

BÀI TẬP LUYỆN THI OLYMPIC TOÁN HỌC TOÀN MIỀN NAM LẦN THỨ XVIII

Chủ đề: TỔ HỢP

(VĂN PHÚ QUỐC- GV. TRƯỜNG ĐH QUẢNG NAM)

I. BÀI TẬP VỀ NGUYÊN LÝ DIRICHLE

1. Bên trong một tam giác đều cạnh bằng 1 ta đặt 17 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn $\frac{1}{4}$.

HD:

Chi một tam giác đã cho thành 16 tam giác đều nhỏ, cạnh có độ dài bằng $\frac{1}{4}$.

Theo nguyên tắc Dirichlet thì tồn tại ít nhất hai điểm cùng nằm trong một tam giác nhỏ. Hai điểm này có khoảng cách nhỏ hơn $\frac{1}{4}$.

2. Trong một cuộc giao lưu, mỗi người đều bắt tay với ít nhất một người khác. Chứng minh rằng có ít nhất hai người có cùng số lần bắt tay.

HD:

Giả sử cuộc giao lưu đó có n người. Vì số lần bắt tay của mỗi người nằm trong khoảng từ 1 đến $n-1$ nên ít nhất có hai người có số lần bắt tay bằng nhau.

3. Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 6 và chia hết cho 2003.

HD:

Xét 2004 số có dạng: $6, 66, 666, \dots, 666\dots 6$. Theo nguyên lý Dirichlet thì tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 2003. Giả sử hai số đó là: $A = \underbrace{66\dots 6}_n$, $B = \underbrace{66\dots 6}_k$ ($k < n$).

Khi đó: $A - B = \underbrace{66\dots 6}_{n-k} \cdot 10^k$ chia hết cho 2003.

Vì $(2003, 10^k) = 1$ nên $C = \underbrace{66\dots 6}_{n-k}$ chia hết cho 2003.

4. Chứng minh rằng trong 27 số nguyên khác nhau nhỏ hơn 100 có thể chọn được hai số có ước chung lớn nhất khác 1.

HD:

Từ 1 đến 100 có tất cả 26 số nguyên tố. Khi phân tích 27 số đã cho ra thừa số nguyên tố có ít nhất hai số cùng chứa một thừa số nguyên tố nào đó. Hai số này có ước chung lớn nhất khác 1.

5. Trong một hình vuông cạnh bằng 1 (đơn vị dài) có 101 điểm phân bố tùy ý. Chứng minh rằng có ít nhất hai điểm nằm trong hình tròn bán kính $\frac{1}{7}$.

HD:

Chia hình vuông thành 25 hình vuông cạnh $\frac{1}{5}$. Khi đó tồn tại một hình vuông nhỏ chứa ít nhất 5 điểm.

Các điểm này nằm trong một hình tròn bán kính bằng $\frac{1}{7}$

6. Cho 40 số nguyên dương: $a_1, a_2, \dots, a_{19}$ và $b_1, b_2, \dots, b_{21}$ thỏa mãn:
$$\begin{cases} 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{19} \leq 200 \\ 1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_{21} \leq 200 \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại bộ số a_i, a_j, b_k, b_p ($1 \leq i, j \leq 19, 1 \leq k, p \leq 21$) sao cho:
$$\begin{cases} a_i < a_j \\ b_k < b_p \\ a_j - a_i = b_p - b_k \end{cases}.$$

HD:

Xét các tổng dạng: $a_i + b_j$. Có tất cả $19 \cdot 21 = 399$ tổng như thế. Các tổng này nhận giá trị từ 2 đến 400.

Nếu các tổng trên nhận đủ 399 giá trị từ 2 đến 400 thì $a_1 = b_1 = 1$ và $a_{19} = b_{21} = 200$, như thế ta có điều phải chứng minh.

Nếu các tổng trên không nhận đủ 399 từ 2 đến 400 thì có hai tổng bằng nhau và ta cũng có điều phải chứng minh.

7. Cho tập $X = \{1, 2, 3, \dots, 200\}$. Chứng minh rằng với mọi tập con A của X có số phần tử bằng 101 luôn tồn tại hai phần tử mà phần tử này là bội của phần tử kia.

HD:

Giả sử $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{101}\}$. Viết các số a_i dưới dạng: $a_i = 2^{a_i} \cdot b_i$, trong đó b_i là số lẻ. Xét các số lẻ $b_1, b_2, \dots, b_{101} \in X$ và trong X chỉ có 100 số lẻ nên $b_i = b_j$ ($i \neq j$). Trong hai số a_i, a_j có một số là bội số kia.

8. Cho tập $X = \{1, 2, 3, \dots, 81\}$. Chứng minh rằng trong 3 phần tử tùy ý của X luôn có hai phần tử a, b sao cho: $0 < \sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b} < 1$.

HD:

Xét 3 phần tử $x_1, x_2, x_3 \in X$. Đặt $c_i = \sqrt[4]{x_i}$, $i = 1, 2, 3$ ta có: $1 \leq c_i \leq 3$. Chia khoảng $[1; 3]$ thành hai khoảng $[1; 2]$ và $[2; 3]$. Theo nguyên lý Dirichlet thì ba trong số c_1, c_2, c_3 có hai số cùng thuộc một

Bài tập luyện thi Olympic Toán học toàn miền Nam lần thứ XVIII - Dành cho HS lớp 10 chuyên Toán
trong hai khoảng nói trên. Giả sử hai số đó là: $x = \sqrt[4]{a}$ và $y = \sqrt[4]{b}$ thì a, b là hai số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

9. Cho tập $A = \{1, 2, \dots, 16\}$. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố.

HD:

- Nếu a, b chẵn thì $a^2 + b^2$ là hợp số. Do đó nếu tập con X của A có hai phần tử phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố thì X không thể chỉ chứa các số chẵn. Suy ra: $k \geq 9$. Ta chứng tỏ $k = 9$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm. Điều đó có ý nghĩa là với mọi tập con X gồm 9 phần tử bất kỳ của A luôn tồn tại hai phần tử phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố. Để chứng minh khẳng định trên ta chia tập A thành các cặp hai phần tử phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố, ta có tất cả 8 cặp:

$$(1; 4), (2; 3), (5; 8), (6; 11), (7; 10), (9; 16), (12; 13), (14; 15).$$

Theo nguyên lý Dirichlet thì 9 phần tử của X có hai phần tử cùng thuộc một cặp và ta có điều phải chứng minh.

10. Cho các số thực a_i, b_i ($i = 1, 2, \dots, 2009$) thỏa mãn: $a_i^2 + b_i^2 = 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, 2009$. Chứng minh rằng

tồn tại cặp chỉ số (p, q) với $1 \leq p < q \leq 2009$ sao cho $a_p a_q + b_p b_q > 1 - \frac{\pi^2}{2 \cdot (1004^2)}$.

HD:

Viết các số a_i, b_i dưới dạng: $a_i = \cos \alpha_i, b_i = \sin \alpha_i \quad (\alpha_i \in [0; 2\pi))$.

Ta có: $a_p a_q + b_p b_q = \cos(\alpha_p - \alpha_q)$.

Chia khoảng $[0; 2\pi)$ thành 2008 khoảng, mỗi khoảng có độ dài $d = \frac{\pi}{1004}$:

$$[0; 2\pi) = \left[0; \frac{\pi}{1004}\right) \cup \left[\frac{\pi}{1004}; \frac{2\pi}{1004}\right) \cup \dots \cup \left[\frac{2007\pi}{1004}; 2\pi\right).$$

Theo nguyên lý Dirichle thì có hai số α_p, α_q cùng thuộc một khoảng. Ta có: $0 < |\alpha_p - \alpha_q| < \frac{\pi}{1004}$.

Suy ra: $a_p a_q + b_p b_q = \cos(\alpha_p - \alpha_q) > \cos \frac{\pi}{1004} > 1 - \frac{\pi^2}{2 \cdot (1004^2)}$.

II. BÀI TẬP VỀ NGUYÊN TẮC CỰC HẠN

1. Trên bảng có 2012 câu khẳng định:

Câu 1: Trên bảng có ít nhất một câu khẳng định sai.

Câu 2: Trên bảng có ít nhất 2 câu khẳng định sai.

.....

Câu 2012: Trên bảng có ít nhất 2012 câu khẳng định sai.

Hỏi những câu nào đúng?

HD:

Gọi A là tập hợp các chỉ số k sao cho câu khẳng định thứ k là câu đúng. Vì câu thứ 2012 không thể là câu đúng nên câu 1 là câu đúng, do đó $A \neq \emptyset$. Vì A có hữu hạn phần tử nên tồn tại một phần tử k lớn nhất. Do $k \in A$ nên $1, 2, \dots, k-1 \in A$. Do k là phần tử lớn nhất của A nên $k+1, \dots, 2012 \notin A$. Suy ra: $|A| = k$.

Gọi B là tập hợp các chỉ số k sao cho câu khẳng định thứ k là câu sai. Do khẳng định thứ k là câu đúng nên $|B| \geq k$. Do câu khẳng định thứ $k+1$ sai nên $|B| \leq k$. Suy ra: $|B| = k$.

Mặt khác. $|A| + |B| = 2012$ nên $k = 1006$.

Vậy các câu khẳng định đúng là $1, 2, \dots, 1006$.

2. Sau một giải bóng bàn theo thể thức đấu vòng tròn, mỗi đấu thủ được gọi tên những người thua mình và những người thua những người thua mình. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một đấu thủ được gọi tên các đấu thủ còn lại.

HD:

Xét đấu thủ A được gọi tên nhiều đấu thủ khác nhất. Ta chứng minh A được gọi tên các đấu thủ. Giả sử trái lại, A được gọi tên $A_1, A_2, \dots, A_n$ và tồn tại B mà A không gọi tên. Khi đó B được gọi tên $A, A_1, A_2, \dots, A_n$: trái với cách chọn A .

3. Có 2012 điểm trên mặt phẳng sao cho các tam giác bất kỳ có 3 đỉnh là 3 trong số 2012 điểm đã cho đều có diện tích không vượt quá 1 (đơn vị diện tích). Chứng minh rằng có thể đặt 2012 điểm đã cho trong một tam giác có diện tích không vượt quá 4 (đơn vị diện tích).

HD:

Vì số tam giác có 3 đỉnh là 3 trong số 2012 điểm đã cho là hữu hạn nên tồn tại một tam giác T có diện tích lớn nhất. Giả sử 3 đỉnh của T là X, Y, Z . Xét tam giác ABC sao cho X, Y, Z tương ứng là các trung điểm của các cạnh BC, CA, AB .

Ta có $S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle XYZ} \leq 4$. Ta sẽ chứng minh 2012 điểm đã cho nằm trong tam giác ABC ?

Bài tập luyện thi Olympic Toán học toàn miền Nam lần thứ XVIII - Dành cho HS lớp 10 chuyên Toán
Thật vậy, tồn tại điểm M nằm trong 2012 điểm đã cho nằm ngoài tam giác ABC . Không mất tính tổng quát có thể giả sử M nằm khác phía A đối với BC . Khi đó: $S_{\triangle MYZ} > S_{\triangle XYZ}$ (vô lý).

4. Một tập M gồm những điểm nằm trên một đường thẳng sao cho: mỗi điểm đều là trung điểm của một đoạn thẳng nối hai điểm nào đó trong số còn lại. Chứng minh rằng M có vô hạn điểm.

HD: Giả sử M có hữu hạn điểm. Khi đó tồn tại hai điểm A, B sao cho khoảng cách AB lớn nhất. Theo giả thiết A phải là trung điểm của một đoạn thẳng CD nào đó. Giả sử D nằm khác phía với B so với A . Khi đó $BD > AB$: trái với cách chọn hai điểm A và B .

5. Trên mặt phẳng tọa độ có 3 điểm nguyên nằm trên một đường tròn bán kính r . Chứng minh rằng tồn tại hai điểm mà khoảng cách giữa chúng không nhỏ hơn $\sqrt[3]{r}$.

HD:

Giả sử ba điểm đã cho là A, B, C và a là độ dài cạnh lớn nhất của $\triangle ABC$. Ta có: $abc = 4rS$. Hơn nữa dễ thấy $2S \in \mathbb{Z}$ nên $S \geq \frac{1}{2}$. Suy ra: $abc \geq 2r \Rightarrow a^3 \geq 2r > r \Rightarrow a > \sqrt[3]{r}$.

6. Cho a, b là các số nguyên dương và $b \leq a$. Biết rằng tồn tại cặp số nguyên dương $(u; v)$ sao cho $u^2 + v^2 - auv = b$. Chứng minh rằng b là số chính phương.

HD:

Chọn cặp $(u; v)$ sao cho $u + v$ nhỏ nhất. Giả sử: $u \geq v$.

Xem $u^2 + v^2 - auv = b$ là PT bậc 2 đối với u và gọi u' là nghiệm thứ hai. Vì $u' + u = av$ nên $u' \in \mathbb{Z}$.

Vì $u'^2 + v^2 \leq a(u'v + 1)$ nên $u' \geq 0$.

- Nếu $u' = 0$ thì $b = v^2$ là số chính phương.

- Nếu $u' > 0$ thì $uu' = v^2 - b$ ta suy ra $u' < v \leq u$. Suy ra: $u' + v < u + v$ vô lý.

7. Cho n là số nguyên dương và $n \geq 2$. Chứng minh rằng tổng sau không thể là số nguyên:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

HD:

Xét tập $A = \{x \in \mathbb{N} : 2^x \leq n\}$. Vì A bị chặn trên nên A có phần tử lớn nhất. Giả sử $M = \max A$. Gọi a là tích của các số lẻ không vượt quá n . Xét $b = 2^{M-1}a$. Ta có b là bội của tất cả các phần tử của tập hợp $\{2; 3; 4; \dots; n\} \setminus \{2^M\}$. Do đó $b.S = \frac{b}{2} + \frac{b}{3} + \dots + \frac{b}{2^M} + \dots + \frac{b}{n} \notin \mathbb{Z}$. Vậy $S \notin \mathbb{Z}$.

8. Cho x, y là các số nguyên sao cho $A = \frac{x^2 + y^2 + 6}{xy}$ là một số nguyên. Chứng minh rằng A là một lập phương đúng.

HD:

Giả sử $x, y > 0$. Cố định A , chọn cặp x, y sao cho $x + y$ nhỏ nhất và $x \geq y$. Coi $x^2 + y^2 + 6 - Axy = 0$ là phương trình bậc hai đối với x và gọi x' là nghiệm còn lại. Ta có: $x' + x = Ay$, $x'x = y^2 + 6$ nên $x' \in \mathbb{Z}$ và $x' > 0$. Do cách chọn các cặp x, y nên $x' \geq x$ và $x^2 \leq y^2 + 6$.

Suy ra $x^2 - y^2 \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Nếu $x = y$ thì do A là số nguyên nên $x^2 \mid 6$ hay $x = 1$. Khi đó $A = 8$ là lập phương đúng.

Nếu $x > y$ thì bằng cách giải trực tiếp phương trình nghiệm nguyên ta suy ra không tồn tại x, y .

9. Cho n, p là các số nguyên dương và $n \geq 3$. Tìm nghiệm dương của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^p \\ x_2 + x_3 = x_4^p \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1} + x_n = x_1^p \\ x_n + x_1 = x_2^p \end{cases}$$

HD:

Giả sử $M = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$, $m = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$.

Vì $M, m \in \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ nên ta có: $M^p = x_k + x_{k+1}$, $m^p = x_s + x_{s+1}$.

Do $x_k, x_{k+1} \leq M$ và $x_s, x_{s+1} \geq m$ nên $M^p \leq 2M$, $m^p \geq 2m$.

Do đó: $M \leq \sqrt[p-1]{2}$, $m \geq \sqrt[p-1]{2}$. Do $M \geq m$ nên $M = m = \sqrt[p-1]{2}$. Vậy $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \sqrt[p-1]{2}$.

10. Chứng minh rằng phương trình nghiệm nguyên $x^3 = 2y^3 + 4z^3$ không có nghiệm nào khác nghiệm $x = y = z = 0$.

HD:

Giả sử ngoài nghiệm $x = y = z = 0$, phương trình còn có nghiệm $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Trong các nghiệm như vậy, chọn ra được nghiệm (x_0, y_0, z_0) có tổng $|x_0| + |y_0| + |z_0|$ nhỏ nhất.

Vì (x_0, y_0, z_0) là nghiệm của phương trình nên $x_0^3 = 2y_0^3 + 4z_0^3$.

Suy ra x_0 chia hết cho 2. Đặt $x_0 = 2x_1$ ta được: $4x_1^3 = y_0^3 + 2z_0^3$.

Suy ra y_0 chia hết cho 2. Đặt $y_0 = 2y_1$ ta được: $2x_1^3 = 4y_1^3 + z_0^3$.

Suy ra z_0 chia hết cho 2. Đặt $z_0 = 2z_1$ ta được: $x_1^3 = 2y_1^3 + 4z_1^3$.

Suy ra (x_1, y_1, z_1) cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Hơn nữa $(x_1, y_1, z_1) \neq (0, 0, 0)$ và $|x_1| + |y_1| + |z_1| < |x_0| + |y_0| + |z_0|$ trái với cách chọn (x_0, y_0, z_0) .

Vậy ngoài nghiệm $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ phương trình không còn nghiệm nguyên nào khác.