Chuyên đề 6
Bất biến

Bất biến là khái niệm quan trọng của toán học. Nói một cách đơn giản thì bất biến là đại lượng hay tính chất không thay đổi trong khi các trạng thái biến đổi. Người ta sử dụng bất biến để phân loại các vật trong một phạm trù nào đó. Hai vật thuộc cùng một loại nếu nó có cùng tính chất H nào đó và nếu vật A có tính chất H, vật B không có tính chất H thì B không cùng loại với A.

Trong chuyên đề này ta nghiên cứu ứng dụng của bất biến trong các bài toán về thuật toán của lí thuyết trò chơi. Đây là dạng toán thường gặp trong các kì thi Olympic.

6.1 Thuật toán

6.1.1 Định nghĩa thuật toán

Cho tập $A \neq \varnothing$ và ta gọi là không gian các trạng thái, mỗi phần tử của A gọi là một trạng thái. Khi đó, mỗi ánh xạ $T : A \to A$ gọi là một thuật toán (ôtômat).

6.1.2 Các bài toán về thuật toán

Bài toán 1 (Bài toán tìm kiếm thuật toán). Cho trạng thái ban đầu α_0 và trạng thái kết thúc α_n. Hỏi có hay không thuật toán T trên A sao cho khi thực hiện T hữu hạn lần ta thu được α_n ?

$$\alpha_0 \xrightarrow{T} \alpha_1 \xrightarrow{T} \alpha_2 \xrightarrow{T} \ldots \xrightarrow{T} \alpha_n$$

Bài toán 2. Cho thuật toán T trên A và trạng thái ban đầu $\alpha \in A$.

a) Giả sử $\beta \in A$. Hỏi có thể nhận được β từ α sau một số hữu hạn bước thực hiện T hay không ?

b) Tìm tập tất cả các trạng thái có thể nhận được từ α sau một số hữu hạn bước thực hiện thuật toán T:

$$\overline{\alpha} = \{\beta \in A : \beta = T^n(\alpha)\}.$$

6.1.3 Hàm bất biến

Cho T là một thuật toán trên A, I là một tập hợp khác rỗng mà ta gọi là không gian các mẫu bất biến.

Khi đó: ánh xạ $H : A \to I$ gọi là hàm bất biến trên A nếu:

$$\forall a, b \in A : b \in \overline{a} \Rightarrow H(a) = H(b)$$

Xét các ví dụ sau

Ví dụ 1. Hai người chơi cờ. Sau mỗi ván người thắng được 2 điểm, người thua được 0 điểm, nếu hòa thì mỗi người được 1 điểm. Hỏi sau một số ván liệu có thể xảy ra trường hợp một người được 7 điểm và người kia được 10 điểm được không?

Lời giải. Gọi $S(n)$ là tổng số điểm của cả hai người sau ván thứ n. Ta có

$$S(n+1) = S(n) + 2, \forall n \geq 0.$$

Do đó, $S(n)$ bất biến theo modun 2. Suy ra

$$S(n) \equiv S(0) \equiv 0 \pmod 2, \ \forall n \geq 0.$$

Vậy, không thể xảy ra trường hợp mà một người được 7 điểm và một người được 10 điểm.

Ví dụ 2. Thực hiện trò chơi sau: Lần đầu, viết lên bảng cặp số $\left(2, \sqrt{2}\right)$. Từ lần thứ hai, nếu trên bảng có cặp số $B = (a, b)$ thì được phép viết thêm cặp số

$$T(B) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right).$$

Hỏi ta có thể viết được lên bảng cặp số $\left(1, 1+\sqrt{2}\right)$ hay không?.

Lời giải. Giả sử ở bước thứ n ta viết cặp số (a_n, b_n). Xét $S(n) = a_n^2 + b_n^2$, ta có

$$S_{n+1} = \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2 = S_n, \forall n \geq 1.$$

Do đó, $S(n)$ là bất biến trong trò chơi nói trên.
Mà $S(1) = 6$ và $1+(1+\sqrt{2})^2 \neq 6$ nên ta không thể viết được cặp số $\left(1, 1+\sqrt{2}\right)$.

Ví dụ 3. Trên bảng có hai số 1 và 2. Thực hiện việc ghi số theo quy tắc sau: Nếu trên bảng có hai số a, b thì được phép ghi thêm số $c = a + b + ab$. Hỏi bằng cách đó có thể ghi được các số 2001 và 11111 hay không?

Lời giải. Dãy các số được viết là

$$1, 2, 5, 11, 17, \ldots$$

Dễ dàng chứng minh được các số được viết thêm trên bảng đều chia cho 3 dư 2. Bất biến trên cho phép ta loại trừ số 2001 trong dãy các số viết được trên bảng. Tuy nhiên, bất biến đó không cho phép ta loại trừ số 11111. Ta đi tìm một bất biến khác. Quan sát các số viết được và quy tắc viết thêm số, ta có

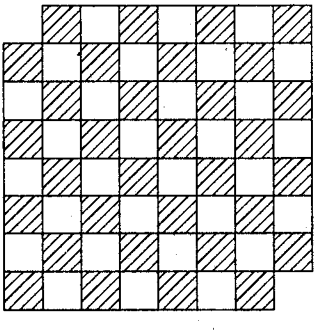
$$c = a + b + ab \Rightarrow c + 1 = (a + 1)(b + 1)$$

và nếu cộng thêm 1 vào các số thuộc dãy trên ta có dãy mới

$$2, 3, 6, 12, 18, \ldots$$

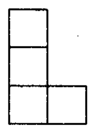
Như vậy, nếu cộng thêm 1 vào các số viết thêm thì các số này đều có dạng $2^n.3^m$ với $m, n \in \mathbb{N}$. Do $11111 + 1 = 11112 = 3.8.463$ nên không thuộc dãy các số viết được.
Do đó không thể viết được các số 2001 và 11111.

Ví dụ 4. Bàn cờ vua 8×8 bị mất hai ô ở hai góc đối diện. Hỏi có thể lát phần còn lại của bàn cờ bởi các quân Domino 2×1 được không?

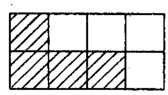


Lời giải. Mỗi quân Domino lát vào bàn cờ luôn chiếm một ô trắng và một ô đen. Do đó, nếu lát được phần còn lại của bàn cờ thì số ô trắng và số ô đen bằng nhau. Nhưng do hai ô ở hai góc đối diện của bàn cờ là hai ô cùng màu nên số ô màu trắng và số ô màu đen trong phần còn lại của bàn cờ không bằng nhau. Vậy không lát được phần còn lại của bàn cờ bằng các quân Domino.

Ví dụ 5. Xác định các số nguyên dương m, n sao cho bảng $m \times n$ có thể lát được bởi các quân hình chữ L dưới đây

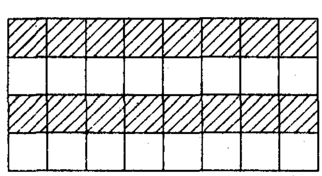


Lời giải. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $m \leq n$. Để lát được bảng thì $m \geq 2, n \geq 3$. Giả sử ta có thể lát được bảng bởi a quân hình chữ L, ta có $m.n = 4a$. Vì $m.n \geq 6$ nên $a \geq 2$. Xét $a = 2$, ta có bảng 2×4. Bảng 2×4 có thể lát được bởi hai quân hình chữ L như hình vẽ dưới đây



Với $a = 3$ ta có $m \times n = 12$ nên có hai bảng thoả mãn là 2×6 và 3×4. Dễ dàng kiểm tra cả hai bảng này đều không lát được bởi các quân hình chữ L. Điều đó khiến ta dự đoán, để lát được bảng bởi các quân hình chữ L thì a chẵn. Để chứng minh dự đoán này ta tô màu các ô của bảng như sau:

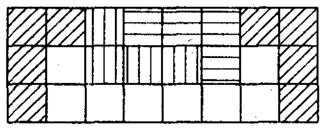
Giả sử được m chẵn. Các ô ở dòng có thứ tự lẻ (tính từ trên xuống dưới) được tô màu đen, các ô ở dòng có thứ tự chẵn màu trắng.



Khi đó, số ô đen và số ô trắng bằng nhau và bằng $2a$. Mỗi quân hình chữ L lát vào bảng chiếm 3 ô đen và 1 ô trắng hoặc chiếm 3 ô trắng và 1 ô đen. Giả sử lát được bởi x quân hình chữ L chiếm 3 ô đen và 1 ô trắng và y quân hình chữ L chiếm 3 ô trắng và 1 ô đen. Ta có hệ

$$\begin{cases} x + y = a \\ 3x + y = 3y + x = 2a. \end{cases}$$

Suy ra $x = y$ và $a = 2x$. Điều đó có nghĩa là a chẵn.
Bây giờ ta chứng minh nếu a chẵn, tức là $m \times n$ chia hết cho 8 thì có thể lát được bảng bởi các quân hình chữ L. Thật vậy, nếu m chia hết cho 2 và n chia hết cho 4 thì bảng có thể chia thành các hình chữ nhật 2×4 nên lát được. Nếu m lẻ và n chia hết cho 8 thì do m có thể viết được dưới dạng $m = 2s + 3$ nên có thể chia bảng đã cho thành các hình chữ nhật 2×4 và 3×8. Do đó, nếu hình chữ nhật 3×8 lát được thì bảng đã cho sẽ lát được. Hình vẽ dưới đây chứng tỏ có thể lát được hình chữ nhật này



Vậy để lát được bảng đã cho bởi các quân hình chữ L thì điều kiện cần và đủ là $m \times n$ chia hết cho 8 và $m, n \geq 2$.

6.2 Bài tập

6.2.1 Bài tập luyện tập

1. Xét bàn cờ vua 8×8. Chứng minh rằng nếu xuất phát từ một ô góc, con mã không thể đi qua tất cả các ô của bàn cờ, mỗi ô một lần và kết thúc ở ô góc đối diện với ô góc nó xuất phát.

2. Một con robot nhảy trong mặt phẳng tọa độ theo quy tắc sau: Xuất phát từ điểm (x, y), con robot nhảy đến điểm (x', y') xác định như sau:

$$x' = \frac{x+y}{2}, \quad y' = \frac{2xy}{x+y}.$$

Chứng minh rằng, nếu ban đầu con robot đứng ở điểm $(2009, 2010)$ thì không bao giờ con robot nhảy vào được trong đường tròn (C) có tâm là góc tọa độ O và bán kính $R = 2840$.

3. Viết các số $1, 2, 3, ..., 2010$ lên bảng. Thực hiện thuật toán sau: Mỗi lần xóa đi hai số a, b bất kì và viết thêm số $c = |a - b|$. Chứng minh rằng số còn lại cuối cùng trên bảng là một số lẻ.

4. Một hình tròn được chia thành 2010 hình quạt. Trong mỗi hình quạt có một viên bi. Thực hiện trò chơi sau: mỗi lần cho phép lấy ra hai viên bi trong hai hình quạt nào đó và chuyển chúng sang cac ô bên cạnh nhưng

theo hai chiều ngược nhau. Hỏi sau một số lần có thể chuyển hết các viên bi vào một hình quạt được không?

5. Một dãy gồm có 19 phòng. Ban đầu mỗi phòng có một người. Sau đó, cứ mỗi ngày có hai người nào đó chuyển sang hai phòng bên cạnh nhưng theo hai chiều ngược nhau. Hỏi sau một số ngày có hay không trường hợp mà

   (a) Không có ai ở phòng có thứ tự chẵn.

   (b) Có 10 người ở phòng cuối.

6. Ở 6 đỉnh của một lục giác lồi có ghi 6 số chẵn liên tiếp theo chiều kim đồng hồ. Ta thay đổi các số như sau: Mỗi lần lấy ra một cạnh và cộng hai số trên cạnh đó với cùng một số nguyên nào đó. Hỏi sau một số lần thay đổi như thế thì 6 số mới ở các đỉnh của lục giác có thể bằng nhau không?

7. Cho bảng ô vuông $n \times n$ $(n > 5)$. Trong mỗi ô của bảng ta viết một dấu $(+)$ hoặc $(-)$ sao cho trong toàn bộ bảng chỉ có một dấu $(-)$ và không nằm ở các ô góc. Mỗi lần cho phép đổi dấu tất cả các ô trên cùng một hàng, cùng một cột, cùng một đường song song với đường chéo, hoặc bốn ô ở góc. Hỏi sau hữu hạn lần có thể làm cho bảng chỉ gồm các dấu cộng được không?

8. Trên bảng cho đa thức $f(x) = x^2 + 4x + 3$. Thực hiện trò chơi sau, nếu trên bảng đã có đa thức $P(x)$ thì được phép viết thêm lên bảng một trong hai đa thức sau

$$Q(x) = x^2.f(\frac{1}{x} + 1), \quad R(x) = (x-1)^2.f(\frac{1}{x-1}).$$

   Hỏi sau một số bước ta có thể viết được đa thức

$$g(x) = x^2 + 10x + 9$$

   hay không?

9. (VMO - 1991): Cho bảng 1991×1992. Kí hiệu (m, n) là ô vuông nằm ở giao của hàng thứ m và cột thứ n. Tô màu các ô vuông của bảng theo quy tắc sau: lần thứ nhất tô ba ô $(r, s), (r+1, s+1), (r+2, s+2)$;

   $1 \le r \le 1989, 1 \le s \le 1990$, từ lần thứ hai, mỗi lần tô đúng ba ô chưa có màu nằm cạnh nhau trong cùng một hàng hoặc cùng một cột. Hỏi bằng cách đó có thể tô màu được tất cả các ô của bảng được không?

10. (VMO - 1992): Tại mỗi đỉnh của đa giác lồi $A_1A_2...A_{1993}$ ta ghi một dấu cộng (+) hoặc một dấu trừ (−) sao cho trong 1993 dấu đó có cả dấu cộng (+) và dấu trừ (−). Thực hiện việc thay dấu như sau: mỗi lần, thay dấu đồng thời tại tất cả các đỉnh của đa giác theo quy tắc:

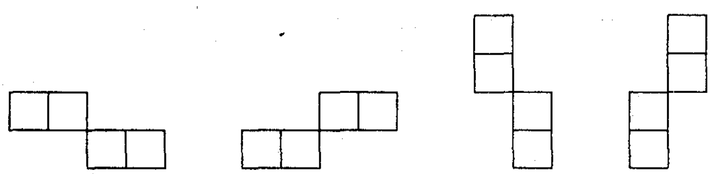
   - Nếu dấu tại A_i và A_{i+1} là như nhau thì dấu tại A_i được thay bằng dấu (+).

   - Nếu dấu tại A_i và A_{i+1} khác nhau thì dấu tại A_i được thay bằng dấu (−).

   (Quy ước A_{1994} là A_1)

   Chứng minh rằng, tồn tại số nguyên $k \geq 2$ sao cho sau khi thực hiện liên tiếp k lần phép thay dấu nói trên, ta được đa giác $A_1A_2...A_{1993}$ mà dấu tại mỗi đỉnh A_i $(i = \overline{1, 1993})$ trùng với dấu tại chính đỉnh đó ngay sau lần thay dấu thứ nhất.

11. (VMO-2006) Xét bảng ô vuông $m \times n$ (m, n là các số nguyên dương lớn hơn 3). Thực hiện trò chơi sau: mỗi lần đặt 4 viên bi vào 4 ô của bảng (mỗi ô 1 viên bi) mà 4 ô đó tạo thành một trong các hình dưới đây

   Hỏi sau một số lần ta có thể nhận được bảng mà số bi trong các ô bằng nhau được không nếu

   a) $m = 2004$ và $n = 2006$?

   b) $m = 2005$ và $n = 2006$?

12. Trên bàn có 2007 viên bi gồm 667 bi xanh, 669 bi đỏ, 671 bi vàng. Thực hiện thuật toán sau: Mỗi lần lấy đi 2 viên bi khác màu và đặt thêm 2 viên bi có màu còn lại. Hỏi có thể nhận được trạng thái mà trên bàn chỉ còn lại các viên bi cùng màu được không?
   (Đề thi chọn đội tuyển dự thi HSGQG tỉnh Bắc Ninh, năm 2007)

13. Các số tự nhiên $0, 1, 2, 3, ...$ được viết trong các ô của một bảng ô vuông kích thước 2003×2003 theo vòng xoáy trôn ốc (xoáy ngược chiều kim đồng hồ) sao cho số 0 nằm ở ô trung tâm (tâm của bảng). Các dòng và

cột của bảng được đánh số tăng dần từ dưới lên trên và từ trái sang phải (bắt đầu từ số 1).

a) Số 2004 nằm ở dòng nào, cột nào? Tại sao?

b) Thực hiện thuật toán sau: lần đầu tiên, thay số 0 ở ô trung tâm bởi số 1998; mỗi lần tiếp theo, cho phép lấy ra 12 số trong 12 ô liên tiếp trong cùng một hàng hoặc trong cùng một cột hoặc trong cùng một hình chữ nhật 3×4 rồi tăng mỗi số đó lên một đơn vị. Hỏi sau một số lần như vậy ta có thể làm cho tất cả các số trong bảng đều là bội của 2004 hay không? Tại sao?

	20	19	18	17	16	
	21	6	5	4	15	
	22	7	0	3	14	
	23	8	1	2	13	
	24	9	10	11	12	

14. Cho dãy hữu hạn các số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n \geq 4)$ có các số hạng đôi một khác nhau. Lấy ra khỏi dãy 4 số hạng bất kì rồi lại xếp chúng vào vị trí đó nhưng theo thứ tự ngược lại. Với dãy nhận được lại làm như vậy.... Hỏi bằng cách đó ta có thể nhận được dãy $x_n, x_{n-1}, ..., x_1$ hay không?

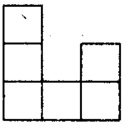
15. Cho k, n là các số nguyên dương. Xét một bảng ô vuông vô hạn, đặt $3k \times n$ quân cờ trong hình chữ nhật $3k \times n$. Thực hiện trò chơi sau: mỗi quân cờ sẽ nhảy ngang hoặc dọc qua một ô kề với nó và có chứa quân cờ, để đến ô kề với ô này (ô mà quân cờ nhảy đến phải là ô trống). Sau khi làm như trên ta loại bỏ quân cờ ở ô bị nhảy qua ra khỏi bàn cờ. Chứng minh rằng, với cách chơi đó trên bảng ô vuông sẽ không bao giờ còn lại đúng một quân cờ.

16. (Belarus - 1999): Cho bảng 7×7 và các quân cờ có một trong ba loại sau: $3 \times 1, 1 \times 1$ và hình chữ L gồm 3 ô. Người thứ nhất có vô hạn quân 3×1 và một quân hình chữ L, trong khi người thứ hai chỉ có duy nhất một quân 1×1.

a) Chứng minh: nếu cho người thứ hai đi trước, anh ta có thể đặt quân cờ của mình vào một ô nào đó sao cho người thứ nhất không thể phủ kín phần còn lại của bảng.

b) Chứng minh rằng nếu cho người thứ nhất thêm một quân hình chữ L thì bất kể người thứ nhất đặt quân cờ của mình ở đâu thì người thứ hai cũng vẫn có thể phủ kín phần còn lại của bảng.

17. (IMO 2004) Ta định nghĩa viên gạch hình móc câu là hình gồm 6 ô vuông đơn vị như hình vẽ dưới đây, hoặc hình nhận được do lật hình đó (sang trái, sang phải, lên trên, xuống dưới) hoặc hình nhận được do xoay hình đó đi một góc.



Hãy xác định tất cả các hình chữ nhật $m \times n$, trong đó m, n là các số nguyên dương sao cho có thể lát hình chữ nhật đó bằng các viên gạch hình móc câu.

6.2.2 Bài tập tự giải

1. Thực hiện trò chơi sau: Nếu trên bảng có cặp phân số hữu tỉ $\left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\right)$ thì được phép viết thêm một trong các cặp:

$$\left(\frac{a+b}{b}; \frac{c+d}{d}\right), \quad \left(\frac{a-b}{b}; \frac{c-d}{d}\right), \quad \left(\frac{b}{a}; \frac{d}{c}\right)$$

(trong quá trình viết thêm các cặp phân số ta không được phép tối giản các phân số).

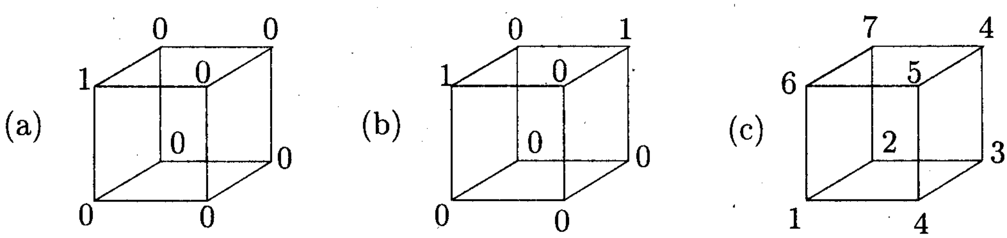
a) Chứng minh rằng xuất phát từ cặp $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ ta có thể viết được cặp $\left(\frac{n}{n+1}; \frac{n+2}{n+3}\right)$ với n nguyên dương tuỳ ý.

b) Hỏi có thể nhận được hay không từ cặp $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ một cặp phân số hữu tỉ tuỳ ý?

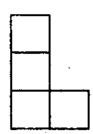
2. Xét bảng ô vuông 2010×2010. Mỗi ô của bảng ta tô bởi một trong hai màu: xanh hoặc đỏ, sao cho mỗi ô đỏ không nằm ở biên thì có đúng 5 ô xanh nằm xung quanh nó, mỗi ô xanh không nằm ở biên thì có đúng 4 ô đỏ nằm quanh nó. Tính số ô xanh và số ô đỏ trong bảng đã cho.

3. Một hình tròn được chia thành n hình quạt (n nguyên dương). Trong mỗi hình quạt có một viên bi. Thực hiện trò chơi sau: mỗi lần cho phép lấy ra hai viên bi trong hai hình quạt nào đó và chuyển chúng sang các ô bên cạnh nhưng theo hai chiều ngược nhau. Hỏi với n như thế nào thì sau một số lần chuyển bi ta có thể chuyển hết các viên bi vào một hình quạt?

4. Tại mỗi đỉnh của một hình lập phương ta viết một số nguyên. Mỗi lần lấy ra một cạnh và tăng đồng thời hai số trên cạnh đó lên một đơn vị. Hỏi sau một số lần như vậy ta có thể nhận được trạng thái mà 8 số ở 8 đỉnh của hình lập phương bằng nhau được không? Biết các số ở các đỉnh của hình lập phương ban đầu là



5. Cho n là số nguyên dương, $n \geq 2$. Xét bảng ô vuông $n \times n$ mất hai ô ở hai góc đối diện. Hãy tìm điều kiện của n sao cho có thể lát được bảng bởi các quân hình chữ L dưới đây



6. Tại đỉnh A_1 của 12 giác đều $A_1A_2...A_{12}$ ta đánh dấu $(-)$, các đỉnh còn lại đánh dấu $(+)$. Mỗi lần cho phép lấy ra k đỉnh liên tiếp và đổi dấu các đỉnh đó. Hỏi sau một số lần như vậy ta có thể nhận được trạng thái mà đỉnh A_2 mang dấu $(-)$, các đỉnh khác mang dấu $(+)$ được không? Hãy giải bài toán với:

   (a) $k = 4$ (b) $k = 3$.

7. Có ba máy in, in trên mỗi tấm bìa một cặp số tự nhiên hoạt động theo nguyên tắc sau:

   Máy 1: In ra tấm bìa $(a+1, b+1)$ từ tấm bìa (a, b).

   Máy 2: In ra tấm bìa $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ từ tấm bìa (a, b) nếu a và b đều chẵn.

Máy 3: In ra tấm bìa (a, c) từ hai tấm bìa (a, b) và (b, c).

a) Ban đầu ta có tấm bìa $(5, 19)$, hỏi có thể in được các tấm bìa $(1, 100)$ và $(1, 50)$ hay không?

b) Ban đầu ta có tấm bìa (a, b) với $1 \leq a < b \leq n$. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho ta nhận được tấm bìa $(1, n)$.

8. Cho bảng ô vuông 8×8. Ghi vào mỗi ô của bảng một số nguyên bất kì. Mỗi lần cho phép ta lấy ra một hình vuông 3×3 hoặc 4×4 rồi tăng mỗi số trong hình vuông đó lên một đơn vị. Hỏi nếu xuất phát từ một bảng các số tùy ý thì sau một số bước ta có thể nhận được bảng gồm

   (a) Toàn các số là bội của 3 hay không?

   (b) Toàn các số là bội của 10 hay không?

9. Xét bảng 2009×2009. Trong mỗi ô của bảng ta điền một số $+1$ hoặc -1. Bên dưới mỗi cột ta viết tích các số trong cột đó, bên phải mỗi hàng ta viết tích các số trong hàng đó. Chứng minh rằng tổng của các tích vừa viết là một số khác 0.

10. Xét bảng 9×9. Ở ô (i, j) ta viết số $9(i-1)+j$. Mỗi lần lấy ra một hình vuông 4×4 và tăng đồng thời các số trong đó lên một đơn vị. Chứng minh rằng, ước số chung lớn nhất của tất cả các số trong bảng tại mọi thời điểm luôn bằng 1.

11. Chia góc vuông xOy thành lưới ô vuông đơn vị. Các hàng và cột được đánh số thứ tự tăng dần từ dưới lên trên và từ trái sang phải. Kí hiệu ô (m, n) là ô nằm ở giao của hàng thứ m và cột thứ n. Ban đầu đặt vào ô $(1, 1)$ một viên bi. Thực hiện việc chuyển bi như sau: Mỗi lần lấy ra khỏi góc viên bi nằm ở ô (m, n) nào đó mà tại các ô $(m+1, n)$ và $m, n+1)$ không có bi, đồng thời thêm vào hai ô nói trên mỗi ô một viên bi. Hỏi có nhận được hay không trạng thái mà

    a) Các ô $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$ đều không có bi.

    b) Các ô nói trên vạ hai ô $(1, 3)$, $(3, 2)$ đều không có bi.

12. Cho 4 tam giác vuông bằng nhau. Mỗi lần lấy ra một tam giác và chia thành hai tam giác vuông nhỏ hơn bởi đường cao hạ từ đỉnh góc vuông. Chứng minh rằng tại mọi thời điểm luôn có ít nhất hai tam giác bằng nhau.

13. Mặt phẳng toạ độ Oxy được chia thành lưới ô vuông đơn vị. Đặt một số quân cờ tại các mắt lưới. Mỗi quân cờ có thể nhảy ngang hoặc dọc theo qui tắc *solitairejump*: Nếu ba ô A, B, C liên tiếp trong cùng một hàng hoặc cùng một cột sao cho B nằm giữa A và C, các ô A, B có quân cờ và ô C không có quân cờ thì quân cờ ở A có thể nhảy sang C. Sau khi làm như vậy thì loại bỏ quân cờ ở B ra khỏi bàn cờ. Giả sử ban đầu các quân cờ được đặt phía dưới trục hoành (đặt tại các nút có toạ độ (x, y) với $y \leq 0$). Chứng minh rằng sau hữu hạn bước không thể còn lại đúng một quân cờ nằm ở ô $(0, 5)$.

14. (IMO 1993) Xét bàn cờ vô hạn ô. Mỗi quân cờ có thể nhảy ngang hoặc dọc theo qui tắc *solitairejump*: Nếu ba ô A, B, C liên tiếp trong cùng một hàng hoặc cùng một cột sao cho B nằm giữa A và C, các ô A, B có quân cờ và ô C không có quân cờ thì quân cờ ở A có thể nhảy sang C. Sau khi làm như vậy thì loại bỏ quân cờ ở B ra khỏi bàn cờ. Trò chơi kết thúc nếu trên bàn cờ chỉ còn lại đúng một quân cờ. Ban đầu ta đặt n^2 quân cờ trong một hình vuông $n \times n$ $(n \geq 1)$. Hỏi với n như thế nào thì trò chơi có thể kết thúc?

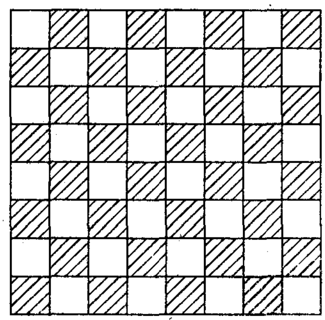
15. (Shortlist IMO-1994) Có 1994 cô gái ngồi quanh một bàn tròn, chơi trò chơi với n lá bài. Ban đầu, một cô gái giữ tất cả n lá bài. Mỗi lần đi, nếu cô nào có ít nhất hai lá bài thì chuyển cho hai người ngồi kề với mình mỗi người một lá bài. Trò chơi sẽ kết thúc nếu mỗi cô gái có không quá 1 lá bài. Chứng minh rằng :

    a) Nếu $n \geq 1994$ thì trò chơi không thể kết thúc.

    b) Nếu $n < 1994$ thì trò chơi sẽ kết thúc tại một thời điểm nào đó.

6.3 Hướng dẫn giải bài tập

1. Mỗi lần đi, con mã chuyển sang ô khác màu với ô nó đang đứng.



Để đi qua tất cả các ô của bàn cờ, mỗi ô một lần thì con mã phải đi hết 63 bước. Do đó, ô mà nó kết thúc hành trình khác màu với ô ban đầu nó xuất phát. Đó không thể là ô ở góc đối diện.

2. Ta có $x'.y' = xy$. Do đó bất biến là tích các tọa độ của điểm mà con robot nhảy tới được. Giả sử con robot đến được điểm $M(p, q)$, ta có

$$OM = \sqrt{p^2 + q^2} \geq \sqrt{2pq} = \sqrt{2.2009.2010} > 2840.$$

Vậy, con robot không thể nhảy vào trong đường tròn tâm O, bán kính $R = 2840$.

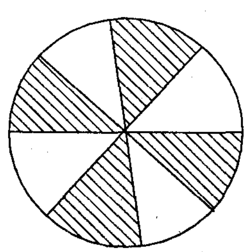
3. Gọi $S(n)$ là tổng các số trên bảng sau bước thứ n. Ta có $S(n)$ bất biến theo môđun 2. Mặt khác

$$S(0) = 1 + 2 + 3 + ... + 2010 = 1005.2011$$

nên $S(n) \equiv 1 \pmod 2, \forall n$.

Vậy số cuối cùng còn lại trên bảng là một số lẻ.

4. Tô màu các hình quạt bởi hai màu đen, trắng như hình vẽ:



sao cho hai hình quạt kề nhau thì khác màu. Gọi $S(n)$ và $T(n)$ tương ứng là số viên bi trong các hình quạt màu đen và số viên bi trong các hình quạt màu trắng sau bước chuyển bi thứ n. Ta có $S(n)$ và $T(n)$ bất biến theo modun 2. Do $S(0) = T(0) = 1005$ nên $S(n)$ và $T(n)$ lẻ với mọi n. Do đó không thể có trạng thái mà tất cả các viên bi ở trong cùng một hình quạt.

5. Đánh số các phòng theo thứ tự $1, 2, 3, ..., 19$.

1	2	3	4	...	18	19

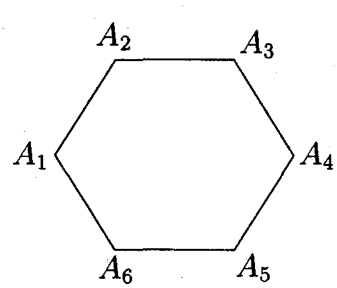
Ta đeo cho mỗi vị khách một thẻ ghi số phòng mình đang ở. Gọi $S(n)$ là tổng các số ghi trên thẻ của tất cả các vị khách ở ngày thứ n. Dễ thấy $S(n)$ là bất biến. Do đó, ta có

$$S(n) = S(1) = 1 + 2 + ... + 19 = 190, \forall n \geq 1.$$

a) Vì có lẻ người nên nếu không ai ở phòng có thứ tự chẵn thì $S(n)$ là một số lẻ, vô lí.

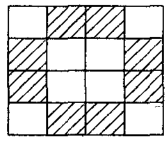
b) Nếu có 10 người ở phòng cuối (phòng số 19) thì $S(n) > 19.10 = 190$, vô lí.

6. Giả sử lục giác đã cho là $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ và 6 số ghi ở các đỉnh A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 ban đầu tương ứng là a, $a+2$, $a+4$, $a+6$, $a+8$, $a+10$ với $a \in \mathbb{Z}$.



Gọi $S(n)$ và $T(n)$ tương ứng là tổng các số ở các đỉnh A_1, A_3, A_5 và A_2, A_4, A_6 sau bước thứ n. Ta có $S(n) - T(n)$ là bất biến. Từ đó suy ra không nhận được trạng thái mà 6 số ở 6 đỉnh của lục giác bằng nhau.

7. *Hướng dẫn.* Thay cho dấu (+) ta viết số 1, dấu (−) ta viết số (−1). Xét hình chữ nhật 4×4 chứa dấu (−) sao cho dấu (−) nằm ở biên nhưng không nằm ở các ô góc. Tô màu các ô của hình chữ nhật 4×4 như sau:



Gọi $S(n)$ là tích các số được viết trong các ô được tô màu sau bước thứ n. Ta luôn có $S(n) = -1$.

8. Không thể.

   Đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ có biệt thức $\Delta_P = b^2 - 4ac$. Xét hai đa thức được viết thêm:

$$Q(x) = (a+b+c)x^2 + (b+2a)x + a$$
$$R(x) = cx^2 + (b-2a)x + (a-b+c)$$

   Dễ dàng kiểm tra được rằng

$$\Delta_Q = \Delta_R = b^2 - 4ac = \Delta_P$$

   Như vậy, các đa thức được viết thêm và đa thức ban đầu có cùng biệt thức Δ.

   Vì hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ có biệt thức Δ khác nhau nên không thể viết được đa thức $g(x)$.

9. ***Cách giải 1.*** Đánh số các ô của bảng như hình dưới đây:

1	2	3	1	2	3	...	1	2	3
3	1	2	3	1	2	...	3	1	2
2	3	1	2	3	1	...	2	3	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮
1	2	3	1	2	3	...	1	2	3
3	1	2	3	1	2	...	3	1	2
2	3	1	2	3	1	...	2	3	1
1	2	3	1	2	3	...	1	2	3
3	1	2	3	1	2	...	3	1	2

   Với cách đánh số trên, các ô của bảng được chia thành 3 loại: loại 1 gồm các ô được đánh số 1, loại 2 gồm các ô được đánh số 2 và loại 3 gồm các ô được đánh số 3.

Lần đầu tiên, ba ô được tô màu thuộc cùng một loại. Từ lần thứ hai, ba ô được tô màu thuộc ba loại khác nhau. Do số ô mỗi loại bằng nhau nên không thể tô màu hết tất cả các ô của bảng.

Cách giải 2. Xét bài toán từ lần tô màu thứ hai. Không gian trạng thái A gồm các bảng 1991×1992 trong đó có ít nhất ba ô sau được tô màu

$$(r, s), (r+1, s+1), (r+2, s+2).$$

Thuật toán $T : A \to A$ biến mỗi trạng thái $a \in A$ thành trạng thái $T(a) \in A$ sao cho trong $T(a)$ có thêm đúng 3 ô liên tiếp trên cùng một hàng hoặc cùng một cột được tô màu. Trạng thái ban đầu a_0 là trạng thái mà có đúng ba ô $(r, s), (r+1, s+1), (r+2, s+2)$ được tô màu; trạng thái kết thúc a^* là trạng thái mà ở đó tất cả các ô đều được tô màu. Để xây dựng hàm bất biến H ta thực hiện cách viết số sau: Với mỗi trạng thái $a \in A$ tùy ý, nếu ô (m, n) của a được tô màu thì ta viết số $m.n$. Xét $I = \{0, 1, 2\}$ và $H : A \to I$ sao cho với mỗi $a \in A$, $H(a)$ là số dư của tổng các số được viết trong a khi chia cho 3. Dễ thấy H là hàm bất biến. Suy ra, $H(a) = H(a_0) = 2, \forall a \in \overline{a_0}$. Mặt khác, $H(a^*) = 0$ nên $a^* \notin \overline{a_0}$. Điều đó có nghĩa là không thể tô màu tất cả các ô của bảng đã cho.

10. Đặt tương ứng dấu $(+)$ với số 1 và dấu $(-)$ với số (-1). Phép thay dấu của bài ra tương đương với phép thay số sau: mỗi lần, thay số đồng thời tại tất cả các đỉnh A_i theo quy tắc: số tại A_i được thay bằng tích của số tại A_i và số tại A_{i+1}.

Kí hiệu $a_i(n)$ là số tại đỉnh A_i ngay sau lần thay số thứ n, ta có

$$a_i(n) \in \{-1, 1\}, \forall i = \overline{1, 1993}.$$

Vì các số tại các đỉnh của đa giác ở mọi thời điểm chỉ là 1 và (-1) nên số đa giác số là hữu hạn. Suy ra, tồn tại các thời điểm s và t với $s > t \geq 1$ sao cho

$$a_i(t) = a_i(s), \forall i = \overline{1, 1993} \quad (1).$$

Nếu $t = 1$ thì ta có ngay điều phải chứng minh.

Xét $t > 1$, ta có:

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow a_i(t-1).a_{i+1}(t-1) = a_i(s-1).a_{i+1}(s-1), \forall i = \overline{1, 1993} \\
&\Leftrightarrow \frac{a_{i+1}(t-1)}{a_{i+1}(s-1)} = \frac{a_i(t-1)}{a_i(s-1)}, \forall i = \overline{1, 1993} \\
&\Leftrightarrow \frac{a_i(t-1)}{a_i(s-1)} = 1, \forall i = \overline{1, 1993} \quad \text{hoặc} \quad \frac{a_i(t-1)}{a_i(s-1)} = -1, \forall i = \overline{1, 1993}.
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\prod_{i=1}^{n} a_i(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

nên

$$\frac{a_i(t-1)}{a_i(s-1)} = 1, \forall i = \overline{1,1993}$$

hay

$$a_i(t-1) = a_i(s-1), \forall i = \overline{1,1993} \quad (2).$$

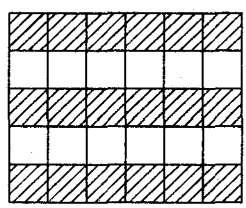
Từ (1) và (2) ta có

$$a_i(1) = a_i(s-t+1), \forall i = \overline{1,1993}.$$

□

11. a) Bảng đã cho có thể chia thành các hình chữ nhật 4×2 nên có thể nhận được trạng thái mà số bi trong các ô bằng nhau.

b) Tô màu các ô của bảng như hình vẽ (tô các hàng: 1, 3, ..., 2005)



Dễ thấy, mỗi lần đặt bi có 2 viên được đặt vào các ô được tô màu và 2 viên được đặt vào các ô không được tô màu. Do đó, nếu gọi $S(n)$ là số bi trong các ô được tô màu và $T(n)$ là số bi trong các ô không được tô màu sau lần đặt bi thứ n thì $S(n) - T(n)$ là bất biến. Ta có $S(n) - T(n) = S(0) - T(0) = 0, \forall n \geq 0$. Do đó, nếu nhận được bảng mà số bi trong các ô bằng nhau thì số ô được tô màu và số ô không được tô màu bằng nhau. Điều này không thể xảy ra vì m là một số lẻ. □

12. Gọi $X(n), D(n)$ và $V(n)$ tương ứng là số bi màu xanh, số bi màu đỏ và số bi màu vàng sau bước thứ n. Dễ thấy các đại lượng

$$X(n) - D(n), D(n) - V(n), V(n) - X(n)$$

bất biến theo môđun 3.

Từ đó suy ra không thể nhận được trạng thái mà trên bàn chỉ còn lại các viên bi cùng màu.

13. a) Xét hình vuông cạnh $2n+1$ có tâm là ô chứa số 0: số được viết ở đỉnh dưới, bên trái của hình vuông này là $(2n+1)^2-1$ (ví dụ các số: $8, 24, \ldots$).

Vì $(2\times 22+1)^2-1=2024$ và số 0 nằm ở ô dòng số 1002, cột số 1002 nên số 2024 nằm ở hàng số $1002-22=980$ và cột số $1002-22=980$. Vậy số 2004 nằm ở hàng số $980+20=1000$ và cột số 980.

b) Ta đánh dấu các ô của bảng như hình vẽ.

X			X			X			X			X
		X			X			X			X	
	X			X			X			X		
X			X			X			X			X
		X			X			X			X	
	X			X			X			X		
X			X			X			X			X
		X			X			X			X	
	X			X			X			X		
X			X			X			X			X
		X			X			X			X	
	X			X			X			X		
X			X			X			X			X

Gọi $S(n)$ là tổng các số trong các ô được đánh dấu ở bước thứ n. Do mỗi lần thực hiện thuật toán (kể từ lần thứ 2) có đúng 4 ô được đánh dấu tham gia nên

$$S(n+1)=S(n)+4, \forall n\geq 1.$$

Do đó $S(n)$ bất biến theo modun 4. Suy ra

$$S(n)\equiv S(1) \pmod 4, \forall n\geq 1.$$

Ta xét số dư của $S(0)$ khi chia cho 4:

Xét các đường chéo gồm những ô được đánh dấu, các đường chéo đó gồm một trong ba loại:

• Loại 1 chứa toàn các số chia hết cho 4 (đường chéo đi qua ô trung tâm)

• Loại 2 chứa toàn các số chia cho 4 dư 2: Do tính đối xứng của bảng nên có chẵn đường chéo loại này và như vậy tổng các số trên các đường chéo loại này chia hết cho 4.

• Loại 3 chứa toàn các số lẻ: Trên mỗi đường chéo loại này có một nửa số ô chứa các số chia cho 4 dư 1 và một nửa số ô chứa các số chia cho 4 dư -1 và như vậy tổng các số trong các đường chéo loại này cũng chia hết cho 4.

Từ đó có $S(0) \equiv 0 \pmod 4$, suy ra $S(1) = S(0) + 1998 \equiv 2 \pmod 4$ hay $S(n) \equiv 2 \pmod 4, \forall n \geq 1$.

Vậy không thể có trạng thái mà tất cả các số trong bảng đều là bội của 2004 được.

14. *Đáp số* : $n = 4k$ hoặc $n = 4k + 1$.

Giả sử sau m bước ta nhận được dãy $x_n, x_{n-1}, ..., x_1$. Ta quy ước, cặp số (x_i, x_j) gọi là một cặp số đẹp nếu $i < j$ và x_i đứng trước x_j trong dãy. Gọi $S(k)$ là số cặp số đẹp ở bước thứ k. Mỗi lần thực hiện thuật toán thì có thể xem như thực hiện một số chẵn lần việc đổi chỗ hai số hạng liên tiếp. Mỗi lần đổi chỗ hai số hạng liên tiếp thì số cặp số đẹp tăng lên 1 hoặc giảm đi 1, do đó

$$S(k+1) \equiv S(k) \pmod 2, \ \forall k \geq 0.$$

Mặt khác

$$S(0) = \frac{n(n-1)}{2}, S(m) = 0 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} \equiv 0 \pmod 2.$$

Từ đó suy ra $n = 4k$ hoặc $n = 4k + 1$.

Với $n = 4k$ ta thực hiện việc đổi chỗ lần lượt cho các bộ:

$$(x_1, x_2, x_{4k-1}, x_{4k}), (x_3, x_4, x_{4k-3}, x_{4k-2}), ..., (x_{2k-1}, x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+2}).$$

Với $n = 4k + 1$ ta thực hiện việc đổi chỗ lần lượt cho các bộ:

$$(x_1, x_2, x_{4k}, x_{4k+1}), ..., (x_{2k-1}, x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+2}) \text{ (giữ nguyên} x_{2k+1}).$$

15. Tô màu các ô của bàn cờ bởi ba màu như hình vẽ

1	2	3	1	2	3	...
2	3	1	2	3	1	...
3	1	2	3	1	2	...
1	2	3	1	2	3	...
2	3	1	x	3	1	...
3	1	2	3	1	2	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...
1	2	3	1	2	3	...
2	3	1	2	3	1	...
3	1	2	3	1	2	...

Gọi $s(i)$ là tổng số quân cờ trong các ô màu i. Tại mọi thời điểm ta luôn có $s(1), s(2), s(3)$ cùng tính chẵn lẻ. Do đó không thể có trạng thái mà trên bảng chỉ còn lại đúng một quân cờ.

16. a) Ta đánh dấu bảng theo hai cách như như hình vẽ dưới đây. Nếu người thứ nhất phủ được phần còn lại thì phải đặt quân hình chữ L theo hai cách khác nhau: vô lí.

1	2	3	1	2	3	1		1	3	2	1	3	2	1
2	3	1	2	3	1	2		2	1	3	2	1	3	2
3	1	2	3	1	2	3		3	2	1	3	2	1	3
1	2	3	1	2	3	1		1	3	2	1	3	2	1
2	3	1	x	3	1	2		2	1	3	x	1	3	2
3	1	2	3	1	2	3		3	2	1	3	2	1	3
1	2	3	1	2	3	1		1	3	2	1	3	2	1

Quân hình chữ L cần phủ ba ô xung quanh ô đánh dấu x: ô chứa số 3 và hai số 1.

b) Ta thu hẹp dần bảng đã cho nhờ các nhận xét sau:

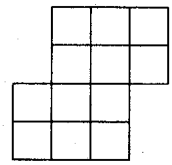
• Quân cờ của người thứ hai phải rơi vào một trong bốn hình vuông 4×4 có một đỉnh trùng với một trong bốn đỉnh của bảng ban đầu, nên chỉ cần xét bảng B với kính thước 4×4.

• Trong bảng B, quân cờ phải rơi vào một trong 4 hình vuông 2×2 có một đỉnh trùng với một trong bốn đỉnh của B, nên chỉ cần xét trong bảng C với kích thước 2×2. Từ đó có đpcm.

17. Dễ thấy $m, n \notin \{1, 2, 5\}$. Chia hình chữ nhật $m \times n$ thành $m \times n$ ô vuông và đánh số các hàng, các cột từ dưới lên trên, từ trái sang phải. Ta gọi

ô (p, q) là ô nằm ở giao của hàng thứ p và cột thứ q. Hai viên gạch hình móc câu chỉ có thể ghép lại để được một trong hai hình dưới đây

(H_1)



(H_2)

Do đó, để lát được hình chữ nhật $m \times n$ thì $m.n$ phải chia hết cho 12. Nếu ít nhất một trong hai số m hoặc n chia hết cho 4 thì có thể lát được hình chữ nhật $m \times n$. Thật vậy, giả sử được m chia hết cho 4. Nếu n chia hết cho 3 thì có thể chia hình chữ nhật $m \times n$ thành các hình chữ nhật 4×3, do đó có thể lát được. Nếu n không chia hết cho 3 thì có thể viết n dưới dạng $n = 3a + 4b$ với a, b là các số nguyên dương, do đó có thể lát được.

Bây giờ ta chứng minh một trong hai số m, n chia hết cho 4. Giả sử ngược lại, khi đó cả m và n chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4. Để chứng minh điều này không xảy ra ta tạo ra bất biến. Để tạo bất biến ta điền các số vào các ô của hình chữ nhật theo quy tắc sau: Xét ô (p, q). Nếu chỉ một trong hai tọa độ p hoặc q chia hết cho 4 thì điền số 1 vào ô đó. Nếu cả hai tọa độ p và q chia hết cho 4 thì điền số 2 vào ô đó. Với cách điền số như vậy ta thu được bất biến là tổng các số trong hình (H_1) và tổng các số trong hình (H_2) luôn là số lẻ. Do m, n chẵn nên tổng các số trong toàn bộ hình chữ nhật $m \times n$ là một số chẵn. Muốn lát được hình chữ nhật $m \times n$ thì tổng số hình (H_1) và (H_2) được sử dụng phải là số chẵn. Khi đó, $m.n$ chia hết cho 24. Điều này không xảy ra vì cả m, n đều không chia hết cho 4. $\square$