BẤT BIẾN VÀ NỬA BẤT BIẾN TRONG CÁC BÀI TOÁN TRÒ CHƠI

Nguyễn Thành Khang[1]

Khi chúng ta xem xét một quá trình có cách thức biến đổi lặp đi lặp lại, chúng ta hãy cố gắng tìm ra một đại lượng *không bao giờ thay đổi* (gọi là **bất biến**).

Các bất biến quen thuộc trong các bài toán thi Olympic là tính chẵn lẻ, phép lấy modulo, lấy tổng, tính đối xứng của các đại lượng, ...

Trong một số bài toán khác, chúng ta chỉ có thể tìm ra các đại lượng *luôn thay đổi theo một hướng xác định* (gọi là **nửa bất biến**). Các đại lượng này cũng khá hữu ích trong các bài toán tổ hợp nói chung và đặc biệt là trong các bài toán trò chơi nói riêng. Bởi lẽ các bài toán trò chơi thường có một vị trí kết thúc, và cần một đại lượng *nửa bất biến* để chúng ta có thể khẳng định trò chơi sẽ đạt đến vị trí kết thúc sau hữu hạn bước.

1 Các bài toán một người chơi

Các bài toán có một người chơi xuất hiện không nhiều trong các kỳ thi Olympic. Các bài toán dạng này thường được giải quyết bằng cách tìm ra một đại lượng *bất biến* hoặc đại lượng *nửa bất biến* và so sánh đại lượng đó ở vị trí ban đầu và vị trí kết thúc.

Bài toán 1. *Có* 2012 *quả cầu màu vàng chứa trong một hộp. Ta giả thiết thêm là có đủ số các quả vàng, đỏ, xanh ở bên ngoài hộp để thực hiện được các động tác sau đây nhiều lần:*

- *Thay hai quả cầu vàng bằng một quả cầu xanh.*
- *Thay hai quả cầu đỏ bằng một quả cầu xanh.*
- *Thay hai quả cầu xanh bằng một quả cầu vàng và một quả cầu đỏ.*
- *Thay một quả cầu vàng và một quả cầu xanh bằng một quả cầu đỏ.*
- *Thay một quả cầu xanh và một quả cầu đỏ bằng một quả cầu vàng.*

(a) *Mỗi nước đi là một lần thực hiện một cách tùy ý một trong năm động tác kể trên. Giả sử rằng sau một số hữu hạn các nước đi, trong hộp đã cho còn lại ba quả cầu. Chứng minh rằng có ít nhất một quả cầu xanh.*

(b) *Có chiến lược nào để sau hữu hạn các nước đi, chỉ còn lại một quả cầu trong hộp?*

Lời giải. Tại thời điểm nào đó, ta giả sử trong hộp có x quả cầu vàng, y quả cầu xanh, z quả cầu đỏ. Ta đặt $T = x + 2y + 3z$. Rõ ràng là, sau mỗi nước đi, T giảm đi một bội của 4 hoặc không đổi. Ở thời điểm ban đầu, $x = 2012$, $y = 0$, $z = 0$ và $T = 2012$.

[1]Sinh viên Đại học Ngoại thương Hà Nội.

(a) Xét thời điểm sau cùng, khi đó, $x+y+z=3$ và T là một bội của 4. Nếu giả sử ngược lại rằng trong số ba quả cầu này không có một quả cầu xanh nào, thì $y=0$, suy ra $x+z=3$, và $T=x+3(3-x)=9-2x$, không thể chia hết cho 4 được.

(b) Giả sử rằng tại thời điểm sau cùng, còn duy nhất một quả cầu trong hộp. Khi đó, $x+y+z=1$ và $T=x+2y+3z$ chia hết cho 4, điều này không thể xảy ra. □

Bài toán 2. *Peter tiến hành chơi một trò chơi với cái cân đĩa như sau: Tại bước thứ n, Peter đặt một quả cân có trọng lượng n^2 lên một trong hai đĩa cân.*

(a) *Chứng minh rằng với mọi $k \in \mathbb{N}$, Peter có thể đặt các quả cân sau hữu hạn bước để chênh lệch tổng khối lượng hai đĩa cân là k.*

(b) *Tìm số bước nhỏ nhất cần thực hiện để chênh lệch tổng khối lượng hai đĩa cân là* 2010.

Lời giải. (a) Ta có đẳng thức sau $n^2+(n+3)^2-(n+1)^2-(n+2)^2=4$.

Nếu sau $n-1$ bước ta nhận được chênh lệch tổng khối lượng hai đĩa cân là k thì ta có thể đặt các quả cân trong các bước tiếp theo để sau $n+3$ bước ta nhận được chênh lệch tổng khối lượng hai đĩa cân là $k+4$ hoặc $k-4$.

Như vậy, bài toán sẽ được giải quyết nếu ta chứng minh được Peter có thể đặt các quả cân sau hữu hạn bước để chênh lệch tổng khối lượng hai đĩa cân là 0, 1, 2 hoặc 3.

- Với $k=0$, hiển nhiên theo vị trí xuất phát.
- Với $k=1$, ta có thể đạt được ngay sau bước đầu tiên.
- Với $k=2$, ta có thể đạt được sau bốn bước vì ta có $4^2-1^2-2^2-3^2=2$.
- Với $k=3$, ta có thể đạt được sau hai bước vì ta có $2^2-1^2=3$.

(b) Để chênh lệch tổng khối lượng hai đĩa cân là 2010 thì tổng khối lượng của tất cả các quả cân phải lớn hơn hoặc bằng 2010 nên cần ít nhất 18 bước để thực hiện điều đó. Tuy nhiên, với 18 bước, ta có chín quả cân khối lượng lẻ và chín quả cân có khối lượng chẵn hay tổng khối lượng tất cả các quả cân sẽ lẻ nên chênh lệch tổng khối lượng hai đĩa cân sẽ phải là một số lẻ, vô lý.

Với 19 bước, ta có thể đặt các quả cân có khối lượng $1^2, 2^2, 15^2$ ở một bên đĩa cân, các quả cân còn lại ở bên đĩa cân còn lại là nhận được chênh lệch tổng khối lượng hai đĩa cân là 2010. Vậy số bước nhỏ nhất cần thực hiện là 19 bước. □

2 Các bài toán hai người chơi bất bình đẳng

Các bài toán với hai người chơi bất bình đẳng lại được chia làm hai loại sau:

2.1 Các bài toán cách thực hiện nước đi của hai người khác nhau

Ở các bài toán này, sẽ có quy tắc chơi riêng dành cho hai người chơi.

Bài toán 3. *Trên bảng có dãy các số $1, 2, \ldots, n$ ($n \geqslant 3$). Tại mỗi lượt chơi, A sẽ là người chơi trước, A được quyền cộng vào hai số liền nhau bất kỳ mỗi số thêm một đơn vị, sau đó B được quyền đổi chỗ hai số liền nhau bất kỳ cho nhau. A sẽ thắng nếu tại một thời điểm nào đó, tất cả các số nhận được trên bảng là bằng nhau. Chứng minh rằng B có thể cản không cho A thắng.*

Chứng minh. Ta thấy B có thể ngăn cản không cho A thắng theo cách sau đây:

- Sau $n-2$ bước, B có thể đổi chỗ để số n (ban đầu) chuyển lên vị trí thứ hai và số 1 (ban đầu) vẫn ở vị trí đầu tiên.
- Sau $n-2$ bước, nếu B áp dụng chiến thuật như trên thì A không thể cộng để cho số ở vị trí đầu tiên lớn hơn hoặc bằng số ở vị trí thứ hai được.
- Ở các bước tiếp theo, cho dù A chơi như thế nào thì số ở vị trí đầu tiên sẽ luôn bé hơn số ở vị trí thứ hai. □

Bài toán 4. *A và B chơi một trò chơi trên truyền hình. A sẽ nhận được một dãy cho trước k ($k \geqslant 2$) quân bài đôi một khác nhau. Trò chơi kéo dài trong tối đa $k+3$ lượt chơi, tại mỗi lượt chơi, A sẽ được quyền chọn một số quân bài, lấy chúng ra khỏi vị trí ban đầu và đặt mỗi quân bài vào vị trí mới một cách tùy ý để nhận được một dãy các quân bài mới và đưa nó cho B. Nhiệm vụ của B là phải đoán chính xác thứ tự các quân bài trong dãy ban đầu. B chỉ được quyền trả lời một lần duy nhất trong tất cả các lượt chơi nên B sẽ chỉ trả lời khi B chắc chắn đáp án mình đưa ra là đúng hoặc khi đã ở lượt chơi cuối cùng, các trường hợp khác B sẽ bỏ qua và chuyển sang lượt tiếp theo. Nếu B đoán đúng thì B sẽ thắng, nếu B không đoán đúng được thì A sẽ thắng. Hỏi ai là người sẽ giành chiến thắng trong trò chơi này biết rằng mỗi quân bài A chỉ được chọn tối đa một lần trong tất cả các lượt chơi và A có quyền không chọn bất kỳ quân bài nào tại mỗi lượt chơi?*

Lời giải. Ta sẽ chứng minh A có thể giành chiến thắng sau tối đa năm lượt chơi.

Xét hai quân bài X, Y bất kỳ. Ta có nhận xét sau: *Vị trí của X so với Y bị thay đổi tối đa hai lần trong tất cả các lượt chơi.*

Thật vậy, tại một lượt chơi bất kỳ, nếu cả hai quân bài X, Y đều không được chọn thì hiển nhiên vị trí của X so với Y sẽ không đổi.

Vị trí của X so với Y chỉ có thể bị thay đổi khi tại lượt chơi đó, có ít nhất một trong hai quân bài X, Y được chọn, và điều này chỉ xảy ra ở tối đa hai lượt chơi.

Sau năm lượt chơi, thứ tự đúng của X và Y sẽ là thứ tự xuất hiện trong ít nhất ba lượt chơi.

Xét tất cả các cặp các quân bài, A sẽ có thể xác định được thứ tự đúng của từng cặp quân bài và từ đó xác định được thứ tự chính xác của tất cả các quân bài. □

2.2 Các bài toán cách thực hiện nước đi của hai người giống nhau nhưng quy định điều kiện thắng của hai người khác nhau

Bài toán 5. *Hai người A và B chơi một trò chơi như sau. A và B lần lượt viết các chữ số* 0 *và* 1 *(từ trái sang phải) cho đến khi mỗi người viết được* 2013 *chữ số, khi đó sẽ nhận được biểu diễn nhị phân của một số nguyên dương N nào đó. A sẽ thắng nếu số N biểu diễn được thành tổng của hai số chính phương, và B thắng trong trường hợp ngược lại. A là người viết trước. Hỏi ai là người có chiến thuật giành chiến thắng?*

Lời giải. Trước tiên ta chứng minh rằng nếu biểu diễn nhị phân của một số nguyên dương có tận cùng bằng hai chữ số 1 và có một số chẵn các chữ số 0 thì số này không thể viết được dưới dạng tổng của hai số chính phương.

Thật vậy, số đó có dạng $4^k(4s+3)$. Nếu giả sử ngược lại, tồn tại x, y nguyên sao cho:

$$x^2+y^2=4^k(4s+3),$$

thì do $x^2+y^2 \equiv 0 \pmod 4 \Leftrightarrow x, y$ cùng chẵn nên $\exists p, q : p^2+q^2=4s+3$, mâu thuẫn.

Chiến thuật cho B thắng như sau:

- Nếu một trong các chữ số mà A viết xuống là 1 thì B sẽ lặp lại tất cả các chữ số mà A đã viết. Cuối cùng, số nhận được sẽ là số có dạng $4^k(4s+3)$, số này không biểu diễn được dưới dạng x^2+y^2.
- Nếu A viết toàn các chữ số 0 thì B sẽ viết ba chữ số đầu là số 1 và sau đó chỉ toàn số 0. Số sau cùng là $21 \cdot 4^{2010}$, số này không viết được dưới dạng x^2+y^2. □

3 Các loại bài toán hai người chơi bình đẳng

Chúng ta xét loại bài toán trò chơi với hai người chơi bình đẳng với các giả thiết sau đây:

- Trò chơi gồm hai đấu thủ A và B, luân phiên nhau, mỗi người đi một nước. Quy tắc thực hiện các nước đi của hai người chơi (có thể trừ nước đầu tiên) là hoàn toàn giống nhau.
- Hai đấu thủ đều chơi rất giỏi, nghĩa là có khả năng tính trước mọi nước đi. Giả thiết chơi giỏi nhằm tránh các trường hợp "ăn may", tức là các trường hợp do đối phương hớ hênh mà đi lạc nước. Điều này tương đương với giả thiết cả hai đấu thủ đều có thể tính trước mọi nước đi (với loại trò chơi hữu hạn) hoặc cả hai đấu thủ đều biết cách đi tốt nhất.
- Đấu thủ nào đến lượt mình không thể đi được nữa thì chịu thua và ván chơi kết thúc.
- Không có thế hòa, sau hữu hạn nước đi sẽ xác định được ai thắng, ai thua.

Trong các bài toán trò chơi, luôn luôn tồn tại hai loại vị trí: vị trí *thắng* và vị trí *thua.* Vị trí *thắng* được định nghĩa là các vị trí mà tại đó nếu người chơi thực hiện chiến thuật tối ưu thì sẽ dành chiến thắng, vị trí *thua* là vị trí mà tại đó người chơi cho dù thực hiện các nước đi như thế nào thì vẫn thua. Hai loại vị trí này có đặc điểm sau:

- Vị trí kết thúc luôn là vị trí *thắng.*
- Từ mỗi vị trí *thua*, luôn có ít nhất một cách đưa đến vị trí *thắng.*
- Từ mỗi vị trí *thắng*, luôn đưa đến vị trí *thua.*

Một đối thủ sẽ thắng khi họ bắt đầu nước đi ở vị trí *thắng* và kết thúc nước đi ở vị trí *thua.*

Khác với bài toán với một người chơi, thì trong bài toán trò chơi với hai người chơi, bất biến và nửa bất biến được tạo ra và duy trì ở mỗi vị trí thua. Các vị trí thua sẽ có chung nhau một tính chất T, người chiến thắng sẽ là người duy trì được tính chất T sau mỗi nước đi của mình. Tính chất T chính là bất biến trong bài toán trò chơi.

Để nghiên cứu tính bất biến trong các bài toán trò chơi, ta sẽ xét một lớp các bài toán trò chơi phổ biến là bài toán bốc bi.

Bài toán 6. *Trên bàn có* 2013 *viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép bốc từ một đến năm viên bi. A là người bốc bi trước, ai bốc được viên bi cuối cùng là người chiến thắng. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?*

Đây là bài toán trò chơi khá quen thuộc với các bạn học sinh chuyên Toán. Ý tưởng chủ đạo của bài này là sử dụng modulo.

Lời giải. Có thể nhận thấy rằng, người chơi có thể duy trì số bi trên bàn luôn bất biến với modulo 6 (tính chất T). Thật vậy, khi người chơi trước bốc i viên bi, ta có thể bốc $6-i$ viên bi để duy trì được tính chất T. Mà vị trí thua cuối cùng là vị trí có 0 viên bi trên mặt bàn, nên các vị trí thua là các vị trí có số bi chia hết cho 6, các vị trí còn lại là vị trí thắng. Vị trí ban đầu là vị trí thắng ($2013 \equiv 3 \pmod 6$) nên A sẽ là người có chiến thuật thắng. □

Bằng cách thay đổi quy tắc bốc bi hoặc cách xét thắng cuộc, ta có các bài toán thú vị sau:

Bài toán 7. *Trên bàn có* 2013 *viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép bốc từ một đến năm viên bi. A là người bốc bi trước, ai bốc được viên bi cuối cùng là người thua cuộc. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?*

Ở bài toán này, về quy tắc bốc bi thì giống hệt Bài toán 6, điểm khác duy nhất là cách xét thắng cuộc. Khi luật chơi không thay đổi thì bất biến được sử dụng sẽ không thay đổi, và khi cách xét thắng cuộc thay đổi thì chỉ có vị trí thắng và vị trí thua thay đổi.

Trong Bài toán 7, bằng cách lập luận tương tự Bài toán 6, các vị trí thua sẽ là các vị trí có số bi chia cho 6 dư 1, các vị trí còn lại là vị trí thắng. Vị trí ban đầu là vị trí thắng nên A sẽ là người có chiến thuật thắng.

Bài toán 8. *Trên bàn có n viên bi ($n \geqslant 2$). A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: tại lượt đầu tiên, A được phép bốc một số bi là một số nguyên dương tùy ý nhưng không được bốc toàn bộ số bi. Trong các lượt bốc tiếp theo, A và B không được phép bốc vượt quá số bi mà A bốc trong lượt đầu tiên cũng như không được phép bốc* 0 *viên. Ai bốc được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc. Hỏi với các giá trị của n như thế nào thì A sẽ là người có chiến thuật thắng?*

Thực ra, Bài toán 8 là một dạng tổng quát cho Bài toán 6.

Lời giải. Giả sử tại lượt đầu tiên A bốc k viên bi, khi đó trong các lượt tiếp theo, A và B được phép bốc từ 1 đến k viên bi. Như vậy, ta sẽ sử dụng bất biến cho các vị trí thua theo modulo $k+1$. Lập luận tương tự Bài toán 6, các vị trí thua (sau lượt bốc đầu tiên) là các vị trí có số bi là bội của $k+1$, các vị trí còn lại là vị trí thắng.

A sẽ thắng nếu A tìm được một số nguyên dương k sao cho $n-k$ là bội số của $k+1$ hay $n+1 \equiv 0 \pmod{k+1}$. Như vậy, nếu $n+1$ là hợp số thì A sẽ có chiến thuật thắng, $n+1$ là số nguyên tố thì B sẽ có chiến thuật thắng. □

Bài toán 9. *Trên bàn có* 2013 *viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: Mỗi lần được phép bốc số bi là lũy thừa đúng của* 2 *(được phép bốc một viên bi). A là người bốc bi trước, ai bốc được viên bi cuối cùng là người chiến thắng. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật thắng?*

Bài toán này đã có quy tắc bốc bi khác với ba bài toán trên. Như vậy, bất biến chúng ta sử dụng cũng như vị trí thắng, vị trí thua sẽ thay đổi theo. Vậy làm thế nào để tìm được bất biến thích hợp cho bài toán này?

Lời giải. Chúng ta sẽ tiến hành lập bảng vị trí thắng và thua của một người chơi trong các trường hợp số bi là số nhỏ.

- Khi trên bàn có một viên bi, thì đương nhiên A sẽ thắng vậy "1" là vị trí thắng.
- Khi trên bàn có hai viên bi, A vẫn là người chiến thắng, "2" là vị trí thắng.

- Khi trên bàn có ba viên bi, A sẽ thua vì với mọi cách bốc bi của A thì B đều nhận được viên bi cuối cùng nên "3" sẽ là vị trí thua.
- Khi trên bàn có n viên bi, A sẽ thắng khi và chỉ khi "n" là vị trí thắng hay A có thể bốc đi k viên bi sao cho "$n-k$" là vị trí thua. Ngược lại "n" là vị trí thua.

Bằng cách thử trực tiếp với các trường hợp nhỏ, ta có bảng phân bố các vị trí thắng (W) và vị trí thua (L) như sau:

Số bi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Kết quả	W	W	L	W	W	L	W	W	L	W	W	L	W	W	L

Từ bảng trên ta có thể dự đoán rằng, bất biến ở các vị trí thua là số bi là bội của 3. Và như vậy, trong bài toán này, A sẽ là người thua cuộc, vì "2013" là một vị trí thua. Thật vậy, ta sẽ chứng minh người chơi B sẽ luôn có thể suy trì số bi còn lại luôn là bội của 3. Đến lượt bốc của A, số bi trên bàn sẽ luôn là bội của 3, và khi A bốc 2^k viên bi, số bi còn lại chắc chắn không là bội của 3 (vị trí thắng). Đến lượt bốc của B, số bi trên bàn sẽ không là bội của 3, vậy B có thể bốc đi một hoặc hai viên bi để đưa số bi về là bội của 3 (vị trí thua). □

Bài toán 10. *Trên bàn có* 2013 *viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép bốc một viên, hai viên hoặc một nửa số bi có trên bàn nếu số bi là số chẵn. A là người bốc bi trước, ai bốc được viên bi cuối cùng là người chiến thắng. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?*

Lời giải. Bằng việc khảo sát với các trường hợp số bi nhỏ, ta có bảng phân bố các vị trí thắng (W) và vị trí thua (L) như sau:

Số bi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Kết quả	W	W	L	W	W	W	L	W	W	L	W	W	L	W	W

Từ bảng trên ta có thể dự đoán rằng, khi số bi lớn hơn 3, bất biến ở các vị trí thua là số bi chia cho 3 dư 1. Và như vậy, trong bài toán này, A sẽ là người thắng cuộc, vì "2013" là vị trí thắng. Thật vậy, ta sẽ chứng minh A sẽ luôn có thể duy trì số bi còn lại luôn chia cho 3 dư 1. Đến lượt bốc của A, số bi trên bàn sẽ luôn là bội của 3 hoặc chia 3 dư 2, và khi đó A có thể bốc một hoặc hai viên để đảm bảo số bi còn lại chia cho 3 dư 1 (vị trí thua).

Đến lượt bốc của B, số bi trên bàn sẽ chia cho 3 dư 1, khi đó B sẽ không có cách nào để tiếp tục duy trì số bi chia cho 3 dư 1, hay B luôn đưa số bi về vị trí thắng. □

Bài toán 11. *Trên bàn có* 2013 *viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép bốc tối thiểu một viên bi và không được bốc nhiều hơn nửa số bi còn lại trong đống. A là người bốc bi trước, đến lượt mình mà ai không thể thực hiện được nước đi là người thua cuộc. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?*

Lời giải. Bằng việc khảo sát với các trường hợp số bi nhỏ, ta có bảng phân bố các vị trí thắng (W) và vị trí thua (L) như sau:

Số bi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Kết quả	L	W	L	W	W	W	L	W	W	W	W	W	W	W	L

Từ bảng trên ta có thể dự đoán rằng, bất biến ở các vị trí thua là số bi có dạng $2^k - 1$. Và như vậy, trong bài toán này, A sẽ là người thắng cuộc, vì "2013" là một vị trí thắng. Thật vậy, ta sẽ chứng minh người chơi A sẽ luôn có thể suy trì số bi còn lại có dạng $2^k - 1$.

Ở lượt bốc đầu tiên, A bốc 990 viên. Đến mỗi lượt bốc của B, số bi trên bàn sẽ có dạng $2^k - 1$, khi đó B sẽ được phép bốc từ 1 đến $2^{k-1} - 1$ viên bi. Như vậy, số bi còn lại trên bàn sau lượt bốc của B sẽ có dạng $2^{k-1} - 1 + r$, với $1 \leqslant r \leqslant 2^{k-1} - 1$. Đến lượt bốc của A, A sẽ bốc r viên bi để đảm bảo số bi còn lại là $2^{k-1} - 1$, đây là một vị trí thua. □

Nhận xét. Bài toán trên có một dạng phát biểu hình học khá thú vị như sau: "*Cho một đoạn thẳng trên trục số dài N đơn vị với các điểm chia nguyên. A và B lần lượt thực hiện các lượt chơi theo nguyên tắc sau: mỗi lần cắt đoạn thẳng tại một điểm nguyên nằm trong đoạn để thu được hai đoạn con sau đó vất đi đoạn ngắn, trao đoạn dài cho người kia. Nếu hai đoạn bằng nhau thì vất đi một đoạn tùy ý. A là người thực hiện trước, đến lượt mình mà ai không thể thực hiện được nước đi là người thua cuộc. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?*"

Sau đây, ta sẽ xét các bài toán khác cũng thuộc lớp các bài toán bốc bi nhưng lúc này bi được chia làm nhiều đống:

Bài toán 12. *Trên bàn có hai đống bi, mỗi đống có* 2013 *viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép chọn một đống và bốc từ đống đó một số bi tùy ý. A là người bốc trước, ai là người bốc được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật giành chiến thắng?*

Lời giải. Chúng ta có thể nhận thấy người chơi B luôn có thể duy trì trạng thái hai đống sỏi bằng nhau sau mỗi nước đi của mình.

Thật vậy, khi người chơi A bốc k viên sỏi ở một đống thì người chơi B cũng sẽ bốc k viên sỏi ở đống kia. Như vậy sau hữu hạn các nước đi, người chơi A sẽ phải đưa số bi về trạng thái $(0, n)$. Đây là một vị trí thắng. Vậy người chơi B là người có chiến thuật thắng. □

Bài toán 13. *Trên bàn có hai đống bi, mỗi đống có* 2013 *viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép chọn một đống và bốc từ đống đó một số bi là ước của số bi ở đống kia. A là người bốc trước, ai là người bốc được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật giành chiến thắng?*

Lời giải. Vì số bi ở cả hai đống đều là số lẻ nên sau khi người chơi A bốc thì số bi ở hai đống chắc chắn sẽ khác tính chẵn lẻ. Người chơi B chỉ việc bốc một viên bi từ đống có số bi chẵn để tiếp tục duy trì trạng thái số bi ở cả hai đống đều là số lẻ.

Như vậy sau mỗi lượt người B chơi chắc chắn cả hai đống đều còn bi. B chỉ cần đợi A bốc hết bi ở một đống và người chơi B sẽ bốc hết bi ở đống còn lại và giành chiến thắng. □

Bài toán 14. *Trên bàn có hai đống bi, đống thứ nhất có* 2013 *viên bi, đống thứ hai có* 20132013 *viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép chọn một đống và bốc từ đống đó tối thiểu một viên và tối đa một nửa số bi trong đống. A là người bốc trước, đến lượt mình mà ai không thể thực hiện được nước đi là người thua cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật giành chiến thắng?*

Lời giải. Ta xét bài toán tổng quát với số bi ở hai đống là m, n. Ta sẽ chứng minh (m, n), $m \geqslant n$ là một vị trí thua khi $m + 1 = 2^k(n+1)$, $k \in \mathbb{N}$. $(*)$

Ta sẽ chứng minh $(*)$ bằng quy nạp theo $p = k + n$. Dễ thấy $(1, 1)$ là một vị trí thua nên $(*)$ đúng với $p = 1$. Giả sử $(*)$ đúng với mọi $p \leqslant p_0$. Ta xét vị trí (m_0, n_0), $m_0 \geqslant n_0$ thỏa mãn $m_0 + 1 = 2^{k_0}(n_0 + 1)$, trong đó $k_0 + n_0 = p_0 + 1$ và đến lượt A bốc bi.

- Nếu A bốc r viên ở đống có n_0 viên bi thì B bốc $2^{k_0}r$ viên ở đống kia, số bi ở hai đống được đưa về trạng thái $(m_0 - 2^{k_0}r, n_0 - r)$, đây là một vị trí thua theo giả thiết quy nạp.

- Nếu A bốc r viên ở đống có m_0 viên bi thì B bốc tiếp $2^{k_0-1}(n_0+1) - r$ viên ở đống đó, số bi ở hai đống được đưa về trạng thái $\left(m_0 - 2^{k_0-1}(n_0+1), n_0\right)$, đây là một vị trí thua theo giả thiết quy nạp.

Suy ra các vị trí (m_0, n_0), $m_0 \geqslant n_0$ thỏa mãn $m_0 + 1 = 2^{k_0}(n_0+1)$ trong đó $k_0 + n_0 = p_0 + 1$ là các vị trí thua. Theo nguyên lý quy nạp thì $(*)$ đúng với mọi $p = k + n$.

Như vậy, ở bài toán này, A sẽ là người chiến thắng vì A có thể bốc 3633326 viên ở đống thứ hai để đưa số bi ở hai đống về vị trí thua. □

Nhận xét. Bài toán trên có một dạng phát biểu hình học khá thú vị như sau: "*Cho một lưới chữ nhật kích thước $n \times m$ đơn vị nguyên. A và B lần lượt thực hiện các lượt chơi theo nguyên tắc sau: cắt hình theo một đường kẻ trong lưới đi qua một điểm nguyên trên một cạnh và không trùng với đỉnh để thu được hai hình chữ nhật sau đó vất đi hình có diện tích nhỏ hơn, trao hình có diện tích lớn hơn cho người kia. Nếu hai hình có diện tích bằng nhau thì vất đi một hình tùy ý. A là người thực hiện trước, đến lượt mình mà ai không thể thực hiện được nước đi là người thua cuộc. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?*"

Bài toán 15. *Trên bàn có hai đống bi, đống thứ nhất có* 2013 *viên bi, đống thứ hai có* 3102 *viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép chọn một đống và bốc từ đống đó một số bi tùy ý hoặc bốc một số bi tùy ý bằng nhau ở cả hai đống. A là người bốc trước, ai là người bốc được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật giành chiến thắng?*

Lời giải. Ta xét hai dãy (a_n) và (b_n) được xác định như sau:

- $a_1 = 1, b_1 = 2$.
- a_n là số nguyên dương nhỏ nhất không thuộc tập hợp $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}\}$.
- $b_n = a_n + n$.

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n, (a_n, b_n) là vị trí thua.

Với $n = 1$, dễ thấy $(1, 2)$ là một vị trí thua. Giả sử (a_n, b_n) là vị trí thua với mọi $n \leqslant k$. Ta chứng minh: (a_{k+1}, b_{k+1}) là một vị trí thua.

Thật vậy, giả sử số bi ở hai đống đang ở vị trí (a_{k+1}, b_{k+1}) và đến lượt người chơi A bốc bi.

- Nếu A bốc r $(r \geqslant 1)$ viên ở đống có a_{k+1} viên hoặc bốc $k+1+r$ $(r \geqslant 1)$ viên ở đống có b_{k+1} viên thì suy ra tồn tại $j \in \mathbb{N}^*$ sao cho $a_j = a_{k+1} - r$ hoặc $b_j = a_{k+1} - r$, khi đó B chỉ cần bốc một lượng bi vừa đủ ở đống kia để đưa số bi ở hai đống về vị trí (a_j, b_j).

- Nếu A bốc r $(1 \leqslant r \leqslant k)$ viên ở đống có b_{k+1} viên thì hiệu số bi ở hai đống sẽ bằng $j < k+1$, khi đó B bốc ở hai đống với cùng một số lượng bi như nhau để đưa số bi ở hai đống về vị trí (a_j, b_j).

- Nếu A bốc $k+1$ viên ở đống có b_{k+1} viên thì người chơi B chỉ cần bốc ở mỗi đống a_{k+1} viên và giành chiến thắng. □

4 Bài tập tương tự

Bài tập 1. *Trên bàn có* 2013 *viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép bốc số bi có dạng p^k, trong đó p là số nguyên tố và k là một số tự nhiên tùy ý (được phép bốc một viên bi). A là người bốc bi trước, ai bốc được viên bi cuối cùng là người chiến thắng. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?*

Bài tập 2. *Trên bàn có* 2013 *viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép bốc một viên, hai viên hoặc sáu viên. A là người bốc bi trước, ai bốc được viên bi cuối cùng là người chiến thắng. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?*

Bài tập 3. *Trên bàn có* 6^{2013} *viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép bốc từ một đến năm viên bi hoặc bốc đi* $\frac{5}{6}$ *số bi của đống nếu số bi là bội của* 6. *A là người bốc bi trước, ai bốc được viên bi cuối cùng là người chiến thắng. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?*

Bài tập 4. *Trên bàn có* 2013 *viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần phải bốc ít nhất một viên bi và không được bốc nhiều hơn* 2012 *viên cũng như không vượt quá số bi của người trước bốc. A là người bốc bi trước, ai bốc được viên bi cuối cùng là người chiến thắng. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?*

Bài tập 5. *Trên bàn có* 2013 *viên bi và chín lá bài may mắn. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép bốc từ một đến năm viên bi hoặc sử dụng lá bài may mắn để được bốc sáu viên bi (mỗi lá bài may mắn chỉ được sử dụng một lần). A là người bốc bi trước, ai bốc được viên bi cuối cùng là người chiến thắng. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật thắng?*

Bài tập 6. *Trên bàn có* 2013 *viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: tại lượt đầu tiên, A được phép bốc một số bi là một số nguyên dương tùy ý nhưng không được bốc toàn bộ số bi. Trong các lượt bốc tiếp theo, A và B không được phép bốc vượt quá hai lần số bi mà đối thủ bốc trong lượt ngay trước đó cũng như không được phép bốc* 0 *viên. Ai bốc được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc. Hỏi ai sẽ là người có chiến thuật giành chiến thắng?*

Bài tập 7. *Trên bàn có hai đống bi, mỗi đống có* 2013 *viên bi. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép chọn một đống và bốc từ đống đó một số bi có dạng* 2^k $(k \in \mathbb{N})$. *A là người bốc trước, ai là người bốc được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật giành chiến thắng?*

Bài tập 8. *Trên bàn có* 2013 *đống bi, đống thứ i có* F_i *viên bi, với* F_k *là số Fibonacci thứ k. A và B lần lượt bốc bi theo nguyên tắc sau: mỗi lần được phép chọn một đống và bốc từ đống đó một số bi tùy ý. A là người bốc trước, ai là người bốc được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật giành chiến thắng?*