân kì

Bài toán hội tụ. Cho thuật toán T trên không gian các trạng thái A và trạng thái ban đầu α. Chứng minh rằng sau hữu hạn lần thực hiện thuật toán T, ta nhận được trạng thái xác định β và không thể thực hiện T thêm nữa (trò chơi dừng lại).

Bài toán phân kì. Cho thuật toán T trên A và trạng thái ban đầu α. Chứng minh rằng ta có thể thực hiện thuật toán T vô hạn lần (trò chơi không dừng).

Để giải các bài toán hội tụ và các bài toán phân kì, ta sử dụng hàm đơn biến. Ta có các định lí sau:

Định lí 1. Nếu tồn tại hàm đơn biến $H : A \to \mathbb{R}$ trên không gian các trạng thái A hữu hạn thì trò chơi dừng lại sau hữu hạn bước.

Định lí 2. Nếu tồn tại hàm đơn biến $H : A \to \mathbb{Z}$ tăng và bị chặn trên thì trò chơi dừng lại sau hữu hạn bước.

Định lí 3. Nếu tồn tại hàm đơn biến $H : A \to \mathbb{Z}$ giảm và bị chặn dưới thì trò chơi dừng lại sau hữu hạn bước.

Xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1. Xét bảng ô vuông $m \times n$ $(m, n \geq 2)$. Trong mỗi ô của bảng ta điền một số thực. Thực hiện thuật toán sau: mỗi lần lấy ra một hàng hoặc một cột có tổng các số nhỏ hơn 0 và đổi dấu tất cả các số trong hàng (hoặc cột) đó. Chứng minh rằng sau hữu hạn bước ta nhận được bảng mà tổng các số trong mỗi hàng và tổng các số trong mỗi cột là số không âm.

Lời giải. Gọi $S(n)$ là tổng tất cả các số trong bảng sau bước thứ n. Ta có, $S(n+1) > S(n), \forall n \geq 0$. Do đó, $S(n)$ là một hàm đơn biến. Mặt khác, số trạng thái có thể nhận được là hữu hạn nên chỉ có thể thực hiện thuật toán hữu hạn lần và ta nhận được bảng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2. Cho một dãy phòng dài vô hạn, được đánh số: $1, 2, 3, \ldots$. Có một số hữu hạn người sống trong dãy phòng. Mỗi ngày có hai người sống ở hai phòng cạnh nhau chuyển sang hai phòng khác theo hai hướng ngược nhau nhưng không được tráo đổi vị trí cho nhau. Chứng minh rằng việc chuyển phòng đó dừng lại sau hữu hạn ngày.

Lời giải. Ta đưa cho mỗi người một chìa khoá, trên đó có ghi số phòng mình đang ở. Gọi $S(n)$ là tích các số viết trên các chìa khoá ở ngày thứ n. Ta có:

$$\frac{S(n+1)}{S(n)} = \frac{k(k+1)}{(k-1)(k+2)} < 1, \forall n \geq 1,$$

trong đó k và $k+1$ là các phòng có người chuyển.
Do đó, $S(n)$ là một đơn biến.
Do $S(n)$ giảm và $S(n) \in \mathbb{N}^*$ nên việc chuyển phòng phải dừng lại sau hữu hạn ngày.

Định lí 1. Nếu tồn tại hàm đơn biến $H : A \to \mathbb{R}$ trên không gian các trạng thái A hữu hạn thì trò chơi dừng lại sau hữu hạn bước.

Định lí 2. Nếu tồn tại hàm đơn biến $H : A \to \mathbb{Z}$ tăng và bị chặn trên thì trò chơi dừng lại sau hữu hạn bước.

Định lí 3. Nếu tồn tại hàm đơn biến $H : A \to \mathbb{Z}$ giảm và bị chặn dưới thì trò chơi dừng lại sau hữu hạn bước.

Xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1. Xét bảng ô vuông $m \times n$ $(m, n \geq 2)$. Trong mỗi ô của bảng ta điền một số thực. Thực hiện thuật toán sau: mỗi lần lấy ra một hàng hoặc một cột có tổng các số nhỏ hơn 0 và đổi dấu tất cả các số trong hàng (hoặc cột) đó. Chứng minh rằng sau hữu hạn bước ta nhận được bảng mà tổng các số trong mỗi hàng và tổng các số trong mỗi cột là số không âm.

Lời giải. Gọi $S(n)$ là tổng tất cả các số trong bảng sau bước thứ n. Ta có, $S(n+1) > S(n), \forall n \geq 0$. Do đó, $S(n)$ là một hàm đơn biến. Mặt khác, số trạng thái có thể nhận được là hữu hạn nên chỉ có thể thực hiện thuật toán hữu hạn lần và ta nhận được bảng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2. Cho một dãy phòng dài vô hạn, được đánh số: $1, 2, 3, \ldots$. Có một số hữu hạn người sống trong dãy phòng. Mỗi ngày có hai người sống ở hai phòng cạnh nhau chuyển sang hai phòng khác theo hai hướng ngược nhau nhưng không được tráo đổi vị trí cho nhau. Chứng minh rằng việc chuyển phòng đó dừng lại sau hữu hạn ngày.

Lời giải. Ta đưa cho mỗi người một chìa khoá, trên đó có ghi số phòng mình đang ở. Gọi $S(n)$ là tích các số viết trên các chìa khoá ở ngày thứ n. Ta có:

$$\frac{S(n+1)}{S(n)} = \frac{k(k+1)}{(k-1)(k+2)} < 1, \forall n \geq 1,$$

trong đó k và $k+1$ là các phòng có người chuyển.
Do đó, $S(n)$ là một đơn biến.
Do $S(n)$ giảm và $S(n) \in \mathbb{N}^*$ nên việc chuyển phòng phải dừng lại sau hữu hạn ngày.

7.3 Bài tập

7.3.1 Bài tập luyện tập

1. Trên mặt phẳng cho một số điểm đỏ và một số điểm xanh. Một số cặp điểm trong chúng được nối với nhau. Một điểm được gọi là kì dị nếu có quá nửa số đoạn thẳng xuất phát từ điểm này và có đầu mút còn lại khác màu với nó. Thực hiện thuật toán sau: mỗi lần chọn ra một điểm kì dị và đổi màu nó. Chứng minh rằng sau hữu hạn bước sẽ không còn điểm kì dị nào.

2. Trong một quốc hội, mỗi nghị sĩ có không quá ba đối thủ (nếu A là đối thủ của B thì B cũng là đối thủ của A). Chứng minh rằng ta có thể chia quốc hội thành hai viện sao cho mỗi nghị sĩ có không quá một đối thủ trong cùng viện.

3. Tại mỗi đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n \geq 3)$ của đa giác đều $A_1A_2...A_n$ ta viết một số thực. Thực hiện thuật toán sau: Nếu bốn số a, b, c, d đứng ở bốn đỉnh liên tiếp $A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3} (1 \leq i \leq n)$ thỏa mãn $(a-d)(b-c) < 0$ thì ta đổi chỗ b và c cho nhau. Chứng minh rằng thuật toán chỉ có thể thực hiện hữu hạn lần.

   (Quy ước A_{n+k} là A_k với $1 \leq k \leq 2$)

4. Ban đầu ta có bộ số $B_0 = (1, 2, 3, 4)$. Thực hiện trò chơi sau, nếu ta có bộ số $B = (x, y, z, t)$ thì thay bởi bộ $T(B) = (x-y, y-z, z-t, t-x)$. Chứng minh rằng sau một số bước ta nhận được bộ số (x, y, z, t) mà

$$|x| + |y| + |z| + |t| \geq 2009.$$

5. Ban đầu ta có bộ số (a, b, c, d), trong đó a, b, c, d là các số nguyên đôi một khác nhau. Thực hiện thuật toán sau: Nếu có bộ số $B = (x, y, z, t)$ với x, y, z, t nguyên thì được phép thay thế bởi bộ số

$$T(B) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+t}{2}, \frac{t+x}{2}\right).$$

   Chứng minh rằng việc thực hiện thuật toán trên sẽ phải dừng lại sau hữu hạn bước.

7.3.2 Bài tập tự giải

1. Cho dãy số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \geq 2)$. Thực hiện thuật toán sau: Mỗi lần lấy ra hai số a, b ở hai vị trí liên tiếp sao cho b không chia hết cho a và thay a bởi ước số chung lớn nhất của a và b, thay b bởi bội số chung nhỏ nhất của a và b. Chứng minh rằng sau hữu hạn bước ta nhận được dãy mới mà số hạng đứng sau chia hết cho số hạng đứng trước.

2. Trong một cuộc họp có $2n$ người $(n \geq 1)$, mỗi người quen không ít hơn n người khác. Chứng minh rằng có thể xếp $2n$ người đó vào một bàn tròn sao cho hai người ngồi kề nhau thì quen nhau.

3. Trên mặt phẳng cho $2n$ điểm $(n \geq 1)$, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Tô màu n điểm màu đỏ và n điểm màu xanh. Chứng minh rằng có thể nối các điểm đỏ với các điểm xanh bởi n đoạn thẳng sao cho không có hai đoạn nào giao nhau.

4. Có n học sinh đứng thành một vòng tròn. Giả sử mỗi em có một số kẹo sao cho số kẹo của các em không bằng nhau tất cả. Thực hiện trò chơi sau: Sau mỗi hiệu lệnh của người chỉ huy, mỗi em đều lấy một nửa số kẹo của mình đang có và đưa cho bạn bên cạnh, tính theo chiều kim đồng hồ. Nếu em nào có một số lẻ chiếc kẹo thì được nhận thêm một chiếc trước khi chia. Chứng minh rằng sau một số lần thực hiện trò chơi thì số kẹo của tất cả các em bằng nhau.

5. Cho bộ 4 số dương (a, b, c, d) không đồng thời bằng nhau. Thực hiện thuật toán sau: Nếu có bộ số $B = (x, y, z, t)$ thì thay bằng bộ số
$T(B) = (xy, yz, zt, tx)$. Chứng minh rằng không bao giờ ta gặp lại bộ số (a, b, c, d) đã cho hoặc bất kì một hoán vị nào của bộ số này.

6. Xét bộ n số $(x_1, x_2, ..., x_n)$, trong đó n có dạng 2^k với $k \in \mathbb{N}^*$ và $x_i \in \{1; -1\}, \forall i = \overline{1, n}$. Thực hiện thuật toán sau: Nếu có bộ số $B = (a_1, a_2, ..., a_n)$ thì thay bằng bộ số $T(B) = (a_1a_2, a_2a_3, ..., a_na_1)$. Chứng minh rằng sau hữu hạn bước ta nhận được bộ $C = (1, 1, ..., 1)$.

7. Tại mỗi đỉnh của ngũ giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5$ ta một số thực sao cho tổng các số được viết là một số dương. Thực hiện thuật toán sau: Nếu ba số x, y, z ở ba đỉnh liên tiếp mà $y < 0$ thì thay bộ ba (x, y, z) bởi bộ ba $(x + y, -y, y + z)$. Chứng minh rằng việc thực hiện thuật toán trên sẽ phải dừng lại sau hữu hạn bước.

7.4 Hướng dẫn giải bài tập

1. Gọi S_n là số đoạn thẳng được nối bởi hai điểm khác màu sau bước thứ n. Ta có: $S_{n+1} < S_n, \forall n \geq 1$. Do số giá trị mà S_n có thể nhận được là hữu hạn nên không thể thực hiện thuật toán vô hạn lần. Vậy sau hữu hạn bước ta sẽ phải nhận được trạng thái mà không còn điểm kì dị nào.

2. Trước tiên ta chia quốc hội thành hai viện V_1 và V_2 một cách tùy ý. Ta tìm cách chuyển các nghị sĩ sao cho số đối thủ của các nghị sĩ trong cùng một viện giảm đi.

   Xét nghị sĩ A, nếu A có không quá một đối thủ trong cùng viện của mình thì ta để yên còn nếu A có không ít hơn hai đối thủ trong cùng viện của mình thì ta chuyển A sang viện còn lại. Gọi S_n là số cặp đối thủ trong cùng một viện sau lần chuyển thứ n. Do mỗi nghị sĩ có không quá ba đối thủ nên $S_{n+1} < S_n, \forall n \geq 1$. Do số giá trị mà S_n có thể nhận được là hữu hạn nên quá trình chuyển sẽ phải dừng lại sau hữu hạn bước và ta nhận được trạng thái thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. Xét các tổng
$$S_n = a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_na_1,$$
   trong đó $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số được viết tại $A_1, A_2, ..., A_n$ sau bước thứ n.

   Ta có:
$$(a-d)(b-c) < 0 \Leftrightarrow ab + bc + cd < ac + cb + bd.$$
   Suy ra, $S_{n+1} > S_n, \forall n \geq 1$.

   Do số giá trị mà tổng S_n có thể nhận là hữu hạn nên S_n không thể tăng vô hạn lần. Do đó thuật toán phải dừng lại sau hữu hạn bước.

4. Giả sử sau bước thứ n ta nhận được bộ số (a_n, b_n, c_n, d_n). Đặt
$$S_n = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2.$$
   Ta tìm quan hệ giữa S_{n+1} và S_n. Ta có:
$$\begin{aligned} S_{n+1} &= a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 \\ &= (a_n - b_n)^2 + (b_n - c_n)^2 + (c_n - d_n)^2 + (d_n - a_n)^2 \\ &= 2S_n - 2(a_nb_n + b_nc_n + c_nd_n + d_na_n). \end{aligned}$$

Mặt khác, do $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$ nên

$$2(a_nb_n + b_nc_n + c_nd_n + d_na_n) = -(a_n + c_n)^2 - (b_n + d_n)^2 \leq 0.$$

Do đó

$$S_{n+1} \geq 2S_n, \forall n \geq 1.$$

Suy ra

$$S_n \geq 2^{n-1}S_1.$$

Do

$$(|a_n| + |b_n| + |c_n| + |d_n|)^2 \geq a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2.$$

nên

$$|a_n| + |b_n| + |c_n| + |d_n| \geq 2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{S_1}.$$

Với n đủ lớn ta có

$$2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{S_1} \geq 2009.$$

Khi đó

$$|a_n| + |b_n| + |c_n| + |d_n| \geq 2009.$$

5. ***Lời giải 1***. Giả sử trái lại, ta luôn nhận được bộ số với các thành phần là số nguyên. Gọi

$$S_n = \max\left\{|a_n - b_n|, |b_n - c_n|, |c_n - d_n|, |d_n - a_n|, |a_n - c_n|, |b_n - d_n|\right\},$$

trong đó (a_n, b_n, c_n, d_n) là bộ số nhận được sau bước thứ n.

Ta có $S_{n+1} < S_n, \forall n \geq 1$.

Do $S_n \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 1$ nên tồn tại $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho $S_N = 0$. Khi đó ta có

$$a_N = b_N = c_N = d_N.$$

Đặt $a_N = b_N = c_N = d_N = m$, ta có

$$\frac{a_{N-1} + b_{N-1}}{2} = \frac{b_{N-1} + c_{N-1}}{2} = \frac{c_{N-1} + d_{N-1}}{2} = \frac{d_{N-1} + a_{N-1}}{2} = m.$$

Suy ra

$$a_{N-1} = c_{N-1}, b_{N-1} = d_{N-1}.$$

Đặt $a_{N-1} = c_{N-1} = p, b_{N-1} = d_{N-1} = q$, ta có

$$\frac{a_{N-2} + b_{N-2}}{2} = \frac{c_{N-2} + d_{N-2}}{2} = p, \frac{b_{N-2} + c_{N-2}}{2} = \frac{d_{N-2} + a_{N-2}}{2} = q.$$

Suy ra $p = q = \dfrac{a_{N-2} + b_{N-2} + c_{N-2} + d_{N-2}}{2}$. Do đó

$$a_{N-1} = c_{N-1} = b_{N-1} = d_{N-1}.$$

Tiếp tục lập luận như trên ta dẫn tới $a = b = c = d$, vô lí.

Lời giải 2. Giả sử (a_n, b_n, c_n, d_n) là bộ số nhận được sau bước thứ n. Xét tổng

$$S_n = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2.$$

Ta có: $S_{n+1} \leq S_n, \forall n \geq 1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$a_n = b_n = c_n = d_n.$$

Vì S_n không thể giảm mãi nên tồn tại n sao cho $a_n = b_n = c_n = d_n$. Lập luận tương tự như cách giải thứ nhất ta có điều phải Chứng minh.

8.1 Phương pháp truy hồi

Trong nhiều trường hợp, việc đếm trực tiếp các đối tượng là rất khó. Nếu ta thiết lập được mối quan hệ truy hồi giữa số lượng đối tượng cần đếm trong nhóm n đối tượng với số lượng đối tượng cần đếm trong các nhóm ít hơn n đối tượng thì có thể đưa về đếm số đối tượng trong nhóm với số đối tượng nhỏ mà việc đếm trong nhóm đối tượng này không mấy khó khăn.

Ví dụ 1. Trên mặt phẳng cho n đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ $(n \geq 1)$ đôi một không song song và không có ba đường nào đồng quy. Tìm số miền mà n đường thẳng này định ra trên mặt phẳng.

Lời giải. Gọi $S(n)$ là số miền mà n đường thẳng đã cho định ra trên mặt phẳng. Từ giả thiết ta có Δ_n cắt $n-1$ đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{n-1}$ tại $n-1$ điểm. Do đó Δ_n bị $n-1$ đường thẳng còn lại chia thành n phần. Mỗi phần trong số đó sinh ra một miền mới. Do đó $S(n) = S(n-1) + n$. Từ đó ta có $S(n) = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Ví dụ 2. (Bài toán chia kẹo Euler). Cho m và n là các số nguyên dương. Xét phương trình nghiệm nguyên $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$. Hỏi phương trình nói trên có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

Lời giải. Kí hiệu $S(n, m)$ là số nghiệm nguyên không âm của phương trình đã cho. Phương trình đã cho tương đương với $x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} = m - x_n$. Do đó

$$S(n,m) = \sum_{x_n=0}^{m} S(n-1, m-x_n) = \sum_{k=0}^{m} S(n-1;k) \qquad (1).$$

Thay m bởi $m-1$ ta có

$$S(n, m-1) = \sum_{k=0}^{m-1} S(n-1;k) \qquad (2).$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $S(n;m) = S(n;m-1) + S(n-1;m)$. Từ công thức trên và bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$S(n;m) = C_{m+n-1}^{n-1}.$$

8.2 Phương pháp sử dụng song ánh

Ta biết rằng, nếu có song ánh $f : A \to B$ thì $|A| = |B|$. Do đó, thay vì đếm số phần tử của A ta có thể đưa về đếm số phần tử của B.

Ví dụ 1. (Bài toán chia kẹo Euler). Cho m và n là các số nguyên dương. Xét phương trình nghiệm nguyên

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = m.$$

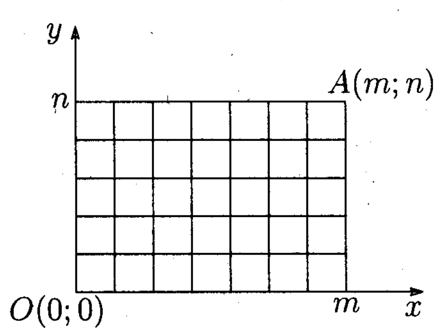
Hỏi phương trình nói trên có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

Lời giải. Gọi X là tập các nghiệm nguyên không âm của phương trình đã cho và Y là tập các sâu nhị phân có độ dài $m + n - 1$, trong đó có m kí tự 1 và $n - 1$ kí tự 0. Xét ánh xạ $f : X \to Y$, cho tương ứng mỗi phần tử $x = (x_1; x_2; ...; x_n) \in X$ với phần tử

$$y = \underbrace{11...1}_{x_1}0\underbrace{11...1}_{x_2}0...0\underbrace{11...1}_{x_n}.$$

Dễ thấy f là song ánh. Do đó $|X| = |Y| = C_{m+n-1}^{n-1}$.

Ví dụ 2. Cho m, n là các số nguyên dương. Xét mạng lưới ô vuông kích thước $n \times m$ như hình vẽ



Hỏi số đường đi ngắn nhất (theo mạng lưới) từ điểm $O(0; 0)$ đến điểm $A(m; n)$ là bao nhiêu?

Lời giải. Mỗi đường đi ngắn nhất (theo mạng lưới) từ O đến A gồm m bước đi ngang và n bước đi lên. Gọi X là tập các đường đi ngắn nhất (theo mạng lưới) từ O đến A và Y là tập các bộ số $(a_1; a_2; ..; a_{m+n}) \in \{0; 1\}^{m+n}$, trong có n toạ độ bằng 1. Xét ánh xạ $T : X \to Y$ cho tương ứng mỗi đường đi $x \in X$

với bộ số $(a_1; a_2; ...; a_{m+n})$, trong đó $a_i = 0$ nếu bước thứ i đi ngang và $a_i = 1$ nếu bước thứ i đi lên. Dễ thấy, T là một song ánh. Do đó $|T| = |Y| = C^n_{m+n}$.

Ví dụ trên đây là định lí cơ bản của một phương pháp rất hiệu quả để giải các bài toán tổ hợp, đó là *phương pháp quỹ đạo.*

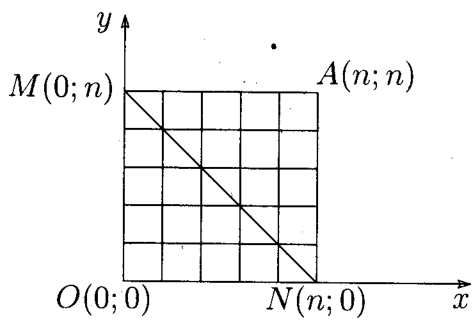
8.3 Phương pháp quỹ đạo

Nội dung của *phương pháp quỹ đạo* là quy bài toán đã cho về việc đếm số đường đi (số quỹ đạo) có một tính chất xác định nào đó.

Ví dụ 1. Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$C^n_{2n} = (C^0_n)^2 + (C^1_n)^2 + ... + (C^n_n)^2.$$

Lời giải. Xét mạng lưới ô vuông $n \times n$. Khi đó số đường đi ngắn nhất từ $O(0; 0)$ đến $A(n; n)$ là C^n_{2n}.



Bây giờ ta đếm số đường đi ngắn nhất từ $O(0; 0)$ đến $A(n; n)$ theo một cách khác. Để đi được từ $O(0; 0)$ đến $A(n; n)$ ta cần đi qua điểm $P(k; n-k)$ trên đường chéo MN, trong đó $M(0; n)$ và $N(n; 0)$. Số đường đi ngắn nhất từ $O(0; 0)$ đến $P(k; n-k)$ là $C^{n-k}_n = C^k_n$. Số đường đi ngắn nhất từ $P(k; n-k)$ đến $A(n; n)$ là C^k_n. Suy ra, số đường đi ngắn nhất từ $O(0; 0)$ đến $A(n; n)$ và đi qua $P(k; n-k)$ là $(C^k_n)^2$. Do đó, số đường đi ngắn nhất từ $O(0; 0)$ đến $A(n; n)$ là

$$(C^0_n)^2 + (C^1_n)^2 + ... + (C^n_n)^2.$$

Từ đó ta có $C^n_{2n} = (C^0_n)^2 + (C^1_n)^2 + ... + (C^n_n)^2$.

Ví dụ 2. Cho $n \geq m > 0$. Có $m + n$ người sắp hàng mua vé, trong đó có n người mang tiền loại 5000 đồng và m người mang tiền loại 10000 đồng. Mỗi vé giá 5000 đồng. Trước lúc bán, người bán vé không có tiền. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp $m+n$ người để không có người nào phải chờ trả tiền thừa?

Lời giải. Giả sử $m+n$ người mua vé đã được sắp hàng theo một cách nào đó. Đặt $\varepsilon_i = 1$ nếu người thứ i có 5000 đồng và $\varepsilon_i = -1$ nếu người thứ i có 10000 đồng. Khi đó, hiệu số giữa số người có tiền 5000 đồng và số người có tiền 10000 đồng khi có k người sắp hàng là $S_k = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i$ Trên mạng lưới ô vuông, vẽ các điểm $A_k = (k; S_k)$. Xét đường gấp khúc nối $O(0;0)$ với $A_{m+n} = (m+n; n-m)$ và đi qua các điểm $A_k, k = 1, 2, ..., m+n-1$. Mỗi đường gấp khúc như vậy ta gọi là một quỹ đạo. Số các quỹ đạo là C_{m+n}^{n}. Dễ thấy, quỹ đạo tương ứng với cách sắp hàng mà không ai phải chờ trả tiền thừa là quỹ đạo không cắt đường thẳng $d: y = -1$. Ta đi đếm số quỹ đạo cắt đường thẳng này. Với mỗi quỹ đạo T cắt đường thẳng $d: y = -1$ (bao gồm cả quỹ đạo có điểm chung với $d: y = -1$), ta xây dựng quỹ đạo T' từ quỹ đạo T theo cách sau: đến giao điểm đầu tiên với $d: y = -1$ ta giữ nguyên phần quỹ đạo T. Phần còn lại, ta lấy đối xứng qua đường thẳng $d: y = -1$. Từ đó, ta đưa việc đếm số quỹ đạo T cắt đường thẳng $d: y = -1$ về đếm số đường gấp khúc nối $O(0;0)$ với $A'_{m+n} = (m+n; m-n-2)$. Giả sử ở đường gấp khúc này có x đoạn hướng lên trên và y đoạn hướng xuống dưới. Ta có

$$x + y = m + n, \quad y - x = n + 2 - m$$

hay $x = m-1, y = n+1$. Do đó, số quỹ đạo cắt đường thẳng $d: y = -1$ là C_{m+n}^{n+1}.
Vậy số cách sắp hàng cần tìm là $S = C_{m+n}^{n} - C_{m+n}^{n+1}$.

8.4 Phương pháp sử dụng đa thức và số phức

Ý tưởng của phương pháp này là đưa việc đếm số tập X có tính chất T nào đó về tính tổng S của các hệ số a_k ứng với các luỹ thừa bậc k có cùng tính chất T' nào đó của một đa thức $f(x)$. Sau đó sử dụng số phức để tính S. Xét ví dụ sau:

Ví dụ. Tìm số tập con A của tập $X = \{1; 2; 3; ...; 2010\}$ sao cho tổng các phần tử của A chia hết cho 5.

Lời giải. Xét đa thức $f(x) = (1+x)(1+x^2)...(1+x^{2010})$. Khai triển đa thức $f(x)$ ta được $f(x) = \sum\limits_{C \subset X} x^{S(C)}$, trong đó $S(C)$ là tổng các phần tử của C.
Do đó, số tập con A của X có tổng các phần tử chia hết cho 5 là tổng các hệ số của các luỹ thừa dạng x^{5k} với $k \in \mathbb{N}$.

Đặt $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$ (ε là một căn bậc 5 của đơn vị). Ta có, với mọi k không chia hết cho 5 thì

$$1 + \varepsilon^k + (\varepsilon^2)^k + (\varepsilon^3)^k + (\varepsilon^4)^k = \frac{1 - (\varepsilon^5)^k}{1 - \varepsilon^k} = 0$$

và nếu k chia hết cho 5 thì

$$1 + \varepsilon^k + (\varepsilon^2)^k + (\varepsilon^3)^k + (\varepsilon^4)^k = 5.$$

Gọi S là số tập con A cần tìm thì

$$S = \frac{1}{5}\left(f(1) + f(\varepsilon) + f(\varepsilon^2) + f(\varepsilon^3) + f(\varepsilon^4)\right).$$

Vì đa thức $g(x) = x^5 - 1$ có các nghiệm là $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$ nên

$$g(x) = (x-1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)(x-\varepsilon^3)(x-\varepsilon^4).$$

Suy ra

$$(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^3)(1+\varepsilon^4)(1+\varepsilon^5) = -g(-1) = 2.$$

Vậy

$$S = \frac{2^{2010} + 4.2^{402}}{5} = \frac{2^{2010} + 2^{404}}{5}.$$

8.5 Bài tập

8.5.1 Bài tập luyện tập

1. Có bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số mà tổng các chữ số của nó là một số chẵn?

2. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số mà tổng các chữ số của nó là bội của 4?

3. Cho n là một số nguyên dương. Xét bảng ô vuông $n \times n$. Hỏi trong bảng đã cho có bao nhiêu hình vuông?

4. (Baltic 1995) Cho tập $X = \{1, 2, 3, ..., 1995\}$. Hỏi có bao nhiêu cách chia tập X thành 3 tập con khác rỗng sao cho trong mỗi tập không có hai phần tử liên tiếp nào?

5. Hình lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ được chia thành 6 tam giác OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, OA_4A_5, OA_5A_6 và OA_6A_1, trong đó O là tâm của lục giác đã cho. Ta tô màu các miền tam giác đều bởi một trong 3 màu: xanh, đỏ, vàng sao cho mỗi hình tam giác đều chỉ được tô bởi một màu và hai miền tam giác đều kề nhau thì có màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu như vậy?

6. Cho n là số nguyên dương. Xét bảng $1 \times n$. Điền vào mỗi ô một trong hai số 0 hoặc 1. Hỏi có bao nhiêu cách điền số sao cho không có hai ô kề nhau nào cùng chứa số 1.

7. Cho n là số nguyên dương. Hỏi từ tập hợp $X = \{3, 4, 5, 6\}$ ta có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số có n chữ số và chia hết cho 3.

8. Có n người xếp thành một hàng dọc ($n \geq 1$). Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra k người sao cho trong số đó không có hai người nào đứng liên tiếp trong hàng?

9. Sử dụng phép đếm, hãy chứng minh đẳng thức sau

$$\sum_{k=1}^{n} k.(C_n^k)^2 = nC_{2n-1}^{n-1}.$$

10. Cho n là số nguyên dương ($n \geq 3$). Kí hiệu

$$\mathbb{Z}_n = \{0; 1; 2; ...; n-1\}.$$

Xét các tập

$$A_n = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{Z}_n,\ a < b < c,\ a+b+c \equiv 0 \pmod{n}\},$$
$$B_n = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{Z}_n,\ a \leq b \leq c,\ a+b+c \equiv 0 \pmod{n}\}.$$

Đặt $a_n = |A_n|,\ b_n = |B_n|$.

a) Tìm mối quan hệ giữa a_n và b_n.

b) Chứng minh rằng $a_{n+3} = b_n$.

c) Tính a_n.

11. (Balkan 1997) Cho m, n là các số nguyên dương ($m, n > 1$). Xét tập X gồm n phần tử và $A_1, A_2, ..., A_m$ là m tập con của X thoả mãn: với mọi $x, y \in X$ ($x \neq y$), tồn tại tập A_k ($1 \leq k \leq m$) sao cho $x \in A_k, y \notin A_k$ hoặc $x \notin A_k, y \in A_k$. Chứng minh rằng $n \leq 2^m$.

12. (IMO 1989) Cho n là số nguyên dương. Một hoán vị $(x_1; x_2; ...; x_{2n})$ của tập $\{1; 2; ...; 2n\}$ được gọi là có tính chất T nếu tồn tại $i \in \{1; 2; ...; 2n-1\}$ sao cho
$$|x_i - x_{i+1}| = n.$$
Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, số các hoán vị có tính chất T lớn hơn số các hoán vị không có tính chất T.

13. Sử dụng phương pháp quỹ đạo, chứng minh đẳng thức
$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + ... + C_{m-1}^{m-1}.$$

14. Trong một lần bầu cử, ứng cử viên A được a phiếu bầu, ứng cử viên B được b phiếu bầu ($a > b$). Cử tri bỏ phiếu liên tiếp. Hỏi có bao nhiêu cách bỏ phiếu để ứng cử viên A luôn dẫn đầu về số phiếu bầu cho mình.

15. (Dựa theo bài thi IMO-95) Cho p là số nguyên tố lẻ và tập $M = \{1, 2, ..., 2p\}$. Với mỗi tập con X của M, kí hiệu $S(X)$ là tổng các phần tử của tập X. Đặt
$$A = \{X \subset M \mid |X| = p\}$$
và
$$A_i = \{X \subset M : \ |X| = p, \ S(X) \equiv i \pmod p\} \ (i = \overline{0, p-1})\}.$$
a) Chứng minh rằng
$$|A_1| = |A_2| = ... = |A_{p-1}| = |A_0| - 2.$$
b) Tìm số tập con C của tập $M = \{1, 2, ..., 2p\}$ sao cho $|C| = p$ và tổng các phần tử của C chia hết cho p.

8.5.2 Bài tập tự giải

1. Xét bộ bài gồm 52 quân. Ta rút ra 13 quân bài từ bộ bài nói trên

   a) Hỏi có bao nhiêu cách?

   b) Hỏi có bao nhiêu cách mà trong 13 quân bài đó có "tứ quý"?

2. Có bao nhiêu cách xếp 8 con xe lên bàn cờ vua sao cho không có con xe nào nằm trên đường chéo chính (đường chéo nối góc trên bên trái và góc dưới bên phải) và không có con nào ăn con nào?

3. (VMO-1996) Cho n số ($n > 4$) đôi một khác nhau $a_1, a_2, ..., a_n$. Hỏi có bao nhiêu hoán vị của n số đó sao cho trong mỗi hoán vị không có ba số nào trong 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 nằm ở ba vị trí liên tiếp.

4. Xét lưới ô vuông $n \times n$ ($n \geq 2$). Ta tô màu các nút lưới bởi một trong hai màu: xanh hoặc đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách tô sao cho mỗi hình vuông đơn vị có hai đỉnh màu đỏ và hai đỉnh màu xanh?

5. Cho m, n là các số nguyên dương. Xét bảng $m \times n$. Điền vào các ô của bảng một trong hai số 0 hoặc 1 sao cho trong mỗi hàng, mỗi cột số số không là một số chẵn. Hỏi có bao nhiêu cách?

6. Cho n đường tròn trên mặt phẳng ($n \geq 1$). Hỏi n đường tròn đó chia mặt phẳng thành nhiều nhất bao nhiêu miền?

7. Cho n nguyên dương. Hỏi có bao nhiêu cách nối $2n$ điểm trên vòng tròn bằng n dây cung không cắt nhau?

8. Gọi a_n là số các xâu nhị phân độ dài n không chứa chuỗi con 010, b_n là số các xâu nhị phân độ dài n không chứa các chuỗi con 0011 và 1100. Chứng minh rằng
$$b_{n+1} = 2a_n.$$

9. Xét tập $X = \{1; 2; 3; ...; 2010\}$. Với mỗi tập con A của X,
$$A = \{a_1; a_2; ...; a_k\},$$
trong đó $a_1 > a_2 > ... > a_k$, ta đặt
$$S(A) = a_1 - a_2 + ... + (-1)^{k-1}a_k.$$
Tính tổng
$$S = \sum_{A \subset X} S(A).$$

10. Với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, kí hiệu S_n là số các hoán vị $(a_1; a_2; ...; a_n)$ của bộ $(1; 2; ...; n)$ sao cho
$$1 \leq |a_k - k| \leq 2, \forall k = \overline{1, n}.$$
a) Tính S_1, S_2, S_3, S_4.

b) Bằng cách lập song ánh, hãy chứng minh rằng

$$S_{n+1} = S_n + S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3} - S_{n-4}, \forall n > 4.$$

c) Chứng minh rằng

$$1,75.S_{n-1} < S_n < 2S_{n-1}, \forall n > 6.$$

11. (VMO-1996) Cho các số nguyên dương k và n với $k \leq n$. Hỏi có bao nhiêu chỉnh hợp $(a_1; a_2; ...; a_k)$ chập k của n số nguyên dương đầu tiên thoả mãn ít nhất một trong hai điều kiện sau:

   a) Tồn tại $s, t \in \{1; 2; ..; k\}$ sao cho $s < t$ và $a_s > a_t$.

   b) Tồn tại $s \in \{1; 2; ..; k\}$ sao cho $a_s - s$ không chia hết cho 2?

12. Có bao nhiêu cách lát bảng $3 \times 2n$ bằng các quân đôminô 1×2?

13. Cho n điểm $A_1A_2...A_n$ trong không gian, trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng $(n \geq 2)$. Mỗi cặp điểm A_i, A_j được nối với nhau bởi một đoạn thẳng. Mỗi đoạn thẳng được tô bởi một trong hai màu: xanh hoặc đỏ. Tìm n lớn nhất sao cho các điều kiện sau được thoả mãn:

   a) Với mỗi $1 \leq i \leq n$, số đoạn thẳng có một đầu mút là A_i được tô màu xanh không vượt quá 4.

   b) Với mỗi đoạn A_iA_j được tô màu đỏ, tồn tại điểm A_k khác A_i, A_j sao cho các đoạn A_kA_i và A_kA_j đều được tô màu xanh.

14. Xét phương trình nghiệm nguyên dương

$$x_1 + x_2 + ... + x_9 = 2009.$$

   Mỗi nghiệm $x = (x_1; x_2; ...; x_9)$ của phương trình trên gọi là nghiệm lẻ nếu $x_1, x_2, ..., x_9$ là các số lẻ. Hỏi phương trình trên có bao nhiêu nghiệm lẻ?

15. Cho $n \geq 2$. Hỏi có bao nhiêu số chia hết cho 5, mỗi số có n chữ số và hai chữ số kề nhau bất kì đều khác nhau?

16. (Rumania -2003). Cho tập $X = \{2; 3; 7; 9\}$ và n là số nguyên dương. Hỏi từ tập X ta có thể lập được bao nhiêu số nguyên dương, mỗi số có n chữ số và chia hết cho 3?

17. Xét tập $X = \{1; 2; 3; ...; n\}$ với $n \geq 4$. Hỏi có bao nhiêu tập con A của X thoả mãn
$$\forall a, b \in A : a - b \notin \{1; 3\}.$$

18. Sử dụng phương pháp quỹ đạo, chứng minh các đẳng thức sau

a) $C_n^0.C_m^k + C_n^1.C_m^{k-1} + ... + C_n^k.C_m^0 = C_{m+n}^k$ $(k \leq m, k \leq n)$.

b) $C_n^m.C_k^0 + C_{n-1}^{m-1}.C_{k+1}^1 + ... + C_{m-n}^0.C_{k+m}^m = C_{n+k+1}^m$.

19. Cho $n \geq m > 0$. Có $m + n$ người sắp hàng mua vé, trong đó có n người mang tiền loại 5000 đồng và m người mang tiền loại 10000 đồng. Mỗi vé giá 5000 đồng. Trước lúc bán, người bán vé có p đồng tiền 5000 đồng. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp $m + n$ người để không có người nào phải chờ trả tiền thừa?

20. Cho x, y là các số nguyên và $x > 0$. Ta gọi *quỹ đạo* nối điểm $O(0; 0)$ với điểm $M(x; y)$ là đường gấp khúc nối các điểm $O(0; 0), A_1(1; S_1), ..., A_x(x; S_x)$, trong đó
$$S_i - S_{i-1} = \varepsilon_i \in \{1; -1\}, \; S_x = y.$$
Kí hiệu $S(x; y)$ là số quỹ đạo nối điểm $O(0; 0)$ với điểm $M(x; y)$. Chứng minh rằng
$$S(x; y) = \begin{cases} C_x^{\frac{x+y}{2}} & \text{nếu } x, y \text{ cùng tính chẵn lẻ,} \\ 0 & \text{nếu } x, y \text{ khác tính chẵn lẻ.} \end{cases}$$

21. Cho A, B là hai điểm nguyên nằm trong góc phần tư thứ nhất. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua trục hoành. Chứng minh rằng số quỹ đạo từ A đến B có điểm chung với trục hoành bằng số quỹ đạo từ A' đến B.

22. Cho $x > 0, y > 0$. Chứng minh rằng số quỹ đạo từ $O(0; 0)$ đến $M(x; y)$ không có đỉnh trên trục hoành (trừ O) bằng $\frac{y}{x}S(x; y)$.

23. Kí hiệu $B_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n$. Chứng minh rằng trong số C_{2n}^n quỹ đạo nối $O(0; 0)$ với $M(2n; 0)$ có

a) B_{n-1} quỹ đạo nằm trên trục hoành và không có điểm chung với trục hoành, trừ các điểm O và M.

b) B_n quỹ đạo không có đỉnh nằm dưới trục hoành.

24. Kí hiệu $B(k,n)$ là số quỹ đạo nối $O(0;0)$ với $M(2n;0)$ có $2k$ cạnh nằm trên trục hoành và $2n-2k$ cạnh còn lại nằm dưới trục hoành. Chứng minh rằng

    a) $B(k,n) = B_n$.

    b) $B(k,n) = B_0.B_{n-1} + B_1.B_{n-2} + ... + B_{n-1}.B_0$.

25. (VMO-2003) Cho các số nguyên dương m, n, p, q với $p < m$, $q < n$. Trên mặt phẳng toạ độ lấy 4 điểm:

$$A(0;0),\ B(p;0),\ C(m;q),\ D(m;n).$$

    Xét các đường đi f ngắn nhất từ A đến D và các đường đi g ngắn nhất từ B đến C. Gọi S là số cặp đường đi $(f;g)$ mà f và g không có điểm chung. Chứng minh rằng

$$S = C_{m+n}^{n}.C_{m+q-p}^{q} - C_{m+q}^{q}.C_{m+n-p}^{n}.$$

26. Cho n, m, k là các số nguyên dương và $n > 2k$. Xét tập $X = \{1;2;3;...;n\}$. Ta gọi tập con A của X gồm k phần tử là một $k-$tập. Xét tập S mà mỗi phần tử của nó là một $k-$tập của X sao cho mọi $k+1-$ tập của X đều chứa đúng m phần tử thuộc S. Sử dụng phép đếm, hãy

    a) Tính $|S|$ theo m, n, k.

    b) Chứng minh S gồm tất cả các $k-$tập của X.

27. Cho n là số nguyên dương và S là tập các điểm nguyên $(x;y)$ trên mặt phẳng toạ độ sao cho $0 \le x \le n$ và $0 \le y \le n$. Gọi T là tập các hình vuông có đỉnh thuộc S. Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, kí hiệu a_k là số cặp điểm trong S mà là đỉnh của đúng k hình vuông thuộc T. Sử dụng phép đếm, hãy chứng minh rằng

$$a_0 = a_2 + 2a_3.$$

28. Tìm số tập con A của tập $X = \{1;2;3;...;2009\}$ sao cho tổng các phần tử của A chia hết cho 7.

29. Cho p là số nguyên tố và tập $M = \{1, 2, ..., m\}$ $(m > 1)$. Tìm số tập con C của tập sao cho $|C| = p$ và tổng các phần tử của C chia hết cho p.

30. Cho p là số nguyên tố lẻ và n là số nguyên dương nguyên tố cùng nhau với p. Hãy tìm số bộ $(a_1;a_2;...;a_{p-1})$, trong đó $a_1, a_2, ..., a_{p-1}$ là các số tự

nhiên không vượt quá $n-1$, sao cho

$$\sum_{k=1}^{p-1} ka_k \equiv 0 \pmod{p}.$$

31. Cho hai số nguyên dương m, n sao cho $n+2$ chia hết cho m. Hãy tính số các bộ ba số nguyên dương $(x; y; z)$, trong đó x, y, z không vượt quá n, sao cho tổng $x+y+z$ chia hết cho m.

32. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng số cách phân tích n thành tổng của các số nguyên dương lẻ bằng số cách phân tích n thành tổng của các số nguyên dương khác nhau.

33. Cho m, n, p là các số nguyên dương sao cho $n+2$ chia hết cho m và $m > p$. Hãy tính số bộ $(x_1; x_2; ...; x_p)$ gồm p số nguyên dương, mỗi số không vượt quá n và tổng $x_1 + x_2 + ... + x_p$ chia hết cho m.

34. (IMO Shortlist - 2007) Cho n là số nguyên dương. Xét tập $X = \{1; 2; ...; n\}$. Tô mỗi phần tử của X bởi một trong hai màu, trong đó p số được tô màu đỏ và q số được tô màu xanh. Hãy tìm số các bộ $(x; y; z) \in X^3$ sao cho x, y, z được tô cùng một màu và $x+y+z$ chia hết cho n.

35. (Viet nam TST - 2008). Cho tập $M = \{1; 2; 3; ...; 2008\}$. Tô mỗi phần tử của M bởi một trong ba màu: xanh, đỏ, vàng sao cho mỗi màu có ít nhất một số được tô. Xét hai tập

$$S_1 = \{(x; y; z) \in M^3\},$$

trong đó $x; y; z$ cùng màu và $x+y+z \equiv 0 \pmod{2008}$,

$$S_2 = \{(x; y; z) \in M^3\},$$

trong đó $x; y; z$ đôi một khác màu và $x+y+z \equiv 0 \pmod{2008}$.

Chứng minh rằng $2|S_1| > |S_2|$.

36. Mỗi đỉnh của một hình cửu giác đều ta tô bởi một trong hai màu: xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng

a) Có ít nhất 10 tam giác có tất cả các đỉnh cùng một màu.

b) Trong số 10 tam giác có tất cả các đỉnh cùng một màu, có ít nhất hai tam giác đồng dạng.

8.6 Hướng dẫn giải bài tập

1. (Sử dụng đa thức). Gọi S là số số có 5 chữ số thoả mãn yêu cầu bài toán. Xét đa thức

$$P(x) = (x + x^2 + ... + x^9)(1 + x + x^2 + ... + x^9)^4.$$

Khai triển $P(x)$ ta được $P(x) = \sum_{k=1}^{45} a_k x^k$. Khi đó

$$S = \sum_{k=1}^{22} a_{2k} = \frac{1}{2}(P(1) + P(-1)) = 45000.$$

2. (Sử dụng đa thức và số phức). Gọi S là số số có 4 chữ số thoả mãn yêu cầu bài toán. Xét đa thức

$$P(x) = (x + x^2 + ... + x^9)(1 + x + x^2 + ... + x^9)^3.$$

Khai triển $P(x)$ ta được

$$P(x) = \sum_{k=1}^{36} a_k x^k.$$

Khi đó

$$S = \sum_{k=1}^{18} a_{4k}$$

Gọi $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4}$ (căn bậc 4 của đơn vị). Ta có

$$S = \frac{1}{4}(P(1) + P(\varepsilon) + P(\varepsilon^2) + P(\varepsilon^3)).$$

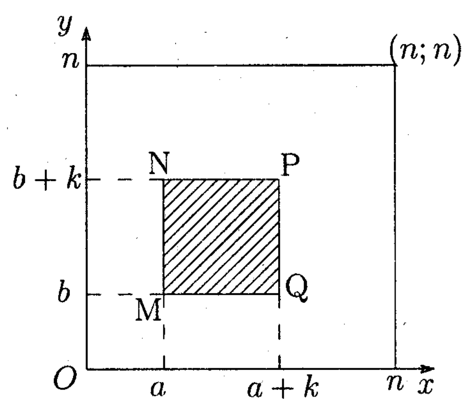
Để ý rằng $\varepsilon^2 = -1$, ta được

$$S = \frac{9.10^3 - 4}{4} = 2249.$$

3. (Phương pháp song ánh). Đây là bài toán khá đơn giản nhưng không ít bạn lúng túng. Gọi T là tập các hình vuông trong bảng, T_k là tập các hình vuông cạnh k trong bảng ($1 \le k \le n$). Ta có: $T_1, T_2, ..., T_n$ đôi một dời nhau và

$$T = T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_n.$$

Do đó
$$|T| = |T_1| + |T_2| + ... + |T_n|.$$
Gắn vào bảng hệ toạ độ như hình vẽ.



Khi đó, mỗi hình vuông $MNPQ$ cạnh k trong bảng tương ứng với cặp số tự nhiên $(a; b) \in A \times B$, trong đó
$$A = \{0; 1; 2; ...; n - k\}, \quad B = \{0; 1; 2; ...; n - k\}.$$
Số hình vuông cạnh k trong bảng là
$$|T_k| = |A \times B| = |A|.|B| = (n - k + 1)^2.$$
Số hình vuông trong bảng đã cho là
$$|T| = \sum_{k=1}^{n} |T_k| = \sum_{k=1}^{n} (n - k + 1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4. Gọi $S(n)$ là số cách chia tập $\{1, 2, ..., n\}$ thành 3 tập thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có: $S(n+1) = 2S(n) + 1, \forall n \geq 3$. Từ đó có
$$S(n) = 2^{n-3}S(3) + (1 + 2 + 2^2 + ...2^{n-4}) = 2^{n-2} - 1.$$
Vậy số cách chia cần tìm là $S(1995) = 2^{1993} - 1$.

5. Ta sử dụng phương pháp truy hồi. Gọi $S(n)$ là số cách tô màu thoả mãn yêu cầu bài toán đối với $n-$giác đều $A_1A_2...A_n$ $(n \geq 3)$. Miền tam giác đều OA_1A_2 có 3 cách tô màu. Với mỗi cách tô màu của miền tam giác OA_1A_2 thì có 2 cách tô màu miền tam giác OA_2A_3. Tương tự, các miền tam giác OA_3A_4, ..., $OA_{n-1}A_n$ cũng có 2 cách tô màu. Trong hai cách tô

màu miền tam giác OA_nA_1 trùng với cách tô màu miền tam giác OA_nA_1 trùng với cách tô màu miền tam giác OA_1A_2 thì số cách tô màu $n$giác là 3.2^{n-1}. Ta đi tính số cách tô màu mà miền tam giác OA_nA_1 cùng màu với miền tam giác OA_1A_2. Dễ thấy, số cách tô màu nói trên là $S(n-1)$. Như vậy ta có

$$S(n) = 3.2^{n-1} - S(n-1).$$

Từ đó ta có

$$S(6) = 66.$$

Bạn đọc hãy nêu và giải bài toán tổng quát với đa giác đều n cạnh và số màu là k.

6. Gọi $S(n)$ là số cách điền số thoả mãn yêu cầu bài toán. Ta đi thiết lập hệ thức truy hồi. Xét cách điền số như hình vẽ

a_1	a_2					a_{n-1}	a_n

Nếu $a_n = 1$ thì $a_{n-1} = 0$. Số cách điền số như vậy là $S(n-2)$.

Nếu $a_n = 0$ thì số cách điền là $S(n-1)$.

Suy ra

$$S(n) = S(n-1) + S(n-2).$$

Từ đó ta có

$$S(n) = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

7. **Cách 1** (Phương pháp truy hồi). Gọi A_n là tập gồm các số có n chữ số và chia hết cho 3, B_n là tập gồm các số có n chữ số và không chia hết cho 3. Đặt $a_n = |A_n|, b_n = |B_n|$. Ta có

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n,\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n.$$

Từ đó ta có $a_n = \dfrac{4^n+2}{3}$.

Cách 2 (Phương pháp sử dụng đa thức và số phức). Gọi $S(n)$ là số các số có n chữ số thoả mãn yêu cầu bài toán.

Xét đa thức
$$f(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n.$$

Khai triển $f(x)$ ta được
$$f(x) = \sum_{k=1}^{6n} a_k x^k.$$

Dễ thấy
$$S(n) = \sum_{k=1}^{2n} a_{3k}.$$

Gọi $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ (căn bậc 3 của đơn vị), ta có
$$S(n) = \frac{1}{3}(f(1) + f(\varepsilon) + f(\varepsilon^2)) = \frac{4^n + 2}{3}.$$

8. Giả sử n người đã cho lần lượt là $A_1, A_2, ..., A_n$ (xếp hàng theo thứ tự đó). Giả sử chọn được k người $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k}$ thoả mãn. Ta có
$$1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n, \quad i_{s+1} - i_s \ge 2, \forall s = \overline{1, k-1}.$$

Đặt X là tập các bộ $(x_1; x_2; ...; x_k)$ thoả mãn $1 \le x_1 < x_2 < ... < x_k \le n$ và $x_{s+1} - x_s \ge 2, \forall s = \overline{1, k-1}$, ta có số cách chọn k người thoả mãn yêu cầu bài toán là $|A|$.

Xét tập
$$Y = \{(y_1; y_2; ...; y_k) : \ 1 \le y_1 < y_2 < ... < y_k \le n - k + 1\}.$$

Ta thiết lập ánh xạ $T : X \to Y$ như sau:

Với mỗi phần tử $x = (x_1; x_2; ...; x_k) \in X$, cho tương ứng với phần tử $(y_1; y_2; ...; y_k) \in Y$, trong đó
$$y_s = x_s - s + 1.$$

Dễ thấy T là một đơn ánh nên $|X| \le |Y|$.

Bây giờ ta xây dựng ánh xạ $S : Y \to X$:

Với mỗi phần tử $(y_1; y_2; ...; y_k) \in Y$, cho tương ứng với phần tử $x = (x_1; x_2; ...; x_k) \in X$, trong đó
$$x_s = y_s + s - 1.$$

Dễ thấy S là một đơn ánh nên $|X| \geq |Y|$.

Vậy

$$|X| = |Y| = C_{n-k+1}^{k}.$$

9. Để chứng minh đẳng thức bằng phương pháp đếm, ta đếm một đối tượng nào đó bằng hai cách khác nhau, cho hai kết quả bằng nhau ta được đẳng thức cần chứng minh.

Xét bài toán: Có n bạn nam và n bạn nữ. Cần chọn ra một nhóm n người, trong đó nhóm trưởng là một bạn nam.

Ta sẽ đếm bằng hai cách khác nhau:

Cách thứ nhất: Trước tiên ta chọn ra nhóm trưởng: Có n cách. Với mỗi cách chọn nhóm trưởng có C_{2n-1}^{n-1} cách chọn $n-1$ thành viên còn lại. Số cách lập nhóm là nC_{2n-1}^{n-1}.

Cách thứ hai: Chọn k bạn nam và trong đó chọn ra một nhóm trưởng: Có $k.C_n^k$ cách. Với mỗi cách chọn k bạn nam, có C_n^{n-k} cách chọn $n-k$ bạn nữ. Số cách lập nhóm là

$$\sum_{k=1}^{n} k.C_n^k.C_n^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k(C_n^k)^2.$$

So sánh hai kết quả trên ta có điều phải chứng minh.

10. a) Đặt

$$\begin{aligned} C_n &= \{(a,b,c): \ a,b,c \in \mathbb{Z}_n, \ a = b \leq c, \ a+b+c \equiv 0 \pmod n\}, \\ D_n &= \{(a,b,c): \ a,b,c \in \mathbb{Z}_n, \ a \leq b = c, \ a+b+c \equiv 0 \pmod n\}. \end{aligned}$$

Ta có

$$|B_n| = |A_n| + |C_n \cup D_n|.$$

Vì $\mathbb{Z}_n$ là hệ thặng dư đầy đủ $\pmod n$ nên mỗi số $y \in \mathbb{Z}_n$, tồn tại duy nhất $x \in \mathbb{Z}_n$ sao cho $x + 2y \equiv 0 \pmod n$. Do đó

$$|C_n \cup D_n| = n.$$

Vậy $b_n = a_n + n$.

b) Ta xây dựng song ánh $h : A_{n+3} \to B_n$ như sau: Xét $(a;b;c) \in A_{n+3}$. Do $a+b+c \equiv 0 \pmod{n+3}$ nên $a+b+c = n+3$ hoặc $a+b+c = 2n+6$.

Nếu $a+b+c=n+3$ và $c \leq n+2$ thì đặt $h((a;b;c)) = (a;b-1;c-2)$.

Nếu $a+b+c=n+3$ và $c=n+2$ thì $a=0, b=1$, ta đặt

$h((0;1;n+2)) = (0;0;0)$.

Nếu $a+b+c=2n+6$ thì $a \geq 1$, ta đặt $h((a;b;c)) = (a-1;b-2;c-3)$.

Dễ dàng kiểm tra ánh xạ h là một song ánh. Do đó, $|A_{n+3}| = |B_n|$ hay $a_{n+3} = b_n$.

c) Từ hai phần trên ta suy ra $a_{n+3} = a_n + n$. Từ đó ta có:

Nếu $n = 3k$ $(k \geq 1)$ thì

$$a_n = \frac{n^2-3n+6}{6}.$$

Nếu $n = 3k+1$ $(k \geq 0)$ thì

$$a_n = \frac{n^2-3n+2}{6}.$$

Nếu $n = 3k+2$ $(k \geq 0)$ thì

$$a_n = \frac{n^2-3n+2}{6}.$$

11. Ta có 2^m là số phần tử của tích Đềcác $Y = \{0;1\}^m$. Thiết lập ánh xạ

$f : X \to Y$ như sau: với mỗi $x \in X$ ta cho tương ứng với

$y = (x_1;x_2;...;x_m)$ sao cho nếu $x \in A_k$ thì $x_k = 1$ và $x \notin A_k$ thì $x_k = 0$. Dễ thấy f là đơn ánh nên $|X| \leq |Y|$, ta có điều phải chứng minh.

12. Gọi A là tập các hoán vị có tính chất T và B là tập các hoán vị không có tính chất T. Để chứng minh $|A| > |B|$ ta chứng minh tồn tại đơn ánh $f : B \to A$ và f không là toàn ánh.

Xét quy tắc $f : B \to A$ xác định như sau:

Với mỗi phần tử $b = (b_1;b_2;...;b_k;...;b_{2n}) \in B$, $|b_{2n} - b_k| = n$ ta cho tương ứng với phần tử $a = (a_1;a_2;...;a_k;...;a_{2n}) \in A$, trong đó

$$\begin{cases} a_i = b_i, \forall i = 1;2;...;k \\ a_i = b_{2n-i+k+1}, \forall i = k+1,...,2n. \end{cases}$$

$$(f : (b_1; b_2; ...; b_k; b_{k+1}; ...; b_{2n}) \mapsto (b_1; b_2; ...; b_k; b_{2n}; ...; b_{k+1}))$$

Dễ thấy f là một đơn ánh. Hơn nữa, phần tử

$$b = (1; n+1; 2; n+2; 3; 4...; n; n+3; n+4; ...; 2n)$$

không có tạo ảnh. Do đó f không là toàn ánh. □

13. Xét các đường gấp khúc ngắn nhất nối điểm $O(0;0)$ với điểm $M(m; n-m)$. Số đường gấp khúc như vậy là C_n^m.

    Với mỗi $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, có C_{n-k-1}^{m-1} đường cắt đường thẳng $x = \dfrac{1}{2}$ tại điểm $P\left(\dfrac{1}{2}; k\right)$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

14. Đặt $\varepsilon_i = 1$ nếu phiếu bầu thứ i bầu cho A, $\varepsilon_i = -1$ nếu phiếu bầu thứ i bầu cho B và $S_k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_k$. Trên mạng lưới ô vuông, xét quỹ đạo đi qua các điểm

    $$O(0;0),\ A_1(1; S_1), ...,\ A_{a+b}(a+b; S_{a+b}).$$

    Mỗi cách bỏ phiếu tương ứng với một quỹ đạo. Mỗi quỹ đạo gồm $a+b$ đoạn thẳng, trong đó có a đoạn hướng lên trên. Tổng số các quỹ đạo là C_{a+b}^a. ứng cử viên A luôn dẫn đầu nếu quỹ đạo tương ứng đi qua $A(1;1)$ và không cắt trục hoành. Số quỹ đạo như vậy là

    $$C_{a+b-1}^{a-1} - C_{a+b-1}^{a} = \frac{a-b}{a+b} C_{a+b}^a.$$

15. a) Để chứng minh $|A_1| = |A_2| = ... = |A_{p-1}| = |A_0| - 2$ ta chứng minh hai đa thức sau có cùng tập nghiệm (nghiệm phức):

    $$f(x) = (|A_0| - 2) + |A_1|x + ... + |A_{p-1}|x^{p-1} \text{ và}$$
    $$g(x) = 1 + x + ... + x^{p-1}.$$

    Dễ thấy, $g(x)$ có $p-1$ nghiệm là ε, ε^2, ..., ε^{p-1}, trong đó $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{p} + i\sin\dfrac{2\pi}{p}$ (căn bậc p của đơn vị).

    Ta chứng minh $f(\varepsilon) = f(\varepsilon^2) = ... = f(\varepsilon^{p-1}) = 0$. Ta có

    $$f(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{p-1} |A_i|.\varepsilon^i = 2 \qquad (1).$$

Vì $\varepsilon^p = 1$ nên nếu $X \in A_i$ thì

$$\varepsilon^{S(X)} = \varepsilon^i.$$

Do đó

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{X\in A} \varepsilon^{S(X)} = 2 \qquad (2).$$

Đẳng thức (2) gợi ý cho ta xét đa thức

$$P(x) = (x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)...(x-\varepsilon^{2p}).$$

Khai triển $f(x)$, ta được

$$P(x) = \sum_{X\subset M} (-1)^{|X|}.\varepsilon^{S(X)}.x^{2p-|X|}.$$

Hệ số của x^p trong khai triển của $P(x)$ là

$$a_p = (-1)^p \sum_{X\in A} \varepsilon^{S(X)}.$$

Mặt khác

$$P(x) = \prod_{k=1}^{p}(x-\varepsilon^k).\prod_{k=1}^{p}(x-\varepsilon^{p+k}) = (x^p-1)^2.$$

Do đó, hệ số của x^p trong khai triển của $P(x)$ là $a_p = -2$. Suy ra

$$(-1)^p \sum_{X\in A} \varepsilon^{S(X)} = -2.$$

Do p lẻ nên ta có

$$\sum_{X\in A} \varepsilon^{S(X)} = 2 \quad .$$

$\square$

b) Số tập con C cần tìm bằng số phần tử của tập A_0. Ta có

$$|A_0| - 2 = \frac{|A_1| + |A_2| + ... + |A_{p-1}| + |A_0| - 2}{p} = \frac{|A|-2}{p}.$$

Vậy

$$|A_0| = 2 + \frac{|A|-2}{p} = 2 + \frac{C_{2p}^p - 2}{p}.$$