MỘT CÁCH TẠO RA HẰNG ĐẲNG THỨC VỀ SỐ TỔ HỢP

Trong nhiều bài toán khác nhau, chúng ta thường gặp các hằng đẳng thức có chứa các hệ số tổ hợp C_k^i. Thông thường, có thể chứng minh các công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học, hoặc bằng những biến đổi mẹo mực. Nhưng khi chứng minh xong vẫn không làm chúng ta thoả mãn: Vì sao người ta lại nghĩ ra được các công thức đó và làm thế nào để có thêm các công thức mới nữa?

Ở đây, sẽ chỉ ra một số thủ thuật cho phép suy ra những đẳng thức tương tự như vậy.

Giả sử, chúng ta cần tìm tổng : $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$. Thử nhớ xem, ở đâu chúng ta đã gặp biểu thức kx^{k-1}? Dĩ nhiên đấy là công thức : $(x^k)' = kx^{k-1}$.

Ta có : $(\sum_{k=1}^{n} x^k)' = \sum_{k=1}^{n} (x^k)' = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$

Mặt khác : $$\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)' = \left(\frac{x^{n+1}-x}{x-1}\right)' = \frac{\left[(n+1)x^n - 1\right](x-1)-(x^{n+1}-x)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{nx-n-1}{(1-x)^2}x^n.$$

(Trong các tính toán này dĩ nhiên giả thiết $x \neq 1$).

Như vậy : $$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{nx-n-1}{(1-x)^2}x^n. \qquad (1)$$

Bây giờ, chúng ta thử tìm : $\sum_{k=1}^{n} k(k-1)x^{k-2}$.

Thử lặp lại cách cũ !

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=1}^{n} (kx^{k-1})' = (\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1})' = \left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{nx-n-1}{(1-x)^2}x^n\right)'$$

$$= \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{n(1-x)^2 + 2(1-x)(nx-n-1)}{(1-x)^4} x^n + \frac{n(nx-n-1)}{(1-x)^2} x^{n-1}. \qquad (2)$$

Các đẳng thức (1) và (2) khá cồng kềnh. Trên cơ sở các công thức đó, có thể (với $|x| < 1$) nhận được công thức khá đẹp đẽ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+n}^{n} x^k = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}.$$

Bây giờ chúng ta xét một thủ thuật cho phép nhận được các hằng đẳng thức mới từ các hằng đẳng thức đã biết. Xét nhị thức Niu-tơn nổi tiếng :

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i.$$

Lấy đạo hàm cả hai vế : $n(1+x)^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} iC_n^i x^{i-1}$. (3)

Thay $x = 1$ và $x = -1$ vào (3) ta có :

$$\sum_{i=1}^{n} iC_n^i = n.2^{n-1}\ ;\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} iC_n^i = 0.$$

Lại tiếp tục đạo hàm hai vế của (3) ta có :

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{i=1}^{n} i(i-1)C_n^i x^{i-2}.$$

Thay $x = 1$ và $x = -1$ vào đẳng thức này ta có :

$$\sum_{i=1}^{n} i(i-1)C_n^i = n(n-1)2^{n-2}\ ;\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-2} i(i-1)C_n^i = 0.$$

Nhờ phương pháp đạo hàm, có thể nhận được nhiều công thức mới. Chỉ cần lấy một hằng đẳng thức nào đấy và lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức đó.

Nhiều bạn đã gặp hằng đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{n} \sin ix = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x.\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}. \qquad (4)$$

(Bạn hãy thử chứng minh xem với $x \neq 2\pi m$?).

Lấy đạo hàm cả hai vế của (4) :

$$\sum_{i=1}^{n} i\cos ix = \frac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Thay vào công thức này, ví dụ, $x = \pi$, ta có :

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i i = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}.$$

Dĩ nhiên, công thức này có thể chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học, nhưng vấn đề thú vị là ở chỗ ta đã biết, làm thế nào để có được công thức này !

Bây giờ chúng ta thực hiện vấn đề phức tạp hơn : Đầu tiên, lôgarit hoá hằng đẳng thức, sau đó mới lấy đạo hàm hai vế của hằng đẳng thức.

Bắt đầu từ hằng đẳng thức

$$\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{x}{2^i} = \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}). \tag{5}$$

Lôgarít hoá hai vế của (5) và sau đó lấy đạo hàm hai vế, ta có :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\operatorname{tg}\frac{x}{2^i} = \frac{1}{2^n}\operatorname{cotg}\frac{x}{2^n} - \operatorname{cotg}x.$$

Đây là hằng đẳng thức mà có lẽ nhiều bạn đã gặp trong các sách toán. Có điều, bây giờ chúng ta đã biết, làm thế nào để nghĩ ra công thức đó.

Chúng ta sẽ tìm một số công thức khác.

Trước tiên, ta phải công nhận có công thức sau :

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

(Công thức này chứng minh không phức tạp lắm, theo công thức tích phân từng phần).

Sử dụng công thức này, ta có thể suy ra công thức sau :

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{C_n^i} = (n+1)\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i i!(n-i)!}{(n+1)!} = (n+1)\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\int_0^1 x^{n-i}(1-x)^i dx =$$

$$= (n+1)\int_0^1 x^n\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(1-\frac{1}{x})^i dx$$

$$= (n+1)\left(\int_0^1 x^{n+1}dx - \int_0^1 (x-1)^{n+1}dx\right) = \frac{n+1}{n+2}[1+(-1)^n]$$

Một công thức khác :

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i C_n^i}{ai+1} = \frac{n!a^n}{(a+1)(2a+1)...(na+1)}.$$

Công thức này suy ra từ hằng đẳng thức tích phân :

$$\int_0^1 (1-x^a)^n dx = \frac{n!a^n}{(a+1)(2a+1)...(na+1)}$$

vì

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i C_n^i}{ai+1} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i \int_0^1 x^{ai}dx = \int_0^1 (1-x^a)^n dx .$$