# *Chủ đề 9.* Đại lượng bất biến

## I. Tóm tắt lý thuyết

Trong nhiều bài toán, khi thực hiện một số thao tác trên một hệ đối tượng nào đó có thể rất phức tạp nhưng ẩn chứa đại lượng không đổi sau mỗi thao tác, chẳng hạn: tính chẵn lẻ, tổng các số không đổi, hiệu hai số không đổi, tích các số không đổi, ... Nhờ việc phát hiện ra các đại lượng không đổi hay cố tình đưa ra đại lượng không đổi mà ta gọi chung là *đại lượng bất biến* cùng với lập luận ta đưa ra kết luận của bài toán. Việc vận dụng đại lượng không đổi để giải toán gọi là *phương pháp đại lượng bất biến.*

## II. Các bài toán có hướng dẫn giải

**Bài toán 1.** Một tờ giấy được xé thành 4 mảnh, mỗi tờ giấy trong đó một số tờ giấy trong bốn mảnh nhỏ này lại được xé thành 4 mảnh nhỏ nữa và một số trong các mảnh nhỏ này lại được xé thành 4 mảnh, ..., tiếp tục như vậy thì có khi nào ta thu được 2012 mảnh giấy hay không? Vì sao?

**Hướng dẫn giải**

Số các mảnh giấy tăng lên sau mỗi lần xé là 3 (mảnh) (đây là đại lượng bất biến trong quá trình xé giấy).

Ở lần xé thứ n, số mảnh giấy là $1 + 3n$ (mảnh) với $n \in \mathbb{N}$.

Vì $2012 = 3.670 + 2 \neq 3n + 1$ nên ta không thể thu được 2012 mảnh giấy.

**Bài toán 2.** Người ta viết lên bảng 2013 số $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2012}, \frac{1}{2013}$. Mỗi lần thực hiện xóa đi hai số bất kì x, y trên bảng thì ta viết thêm vào số $xy + x + y$ (các số còn lại giữ nguyên). Sau một số lần thực hiện phép xóa thì trên bảng còn lại một số. Tìm số còn lại.

**Hướng dẫn giải**

Đặt $m = xy + x + y$ thì $m + 1 = xy + xy + y + 1 = (x + 1)(y + 1)$.

Suy ra, cộng mỗi số trên bảng với 1 thì sau mỗi lần thực hiện xóa đi hai số $x + 1, y + 1$ thì ta viết lên bảng số $(x + 1)(y + 1)$.

Nếu lúc đầu có dãy số x, y, a, b, c, ... thì sau đó có dãy m, a, b, c, ... (xóa x, y và thay bằng m).

Vì $(x + 1)(y + 1)(a + 1)(b + 1)(c + 1)\ldots=(m + 1)(a + 1)(b + 1)(c + 1)\ldots.$

Lúc này, tích các số trên bảng sau mỗi lần thực hiện xóa và thay số là không đổi (đây là đại lượng bất biến trong quá trình thay số).

Vậy, nếu cuối cùng còn số k thì:

$$k+1=\left(\frac{1}{1}+1\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2013}+1\right)=2014.$$

Suy ra $k = 2013$.

**Bài toán 3**. Cho tam thức bậc hai f(x). Mỗi lần thay tam thức này bởi một trong các tam thức $x^2.f\left(1+\frac{1}{x}\right)$ hoặc $(x-1)^2.f\left(\frac{1}{x-1}\right)$, có thể sau một số lần thay như trên để từ tam thức $x^2+4x+3$ ta nhận được tam thức $x^2+10x+9$ không? Vì sao?

**Hướng dẫn giải**

Đặt $f(x) = ax^2+bx+c$ (1) thì $x^2.f\left(1+\frac{1}{x}\right)=(a+b+c)x^2+(b+2a)x+a$ (2)

và $(x-1)^2.f\left(\frac{1}{x-1}\right)=cx^2+(b-2c)x+(a-b+c)$ (3).

Các tam thức (1), (2) và (3) có cùng giá trị $\Delta = b^2-4ac$. Vì vậy, không thể từ $x^2+4x+3$ ( với $\Delta = 4$) để đưa đến $x^2+10x+9$ (với $\Delta = 64$).

**Bài toán 4**. Trên bảng cho bốn số. Mỗi lần thay hai số a, b trong bốn số đó bởi hai số a + b + $\sqrt{a^2+b^2}$ và a + b − $\sqrt{a^2+b^2}$, giữ nguyên hai số còn lại. Giả sử ban đầu trên bảng có bốn số (2; 3; 4; 5) thì sau một số lần thực hiện như trên ta có thể thu được bốn số mới đều nhỏ hơn 1 hay không? Vì sao?

**Hướng dẫn giải**

Vì $\frac{1}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ nên sau mỗi lần thay số như trên thì tổng nghịch đảo của bốn số là không đổi.

Ta có $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<4$ và nếu cuối cùng có 4 số x, y, z, t < 1 (ta có x, y, z, t > 0) nên $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}>4$.

Vậy không thể thực hiện được yêu cầu bài ra.

**Bài toán 5**. Trên một hòn đảo có một loài tắc kè sinh sống, chúng có ba màu: xanh, đỏ và tím. Tất cả có 2011 con màu xanh, 2012 con màu đỏ, 2013 con màu tím. Để lẩn trốn và săn mồi thì loài tắc kè này biến đổi màu như sau: nếu hai con tắc kè khác màu gặp nhau thì chúng đồng thời đổi màu sang màu thứ ba. Nếu hai con tắc kè cùng màu gặp nhau thì giữ nguyên màu. Có khi nào tất cả các con tắc kè trở thành cùng màu được không? Vì sao?

**Hướng dẫn giải**

Xét số dư khi chia ba số 2011, 2012, 2013 cho 3 ta có ba số dư là: 1, 2, 0. Ta sẽ chứng minh số dư của các số tắc kè chia cho 3 có đầy đủ ba số dư 0, 1, 2 là đại lượng bất biến.

Nếu một con tắc kè xanh gặp một con tắc kè đỏ thì cả hai con tắc kè này chuyển thành màu tím nên số tắc kè lúc này là: 2010 con xanh, 2011 con đỏ và 2015 con tím. Lúc này các số dư của các số tắc kè chia cho 3 lần lượt là 0, 1, 2, như vậy vẫn đầy đủ ba số dư đã có ban đầu.

Nếu một con tắc kè xanh gặp một con tắc kè tím thì hai con tắc kè này chuyển thành màu đỏ nên số tắc kè lúc này là: 2010 màu xanh, 2014 con đỏ và 2012 con tím. Lúc này các số dư của các số tắc kè chia cho 3 lần lượt là 0, 1, 2, như vậy đầy đủ ba số dư đã có ban đầu.

Nếu một con tắc kè đỏ gặp một con tắc kè tím thì hai con tắc kè này chuyển thành màu xanh nên số tắc kè lúc này là: 2013 con xanh, 2011 con đỏ và 2012 con tím. Lúc này các số dư của các số tắc kè chia cho 3 lần lượt là 0, 1, 2 như vậy vẫn đầy đủ ba số dư đã có ban đầu.

Lập luận trên dẫn đến số dư của các số tắc kè chia cho 3 có đầy đủ ba số dư 0, 1, 2 là đại lượng bất biến.

Mặt khác, tổng tất cả tắc kè trên đảo là 2011 + 2012 + 2013 = 6036 là một số chia hết cho 3. Nếu tất cả tắc kè đều cùng một màu thì số dư của lượng tắc kè xanh, đỏ và tím chia cho 3 là 0, 0, 0. Điều này là vô lí nên không thể có trường hợp tất cả tắc kè trên đảo có cùng màu.