Chương 1
NGUYÊN LÍ BẤT BIẾN

1.1. Giới thiệu phương pháp đại lượng bất biến

Cho a, b, c là những số thực. Ta xét tổng $S = a + b + c$. Nếu ta đổi chỗ a cho b, b cho c và c cho a, thì tổng S luôn luôn chỉ là một. Tổng này không thay đổi đối với thứ tự thực hiện phép cộng. Dù a, b, c có thay đổi thứ tự như thế nào chăng nữa S vẫn không thay đổi, nghĩa là S *bất biến* đối với việc thay đổi các biến khác. Trong thực tế cũng như trong toán học, rất nhiều vấn đề liên quan đến một số đối tượng nghiên cứu lại bất biến đối với sự thay đổi của nhiều đối tượng khác. Ví dụ, nếu ta chuyển chỗ theo hướng một hình khối nào đó trong một mặt phẳng hoặc trong không gian, thì độ dài các cạnh, độ lớn các góc của hình, khối không thay đổi...

Ta có thể hiểu là : *Mọi đại lượng định tính hay tính chất và quan hệ giữa những phần tử của một hoặc một số tập hợp mà không thay đổi với một biến đổi nào đó được gọi là bất biến.*

Nhiều ví dụ chỉ ra rằng sự bất biến có trong môn số học, đại số và hình học,... Những bài toán có liên quan đến bất biến chia làm hai loại :

1. Những bài toán lấy bất biến làm kết luận (hoặc kết quả) phải tìm. Những bài toán loại này được liệt kê rất nhiều trong chương 1 của cuốn sách [11]. Những bất biến của bài toán là kết quả của quá trình lặp trong nội dung bài toán.

2. Những bài toán lấy tính bất biến làm phương pháp giải. Trong cuốn sách [11] có một phần rất nhỏ đề cập đến vấn đề này. Chương này ta đề cập đến các khía cạnh của loại bài toán này, cũng là trình bày phương pháp giải cho một lớp bài toán.

Bài toán xuất phát như một chuyện cổ tích :

Người Nông dân trồng được một cây khế thần có 99 quả chưa chín màu xanh và 1000 quả đã chín màu vàng. Một con Quạ đến ăn mỗi ngày hai quả khế và nói với người nông dân: "Ăn một quả trả cục vàng, may túi ba gang mang đi mà đựng". Quạ đến ăn hai quả khế bất kì không phân biệt quả xanh và quả vàng. Nếu Quạ ăn một quả vàng và một quả xanh thì cây khế lại sinh ra một quả xanh. Nếu Quạ ăn hai quả vàng, thì cây khế lại sinh ra một quả vàng. Nếu Quạ ăn hai quả xanh thì cây khế lại sinh cũng quả vàng. Hỏi có thể xảy ra trường hợp quả khế cuối cùng còn lại trên cây là màu vàng không ?

Để thuận tiện cho việc giải ta kí hiệu : Quả khế xanh là X; quả khế vàng là V; quạ ăn quả là $+$ và cây khế sinh ra quả là $=$. Khi đó bài toán có thể viết lại ngắn gọn:

$$V + V = V, \quad X + X = V, \quad V + X = X.$$

Từ cách viết trên ta thấy rằng số lượng quả xanh hoặc là không thay đổi hoặc là giảm đi 2 quả sau mỗi lần ăn (mỗi lần Quạ ăn hai quả). Vì trên cây số những quả màu xanh là lẻ, còn số những quả màu vàng là chẵn, nên quả cuối cùng trên cây sẽ là màu xanh, không phụ thuộc vào cách ăn quả của Quạ.

Tính bất biến trong bài toán trên là gì ? Đó là số những quả xanh dù Quạ có ăn quả như thế nào đi nữa thì nó không thay đổi hoặc nếu nó thay đổi thì thay đổi một cách cố định là giảm đi hai quả. Chính điều bất biến đối với quả xanh và giả thiết bài toán đưa ta đến lời giải. Như vậy việc tìm ra tính bất biến trong những đại lượng đã cho của bài toán là rất quan trọng.

Những bài toán có dạng như một quy trình hay thuật toán thường tồn tại một trạng thái khởi đầu và một dãy những bước đi hợp lệ (bước biến đổi). Kết luận của những bài toán loại này thường phải trả lời những câu hỏi sau đây :

1. Có thể đạt tới được trạng thái cuối cùng đã cho không ?
2. Tìm tất cả trạng thái cuối cùng có thể đạt tới ?
3. Có tồn tại giới hạn tiến tới một trạng thái cuối cùng không ?
4. Tìm tất cả chu kì có thể có trong dãy trạng thái ?

Phần sau đây ta xét những cách thức tìm tính bất biến trong một bài toán như thế nào thông qua các ví dụ.

1.2. Phát hiện bất biến trong bài toán

Thông qua ví dụ sau đây, bạn đọc sẽ thấy sự bất biến được nhìn từ những khía cạnh khác nhau đều giải được bài toán.

Ví dụ 1.1. *Trên bảng ta viết 10 dấu cộng và 15 dấu trừ tại các vị trí bất kì. Ta thực hiện xóa hai dấu bất kì trong đó và viết vào đó một dấu cộng nếu xóa hai dấu giống nhau và dấu trừ nếu xóa hai dấu khác nhau. Hỏi trên bảng còn lại dấu gì sau khi ta thực hiện thao tác trên 24 lần?*

Lời giải. *Cách 1:* Ta thay mỗi dấu cộng bằng số 1, còn mỗi dấu trừ bằng số -1. Thao tác thực hiện xóa hai số và viết lại một số sẽ là tích của chúng. Vì thế tích của tất cả các số viết trên bảng sẽ không thay đổi. Vì vậy ngay từ đầu giả thiết cho tích các số trên bảng bằng -1, thì cuối cùng cũng còn lại số -1, nghĩa là trên bảng còn lại dấu trừ.

Cách 2: Ta lại thay mỗi dấu cộng bằng số 0, còn dấu trừ bằng số 1. Thao tác thực hiện là tổng của hai số xóa đi là số chẵn thì ta viết lại số 0. Như vậy tổng các số trên bảng sau khi thực hiện một thao tác hoặc là không thay đổi hoặc là giảm đi 2. Đầu tiên tổng các số trên bảng là một số lẻ (bằng 15), thì số cuối cùng trên bảng còn lại là số lẻ, vậy là số 1. Nghĩa là trên bảng còn dấu trừ.

Cách 3: Bằng cách thay như ở cách 1, bây giờ sau mỗi lần thao tác, số -1 hoặc là không thay đổi hoặc là giảm đi 2. Vì thế lúc ban đầu số chữ số -1 là lẻ, thì cuối cùng chỉ còn lại một số -1, nghĩa là còn lại một dấu trừ. ☺

Phân tích ba cách giải ta thấy cách 1 lợi dụng tính không đổi của tích các số viết trên bảng; cách 2 sử dụng tính không đổi của tổng chẵn các số và cách 3 là sự không đổi của số chẵn các dấu trừ. Như vậy trong cách giải ta đã sử dụng tính chất bất biến của tích, tổng hoặc số lượng chẵn lẻ của các số. Qua cách giải trên ta thấy rằng khi gặp những lớp bài toán mà thao tác lặp đi lặp lại, ta phải biến đổi và tìm ra những tính bất biến của thao tác ta thực hiện. Chú ý rằng các thao tác ta thực hiện không phụ thuộc vào thao tác trên hai số nào bắt đầu, việc chứng minh nó tương tự như cách làm trên, bạn đọc làm bài tập 1.18 (ở cuối phần này). Một biến thể của bài toán trên được cho dưới dạng như ví dụ sau:

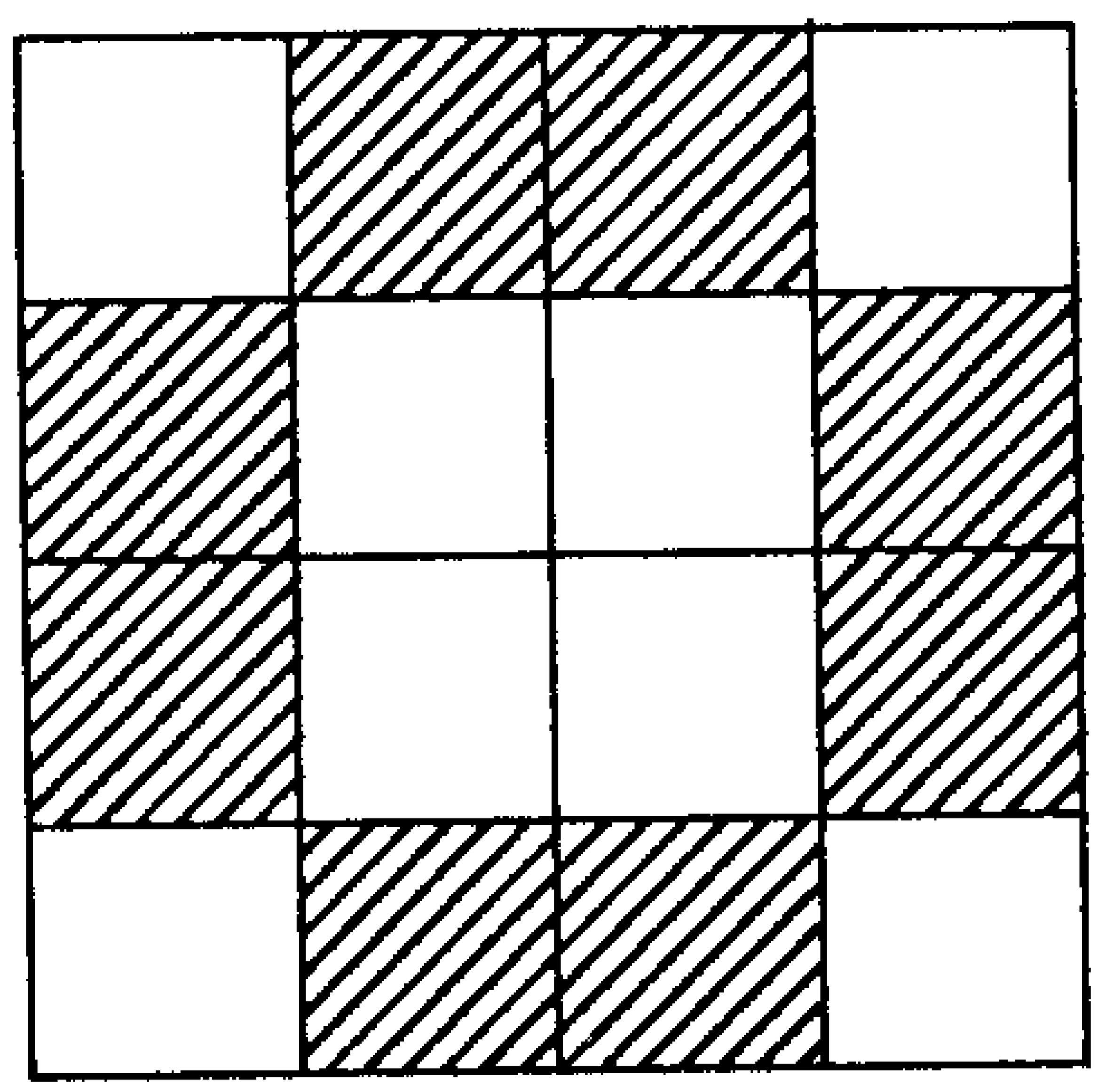
Ví dụ 1.2. *Bốn kí tự X và năm kí tự O được viết xung quanh một đường tròn theo một thứ tự bất kì. Nếu hai kí tự cạnh nhau là như nhau thì ta viết thêm vào giữa chúng X mới, ngược lại ta viết thêm vào giữa chúng O mới. Sau đó ta xóa những kí tự cũ X và O đi. Ta thực hiện thao tác trên lặp lại* *một số lần. Hỏi sau một số lần thực hiện quá trình trên, ta có nhận được chín kí tự O quanh đường tròn hay không?*

Lời giải. Nếu ta đặt X 1 và O 1, khi đó chú ý là giữa những kí tự cạnh nhau được thay bằng tích của chúng. Nếu ta xét tích P của tất cả giá trị trước và sau khi thực hiện một lần thay đổi, ta sẽ thấy rằng P mới bằng bình phương của P cũ. Do đó P luôn luôn bằng 1 sau khi thực hiện thay đổi. Nhưng chín kí hiệu O đòi hỏi P 1 không bao giờ có thể xảy ra. ☺

Ví dụ 1.3. *Một hình vuông có cạnh 4 cm được chia thành 16 ô vuông, mỗi ô vuông có cạnh 1cm. Trong mỗi ô vuông đánh dấu cộng (+), trừ một ô đánh dấu trừ ( ). Những dấu ở các ô vuông có thể thay đổi đồng thời theo hàng, cột hoặc đường chéo. Có khả năng sau hữu hạn lần đổi dấu theo nguyên tắc trên dẫn đến tất cả các ô vuông đều có dấu cộng (+) không?.*

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

Hình 1.1



Hình 1.2

Lời giải. Ta thay dấu cộng, trừ bằng các số tương ứng 1 và 1. Trạng thái ban đầu giả sử là hình 1.1. Đại lượng bất biến ở đây là tích các số ở các ô có gạch chéo trong hình 1.2, vì sau những thao tác mô tả trong bài toán đại lượng này luôn luôn có giá trị 1. Nghĩa là trong các ô được gạch chéo luôn luôn tồn tại một ô có số 1, suy ra không thể nhận được bảng không chứa một dấu trừ nào. ☺

Ví dụ 1.4. *Trên bảng ta viết tập hợp số gồm các số 0, 1 và 2. Ta thực hiện xóa đi hai số khác nhau và điền vào đó chữ số của số còn lại (nghĩa là 2 thay cho 0 và 1; 1 thay cho 0 và 2; 0 thay cho 2 và 1). Chứng minh rằng nếu sau một số lần thực hiện thao tác trên, trên bảng chỉ còn lại một chữ số duy nhất thì chữ số đó không phụ thuộc vào thứ tự thực hiện các thao tác các số đã có trên bảng.*

Lời giải. Ta thực hiện một lần thao tác thì số lượng mỗi loại trong ba loại số trên tăng lên hoặc giảm đi 1, suy ra số lượng các loại số thay đổi tính chẵn lẻ. Khi trên bảng chỉ còn lại một số, nghĩa là hai trong các số 0, 1 và 2 có số lượng bằng không, còn số thứ ba bằng một. Nghĩa là ngay từ đầu số lượng hai số trong ba số trên bảng phải có cùng tính chẵn lẻ và một loại số còn lại có tính chẵn lẻ khác. Vì thế không phụ thuộc vào thứ tự thực hiện thao tác, cuối cùng chỉ còn một trong các số 0, 1 và 2 còn lại, số này có số lượng chẵn lẻ khác với số lượng chẵn lẻ của hai số kia. ☺

Trong chứng minh bài toán trên, nếu số lượng cả ba loại số trên bảng có cùng tính chẵn lẻ thì dù có thực hiện các thao tác trên thế nào đi nữa, cuối cùng cũng không thể còn một số duy nhất trên bảng. Cách giải những ví dụ trên là rất điển hình, để củng cố phương pháp giải ta xét một vài bài toán sau :

Ví dụ 1.5. *Trên bảng ta viết ba số nguyên. Sau đó ta xóa đi một số và viết vào đó tổng hai số còn lại trừ đi 1. Thao tác như vậy lặp lại một số lần và cuối cùng ta nhận được ba số 17, 1967, 1983. Phải chăng những số đầu tiên trên bảng được viết là 2, 2, 2 ?*

Lời giải. Bài toán này là một bài toán khó đã được ra trong một kì thi học sinh giỏi ở Nga. Ta tưởng chừng như phải tìm lại các bước thực hiện từ ba số kết quả đến các số ban đầu. Nhưng bài toán có câu trả lời là: Với các thao tác đã ra, ta không thể thực hiện biến đổi từ ba số ban đầu đến ba số kết quả, khi đó các cách thử là vô vọng. Bài toán có cho thao tác biến đổi ba số nhưng không cho biết gì về bắt đầu từ số nào và thứ tự ra sao? Thế thì cái gì bất biến trong bài toán này ? Ta xét cụ thể :

Sau bước đầu tiên từ ba số $2, 2, 2$ ta nhận được $2, 2, 3$, ba số này có hai số chẵn và một số lẻ. Từ bước thứ hai trở đi thì kết quả luôn luôn có hai số chẵn và một số lẻ dù ta thực hiện bắt đầu từ bất cứ số nào (vì những số chẵn bằng tổng của một số chẵn và một số lẻ trừ đi 1; số lẻ là tổng của hai số chẵn trừ đi 1). Nhưng trong kết quả đã cho đều là ba số lẻ cả, nên với thao tác đã cho và xuất phát từ $2, 2, 2$ không thể cho kết quả. ☺

Bài toán trên được giải nhờ phát hiện ra tính chẵn lẻ của ba số không thay đổi, nên từ trạng thái xuất phát không thể nhận được trạng thái kết quả.

Ví dụ 1.6 (Kiev 1974). *Những số* $1, 2, 3, \ldots, 1974$ *được viết trên một bảng. Người ta thay hai số bất kì bằng một số hoặc là tổng hoặc là hiệu của hai số đó. Chứng minh rằng sau* 1973 *lần thực hiện thao tác trên, chỉ còn một số còn lại trên bảng không thể là số* 0.

Lời giải. Với kinh nghiệm giải bài toán trước, ta quan tâm đến tính chẵn lẻ của các số đã cho và sau mỗi lần thao tác được số chẵn lẻ như thế nào. Khi bắt đầu trên bảng có 987 số lẻ. Mỗi lần ta thực hiện thay đổi, số của những số lẻ hoặc là còn nguyên (khi ta lấy hai số có tính chẵn lẻ khác nhau hoặc hai số cùng tính chẵn) hoặc là giảm đi hai số (khi ta lấy hai số cùng tính lẻ). Như vậy số của những số lẻ còn lại sau mỗi lần thực hiện thay đổi luôn luôn là một số lẻ. Vậy khi còn lại một số cuối cùng trên bảng thì nó phải là số lẻ, do đó nó không thể là 0. ☺

Ví dụ 1.7. *Một hình tròn được chia thành sáu rẻ quạt. Những số* $1, 0, 1, 0, 0, 0$ *được viết vào trong các rẻ quạt này thứ tự theo ngược chiều kim đồng hồ. Ta thực hiện thao tác lặp: Tăng số của hai rẻ quạt cạnh nhau lên 1 đơn vị. Khi thực hiện các thao tác trên có đưa đến kết quả các số trong các rẻ quạt đều bằng nhau không ?*

Lời giải. Ký hiệu $a_1, a_2, \ldots, a_6$ là những số trong các rẻ quạt hiện thời. Khi đó số $S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$ là một đại lượng không đổi. Khởi đầu ta có $S = 2$. Đích cuối cùng ta muốn là $S = 0$ sẽ không bao giờ đạt đến.

Ví dụ 1.8. *Ngoài biển đông, trên một hòn đảo sinh sống giống thằn lằn có ba loại màu: màu xám có 133 con; màu nâu 155 con và màu đỏ có 177 con. Nếu hai con thằn lằn khác màu gặp nhau, thì chúng đồng thời đổi màu sang màu thứ ba. (Ví dụ nếu thằn lằn màu xám gặp thằn lằn màu nâu, thì cả hai con đều đổi sang màu đỏ.) Trong những trường hợp hai con thằn lằn cùng màu gặp nhau thì chúng giữ nguyên không đổi màu. Có xảy ra tình trạng là trên đảo tất cả thằn lằn trở thành cùng một màu được không ?*

Lời giải. Tính chẵn lẻ ở các bài trước là những bất biến rất tốt để ta giải toán, tính chẵn lẻ cũng được xác định bởi phép chia các số cho 2. Tương tự như vậy ba số nguyên $133, 155, 177$ chia cho 3 ta được bộ số dư $1, 2$ và 0.

Ta thử xét nếu một con thằn lằn xám gặp một con thằn lằn nâu, thì chúng động thời đổi thành màu đỏ. Khi đó ta có 132 con xám, 154 con nâu và 179 con đỏ. Những số dư của $132, 154$ và 179 cho 3 tương ứng là $0, 1$ và 2, nghĩa là lại gặp lại đầy đủ các số dư đã có.

Nếu một con thằn lằn xám gặp con thằn lằn màu đỏ, thì chúng đồng thời đổi màu thành nâu. Khi đó ta có 132 thằn lằn xám, 157 thằn lằn nâu và 176 thằn lằn đỏ. Lấy những số trên chia cho 3 cho số dư tương ứng là $0, 1$ và 2, nghĩa là lại gặp cả ba khả năng của số dư.

Nếu con thằn lằn nâu và thằn lằn đỏ gặp nhau, thì chúng cùng đổi màu thành xám. Khi đó có 135 thằn lằn xám, 154 thằn lằn nâu và 176 thằn lằn đỏ. Số dư của những số thằn lằn trên chia cho 3 tương ứng là $0, 1$ và 2, vẫn có đầy đủ các số dư khi chia cho 3.

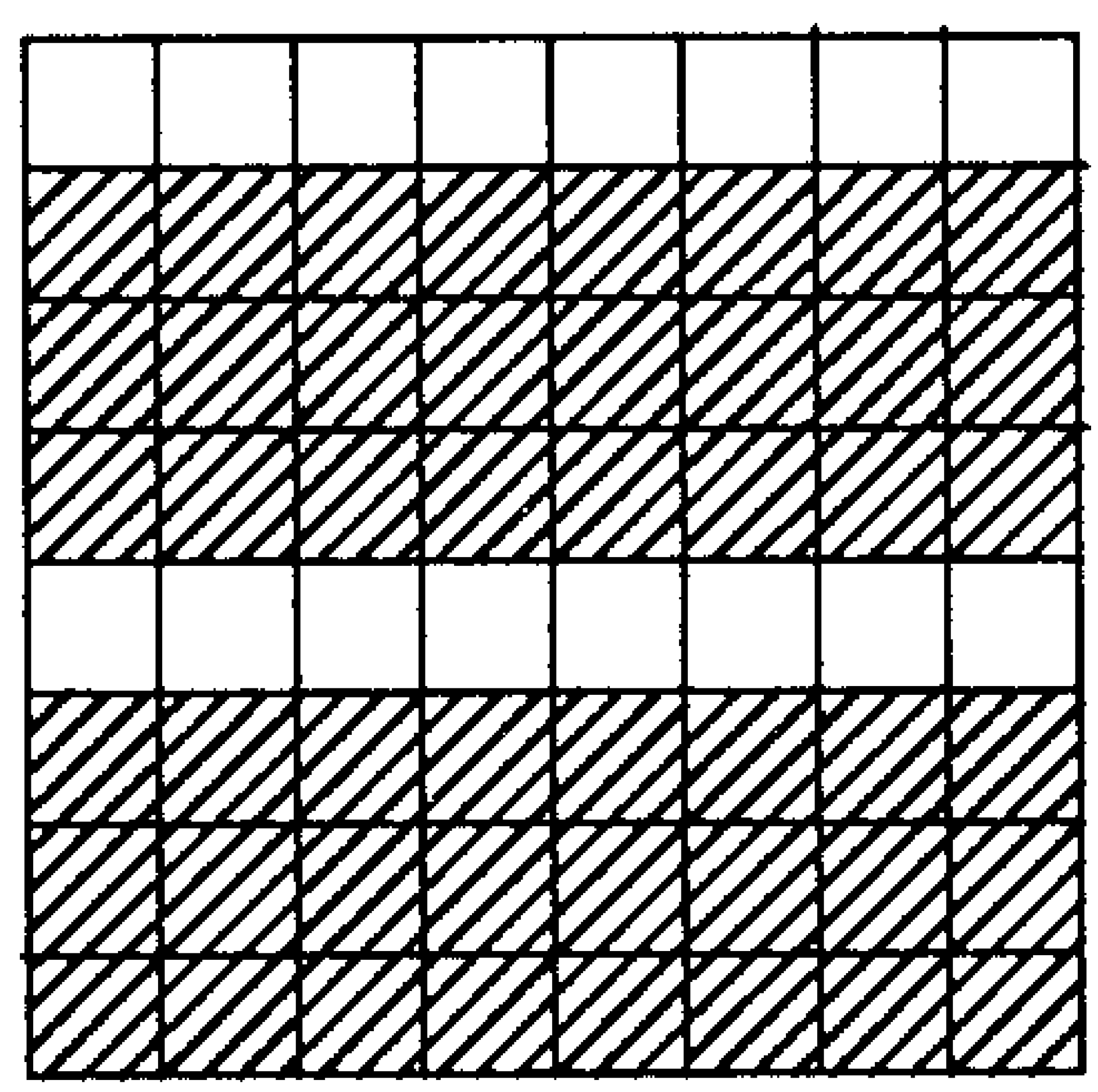
Bất biến ở đây là dù thay đổi màu như thế nào thì số dư của các số lượng thằn lằn chia cho 3 đều có đầy đủ ba số $0, 1, 2$.

Số lượng tất cả thằn lằn trên đảo là $133 + 155 + 177 = 465$ là một số chia hết cho 3. Nếu tất cả thằn lằn đều cùng một màu thì số dư của số lượng thằn lằn màu xám, nâu và đỏ chia cho 3 tương ứng là $0, 0, 0$. Điều này vô lí vì các số dư phải có đầy đủ các số dư này khi chia cho 3. Như vậy câu trả lời là không thể được. ☺

Việc tìm ra đại lượng bất biến của một đối tượng trong dữ kiện bài toán thật lợi hại khi giải những bài toán loại này. Sự đa dạng của các bài toán này được liệt kê dưới đây:

Ví dụ 1.9. *Tại mỗi ô vuông trong bảng 8×8 được viết một số nguyên. Ta có thể chọn bất kì bảng nhỏ 3×3 hoặc 4×4 và tăng tất cả số trong bảng nhỏ lên 1. Với cách làm như vậy liệu có thể nhận được những số chia hết cho 3 trong tất cả ô vuông của bảng 8×8 sau một số hữu hạn lần thực hiện không ?*

Lời giải. Không, không bao giờ có kết quả như vậy. Thật vậy, ta tính tổng các số trong các ô được gạch chéo trong hình 1.3. Bởi vì mỗi hình vuông cỡ 4×4 chứa 12 ô gạch chéo, còn mỗi hình vuông cỡ 3×3 chứa 6 hoặc 9 ô, thì sau một thao tác tổng các số trong các ô gạch chéo chia cho 3 có số dư không đổi. Vì thế nếu ngay từ đầu tính được tổng không chia chia hết cho 3, thì trong những ô gạch chéo luôn luôn chứa những ô mà trong đó có chứa các số không phải bội của 3. ☺



Hình 1.3

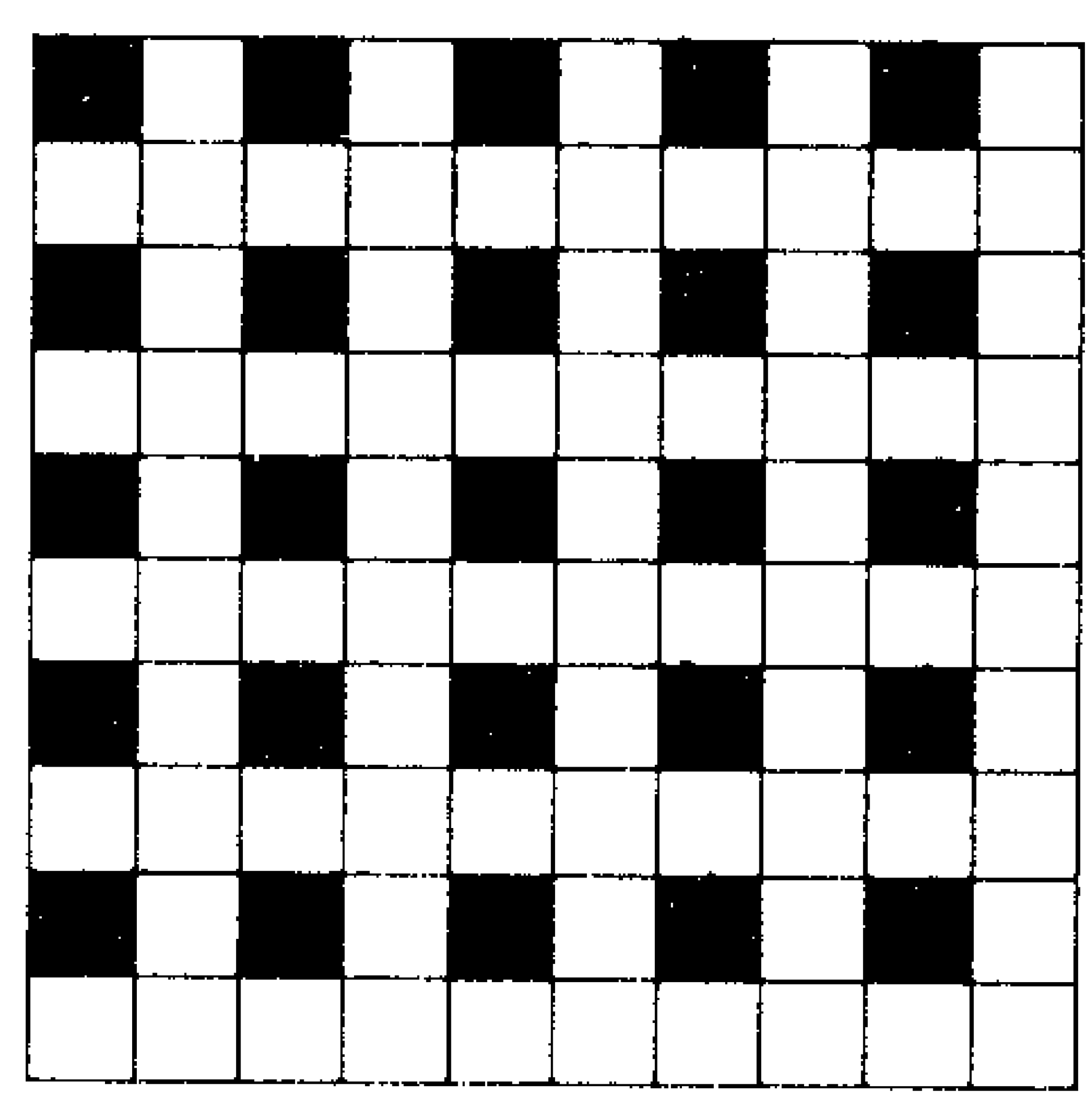
Cùng lí luận như vậy bạn đọc có thể giải bài tập 1.19.

Ví dụ 1.10. *Trên một bảng ô vuông có 8×8 ô vuông bao gồm 32 ô trắng và 32 ô đen. Nếu một người chơi có thể thay tất cả ô trắng thành đen và ô đen thành trắng cùng một lúc trong một hàng hoặc một cột bất kì, thì có thể thực hiện hữu hạn bước thay đổi như vậy để trên bảng chỉ còn đúng một ô đen hay không?*

Lời giải. Không. Nếu có đúng k ô đen trong một hàng hoặc một cột trước khi thực hiện thay đổi, thì sau khi thực hiện một lần thay đổi, số ô đen trong hàng đó hoặc cột đó sẽ là $8 - k$, sự thay đổi số ô đen là $(8 - k) - k = 8 - 2k$ ô đen trên bảng. Vì $8 - 2k$ là một số chẵn, tính chẵn lẻ của số những ô đen vẫn giữ nguyên trước cũng như sau thực hiện thay đổi. Do bắt đầu có 32 ô đen, nên không thể chỉ còn lại một ô đen trên bảng tại một bước biến đổi nào đó. ☺

Ví dụ 1.11.

Cho một bảng hình vuông có cạnh 10 cm, được chia ra thành một 100 ô vuông nhỏ với cạnh 1cm. Ngoài ra ta đặt lên đó 25 hình chữ nhật như nhau có chiều cao 4cm và chiều rộng 1cm, mỗi hình chữ nhật được chia ra thành 4 ô vuông có cạnh là 1cm. Có thể sắp đặt những hình chữ nhật trên bảng hình vuông sao cho chúng phủ toàn bộ bảng vuông hay không ? (Không chấp nhận có hình chữ nhật nào lồi ra khỏi cạnh của bảng).



Hình 1.4

Lời giải. Ta tô bảng vuông bằng màu đen trắng sao cho như hình 1.4. Ta nhận được 25 ô đen và 75 ô trắng. Ta chú ý là đặt những hình chữ nhật trên bảng vuông sao cho mỗi ô vuông của hình chữ nhật trùng với một ô vuông nào đó của bảng vuông. Hình chữ nhật này sẽ phủ lên hoặc là 2 hoặc là 0 ô vuông đen. Từ đó suy ra khi đặt tất cả 25 hình chữ nhật trên bảng vuông, chúng sẽ phủ kín một số chẵn những ô vuông đen. Bởi vì số lượng của ô vuông đen đã tô là 25, nó không phải là một số chẵn. Như vậy không thể phủ bằng 25 hình chữ nhật trên hình vuông đã cho. ☺

Ví dụ 1.12. *Cho* n *là một số nguyên dương lẻ. Người ta viết các số* $1, 2, \ldots, 2n$ *lên bảng. Sau đó người ta lấy hai số bất kì* a, b *thuộc dãy trên, xóa chúng đi và viết vào đó* $|a-b|$. *Chứng minh rằng sau một số lần thực hiện như vậy, một số lẻ sẽ còn lại cuối cùng.*

Lời giải. Kí hiệu S là tổng của tất cả những số trên bảng (chưa xóa). Khởi đầu $S = 1 + 2 + \cdots + 2n = n(2n+1)$ là một số lẻ. Sau mỗi bước S bị giảm đi $2\min(a, b) = |a+b| - |a-b|$, đây là một số chẵn. Như vậy tính chẵn lẻ của S không đổi. Trong quá trình giảm dần ta có $S \equiv 1 \pmod 2$. Khởi đầu S là một số lẻ. Như vậy kết thúc sẽ cũng là một số lẻ. ☺

Ví dụ 1.13. *Tại các đỉnh của một hình lục giác lồi, ta ghi các số:* 8, 3, 12, 1, 10 *và* 6. *Mỗi lần thực hiện thay đổi người ta có thể thêm hoặc bớt vào hai đỉnh liên tiếp tùy ý cùng một số. Sau một số lần thực hiện như vậy, ta có thể đạt được sáu số:* $5, 2, 14, 6, 13$ *và* 4 *được thay lần lượt thứ tự vào sáu số trên không?*

Lời giải. Giả sử tại một lượt đi nào đó, tại các đỉnh của lục giác có các số: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Xét tổng $S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$. Khi thêm vào hai số cạnh nhau cùng một số thì rõ ràng là tổng S vẫn giữ nguyên giá trị. Trong trường hợp bài toán, tổng $S = 20$ trong dãy số kết quả và dãy số khởi đầu trùng nhau. Vậy ta đi tìm một cách chuyển từ $8, 3, 12, 1, 10, 6$ thành $5, 2, 14, 6, 13, 4$. Kí hiệu $\xrightarrow{I-1, II-1}$ là số thứ nhất và số thứ hai trừ đi 1:

$$\begin{aligned} & 8, 3, 12, 1, 10, 6 \xrightarrow{I-1, II-1} 7, 2, 12, 1, 10, 6 \\ \xrightarrow{III+2, IV+2}\ & 7, 2, 14, 3, 10, 6 \xrightarrow{I-2, VI-2} 5, 2, 14, 3, 10, 4 \\ \xrightarrow{IV+3, V+3}\ & 5, 2, 14, 6, 13, 4. \end{aligned}$$

☺

Ví dụ 1.14. *Ta sắp đặt ba máy tự động trên một dây chuyền, mỗi máy nhận đọc một tấm thẻ có ghi hai số nguyên và đưa ra một tấm thẻ mới* *theo nguyên tắc sau: Sau khi đọc thẻ có ghi cặp số* (a, b)*, máy thứ nhất (I) in ra thẻ có cặp số* $(a - b, b)$*, máy thứ hai (II) in ra thẻ có cặp số* $(a + b, b)$ *và máy thứ ba (III) in ra thẻ có cặp số* (b, a)*. Khởi đầu ta cho thẻ có cặp số* $(19, 87)$*. Có thể dùng ba máy tự động trên theo một thứ tự bất kì để nhận được thẻ với cặp số:*

a) $(41, 14)$? *b)* $(18, 81)$?

Lời giải. Tìm bất biến trong bài toán này bằng cách quan sát hệ thống in thẻ và những cặp số đã cho và kết quả. Ta thấy rằng cả ba máy đều thay đổi số in ra nhưng ước số chung lớn nhất của nó không thay đổi do ta nhớ đến thuật toán Euclid và cách tính số in ra của ba máy. Ta thấy rằng ước số chung lớn nhất: $(19, 87) = 1$ và $(18, 81) = 9$ là hai số khác nhau, dù kết hợp ba máy như thế nào thì kết quả b) cũng không thể xảy ra. Còn trường hợp a) tính bất biến thỏa mãn vì $(14, 41) = 1$. Vậy thẻ với các số $(14, 41)$ có thể nhận được bằng cách kết hợp các máy tự động trên. Nhưng ta phải chỉ các bước thực hiện mới là cách giải trọn vẹn bài toán. Tất nhiên có rất nhiều cách thực hiện kết hợp ba máy để in ra kết quả, ta chỉ cần chỉ ra một phương án là đủ (còn có tối ưu hay không dành cho bạn đọc). Kí hiệu số máy trên mũi tên là thực hiện in theo số máy này:

$(19, 87) \xrightarrow{III} (87, 19) \xrightarrow{I^4} (11, 19) \xrightarrow{III} (19, 11) \xrightarrow{I} (8, 11) \xrightarrow{III} (11, 8) \xrightarrow{I} (3, 8) \xrightarrow{III} (8, 3) \xrightarrow{I^2} (2, 3) \xrightarrow{III} (3, 2) \xrightarrow{I} (1, 2) \xrightarrow{III} (2, 1) \xrightarrow{II^{11}} (13, 1) \xrightarrow{III} (1, 13) \xrightarrow{II} (14, 13) \xrightarrow{III} (13, 14) \xrightarrow{II^2} (41, 14)$. ☺

Những bài toán về thay đổi vị trí các số trong một bộ số cũng có cách giải tìm bất biến tương tự.

Ví dụ 1.15. *Những số* $1, 2, 3, \ldots, n$ *được sắp xếp theo một thứ tự nào đó. Một phép biến đổi là đổi chỗ bất kì hai số cạnh nhau trong bộ số có sẵn. Chứng minh rằng nếu ta thực hiện số lẻ lần phép biến đổi như vậy, thì luôn luôn nhận được một số khác với bộ số ban đầu về các vị trí của các số* $1, 2, \ldots, n$.

Lời giải. Ta kí hiệu $a_1, a_2, ..., a_n$ là một hoán vị của bộ số $1, 2, ..., n$. Ta nói rằng hai số a_i và a_j trong hoán vị này là *nghịch đảo* nếu $i < j$ thì $a_i > a_j$. Khi ta thay đổi hai số cạnh nhau trong hoán vị, nghĩa là chúng ta tăng hoặc giảm số lượng nghịch đảo đi 1. Ta thực hiện số lẻ lần thao tác như vậy, thì ta đã biến đổi tính chẵn lẻ của những số nghịch đảo, điều đó nghĩa là ta đã thay đổi hoán vị. Bằng cách chứng minh tương tự ta có thể mở rộng bài toán này như trong bài tập 1.20 (trong phần cuối của tiết này). ☺

Ví dụ 1.16. *Tại những bến ô tô khác nhau trong một tuyến đường ô tô cùng xuất phát một lúc 25 ô tô theo cùng chiều (một tuyến đường ô tô là một con dường duy nhất và khép kín). Theo nguyên tắc, những ô tô này có thể vượt qua lẫn nhau, nhưng không được vượt quá hai xe. Những ô tô này cùng kết thúc một vòng đồng thời tại bến ô tô mình đã xuất phát. Chứng minh rằng trong toàn bộ thời gian số lần xe vượt nhau là một số chẵn.*

Lời giải. Ta kí hiệu một trong những chiếc ô tô bằng màu vàng, những chiếc còn lại được đánh số $1, 2, 3, ..., 24$ theo thứ tự xuất phát từ vị trí xe màu vàng. Khi mỗi lần có xe vượt mà nó là xe ghi số và đi sau xe màu vàng, thì dãy số thay đổi hai số liền nhau trong trường hợp lần xe vượt này không tham gia xe màu vàng.

Ta xét trường hợp một chiếc xe nào đó vượt chiếc ô tô màu vàng. Nếu trước thời điểm vượt những số trong bảng là một hoán vị $a_1, a_2, ..., a_{24}$, thì sau khi vượt chúng tạo thành hoán vị $a_2, a_3, ..., a_{24}, a_1$. Ta giả thiết rằng sự vượt nhau hoàn toàn liên tiếp 23 lần thay đổi dãy số: $a_1, a_2, ..., a_{24} \to a_2, a_3, ..., a_{24}, a_1 \to a_3, a_4, ..., a_{24}, a_1, a_2 \to ... \to \to a_2, a_3, ..., a_{24}, a_1$.

Nếu xe màu vàng thực hiện một lần vượt thì từ hoán vị $a_1, a_2, ..., a_{24}$ ta nhận được hoán vị $a_{24}, a_1, a_2, ..., a_{23}$, từ hoán vị này cũng biến đổi 23 lần thay đổi dãy số.

Như vậy dù trong trường hợp nào thì mỗi lần vượt đưa đến một số lẻ lần chuyển đổi dãy số. Nếu trường hợp tổng quát số lần vượt là lẻ, thì có số lẻ lần chuyển đổi. Do bài toán 1.15 nhận được dãy số khác với bộ số ban đầu (khác với vị trí các xe lúc ban đầu), nhưng cuối cùng các xe lại trở về vị trí ban đầu, nên ta có số chẵn lần các xe vượt nhau. ☺

Rất nhiều dạng bài toán tìm đại lượng bất biến, ví dụ sau đây tính bất biến được cho ngay trong giả thiết của đề bài:

Ví dụ 1.17. *Cho điểm* $S = (a, b)$ *trên mặt phẳng với* $0 < b < a$, *ta dựng dãy các điểm* (x_n, y_n) *theo quy tắc sau đây:*

$$x_0 = a, \quad y_0 = b, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}.$$

Tìm giới hạn của các điểm sinh ra ở trên.

Lời giải. Bài toán này dễ tìm thấy đại lượng bất biến. Từ các công thức trên suy ra $x_{n+1}y_{n+1} = x_n y_n$ với mọi n. Ta tiến hành giảm chỉ số đến $x_n y_n = ab$ với mọi n. Đây chính là đại lượng bất biến. Khởi đầu ta đều có $y_0 < x_0$. Mối quan hệ này cũng bất biến với mọi n: $y_n < x_n$. Thật vậy, ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp, giả sử $y_n < x_n$ với một n nào đó, ta phải chứng minh rằng $y_{n+1} < x_{n+1}$. Vì trung bình điều hòa thực sự nhỏ hơn trung bình cộng, nên

$$0 < x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{x_n + y_n} \cdot \frac{x_n - y_n}{2} < \frac{x_n - y_n}{2}$$

với mọi n. Do dãy giảm thực sự, nên ta có $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = x$. Như vậy, $x^2 = ab$, nghĩa là $x = \sqrt{ab}$. ☺

Đại lượng bất biến trong bài toán trên giúp ta rất nhiều, ta phải dùng đến hai đại lượng bất biến để giải. Những bài toán kiểu thế này có thể tìm thấy rất nhiều trong chương 2 cuốn sách [7].

BÀI TẬP

Bằng những cách làm của các ví dụ trên ta có thể áp dụng và giải các bài tập sau đây. Một số bài có đưa ra gợi ý, còn nếu không có gợi ý, các bạn xem lại những bài mẫu ở phần trước và thực hiện cách giải hoàn toàn tương tự.

▷ **1.18.** Trên bảng đen viết một số dấu cộng (+) và một số dấu trừ (−). Cho phép xóa đi hai dấu bất kì và nếu chúng cùng dấu ta viết lại dấu cộng (+), còn nếu chúng khác dấu ta viết lại dấu trừ (−). Chứng minh rằng dấu cuối cùng không phụ thuộc vào các bước liên tiếp thực hiện thao tác trên (Gợi ý: Xem lại bài hái khế phần trước).

▷ **1.19.** Từ bảng trong giả thiết của ví dụ 1.9 và các thao tác như vậy có nhận được bảng không chứa một số chẵn nào không? (Gợi ý: Xem lại cách giải ví dụ 1.9).

▷ **1.20.** Chứng minh rằng kết luận của ví dụ 1.15 còn đúng, nếu trong phép biến đổi ta đổi chỗ hai số bất kì trong hoán vị đã cho. (Giải như ví dụ 1.15).

▷ **1.21.** Ta xé một miếng giấy thành 10 mảnh, trong một số mảnh giấy đó, ta lại xé mỗi mảnh thành 10 mảnh nhỏ, và tiếp tục như vậy. Hỏi ta có thể nhận được theo cách làm trên 1975 mảnh giấy không?

▷ **1.22.** Trên bảng ta viết các số $1, 2, \ldots, 1975$. Cho phép xóa hai số bất kì và viết vào đó số dư của phép chia tổng hai số này cho 13. Sau một số lần làm như vậy trên bảng chỉ còn lại một số, hỏi số đó có thể là những số nào?

▷ **1.23.** Trong mỗi ô trong mảng cỡ 4×4 ta viết dấu cộng hoặc dấu trừ. Ta thực hiện biến đổi đồng thời theo hàng hoặc theo cột với dấu ngược lại. Số lượng dấu trừ nhỏ nhất ta có thể tính được từ mảng ban đầu và các mảng biến đổi sau đó gọi là *số đặc trưng* của bảng này. Số đặc trưng này có thể nhận được giá trị như thế nào?

▷ **1.24.** Trên một đường tròn có 30 con kiến: 10 kiến trắng và 20 kiến đen. Cho phép đổi chỗ hai con kiến mà giữa chúng có ba con kiến khác. Hai vị trí của hai con kiến bất kì được gọi là *tương đương* nếu chúng có thể đổi chỗ cho nhau sau một số lần thực hiện phép đổi chỗ như trên. Hỏi tồn tại bao nhiêu vị trí không tương đương của những con kiến?

▷ **1.25.** Những số $1, 2, \ldots, 2003$ được viết theo thứ tự này. Một phép biến đổi là chọn bốn số bất kì trong chúng và đặt lại các vị trí chúng đã chiếm nhưng theo thứ tự các số ngược lại. Có thể bằng phép biến đổi này để thực hiện được việc sắp xếp thành $2003, 2002, \ldots, 2, 1$ không ?

▷ **1.26.** Cho bốn số $4, 5, 6, 7$. Mỗi lần thực hiện thay đổi người ta viết 4 số mới thay vào bốn số cũ: Mỗi số mới bằng trung bình cộng của ba số đã có trước. Chứng minh rằng sau một số lần thay đổi ta không bao giờ đạt được nhóm 4 số: $5, 6, 7, 3$ (Gợi ý: Chú ý rằng tổng của bốn số a, b, c, d và bốn số $\frac{a+b+c}{3}, \frac{b+c+d}{3}, \frac{c+d+a}{3}, \frac{a+b+d}{3}$ luôn luôn bằng nhau).

▷ **1.27.** Trên một đường thẳng phân bố một số điểm. Giữa mọi hai điểm liên tiếp ta đánh dấu thêm một điểm. Sau đó giữa mọi hai điểm liên tiếp trong các điểm nhận được ta lại đánh dấu thêm một điểm và vân vân. Số lượng những điểm nhận được chẵn hay lẻ sau khi ta thực hiện cách thêm điểm trên 1000 lần (Trả lời: Số lẻ).

▷ **1.28.** Ta đặt hai máy tự động có thể làm được các thao tác sau đây: Máy I cho thẻ vào có số nguyên A in ra trên nó tổng $A + 10$ hoặc $A + 15$ theo sự điều khiển của ta. Máy II cho thẻ vào có số nguyên A in ra trên nó hiệu $A - 10$ hoặc $A - 15$ theo sự điều khiển của ta. Cho thẻ vào có số 0, bằng hai máy tự động trên ta có thể in ra thẻ có số: a) 125 hoặc b) 123 được không? (Trả lời: a) Có thể; b) Không thể).

▷ **1.29.** Chia một hình chữ nhật thành những ô vuông có cạnh 1cm. Nó được phủ bởi toàn bộ, không chồng lên nhau và không thòi ra mép ngoài, bằng số lượng đã biết những mảnh có hai dạng: Những mảnh hình vuông có cạnh 2cm và mảnh hình chữ nhật có chiều dài 4cm và rộng 1cm. Nếu ta thay một mảnh hình vuông bằng một mảnh hình chữ nhật và bằng cách chuyển chỗ những mảnh còn lại, thì hình chữ nhật ban đầu có được phủ kín không? (Gợi ý: Tô hình chữ nhật như bài 1.11. Chú ý một mảnh hình chữ nhật phủ số chẵn ô vuông trắng và chẵn ô vuông đen, còn mảnh hình vuông phủ 1 ô vuông đen và ba ô vuông trắng. Trả lời: Không được).

1.3. Giải toán bằng đại lượng bất biến

Bằng cách phát hiện ra những đại lượng bất biến trong bài toán ta có thể giải nhiều bài toán. Tuy nhiên nếu không luyện tập thì rất khó và không có phương pháp sáng sủa để giải. Tiết này ta tiếp tục tìm hiểu thêm những cách tìm đại lượng bất biến trong bài toán.

Ví dụ 1.30. *Có ba đống sỏi gồm những viên sỏi nhỏ có số lượng tương ứng là $19, 8$ và 9 (viên sỏi). Ta được phép chọn hai đống sỏi và chuyển một viên sỏi của những đống sỏi đã chọn sang đống sỏi thứ ba. Sau một số lần làm như vậy thì có khả năng tạo ra mọi đống sỏi đều có 12 viên sỏi không ?*

Lời giải. Không. Đặt số viên sỏi trong ba đống sỏi tương ứng là a, b và c. Ta xét số dư chia cho 3 của những số này. Khi xuất phát, những số đồng dư này là $1, 2, 0$. Sau một lần chọn thay đổi, những số dư này là $0, 1, 2$ vì hai đống sỏi có sự chuyển một viên sỏi đến đống thứ ba. Như vậy những số dư luôn luôn là $0, 1, 2$ với những thứ tự khác nhau (đại lượng bất biến). Do đó tất cả các đống sỏi đều có 12 viên sỏi là không thể được (vì khi đó số dư của ba đống sỏi là $0, 0, 0$, vô lí). ☺

Ví dụ 1.31. *Hai người chơi một trò chơi với hai đống kẹo. Đống kẹo thứ nhất có 12 cái và đống kẹo thứ hai có 13 cái. Mỗi người chơi được lấy hai cái kẹo từ một trong hai đống kẹo hoặc chuyển một cái kẹo từ đống thứ nhất sang đống thứ hai. Người chơi nào không thể làm được những thao tác trên coi như là thua. Hãy chứng minh rằng người chơi đi lượt thứ hai không thể thua. Người đó có thể thắng không?*

Lời giải. Ta kí hiệu S là giá trị tuyệt đối của số kẹo trong đống thứ hai trừ đi đống thứ nhất. Khởi đầu, $S = |13 - 12| = 1$. Sau mỗi lần chơi S sẽ giảm hoặc tăng lên 2. Như vậy, số dư của S chia cho 4 có dạng: $1, 3, 1, 3, \ldots$. Mỗi lần sau khi người thứ nhất chơi, số dư của S chia cho 4 luôn luôn là 3. Ta thấy rằng người chơi bị thua khi và chỉ khi không còn cái kẹo nào ở đống thứ nhất và chỉ còn một cái kẹo ở đống thứ hai, khi đó $S = |1 - 0| = 1$. Như vậy người chơi thứ hai luôn luôn có thể thực hiện được cách chơi, do đó người đó không thua.

Ta thấy rằng, hoặc là tổng số kẹo ở hai đống giảm đi hoặc là số kẹo ở đống thứ nhất giảm đi, như vậy trò chơi phải có kết thúc, do đó người chơi thứ hai phải thắng. ☺

Ví dụ 1.32. *Mỗi thành viên của một câu lạc bộ có nhiều nhất là ba đối thủ trong câu lạc bộ (đối thủ ở đây là tương tác lẫn nhau). Chứng minh rằng những thành viên của câu lạc bộ có thể chia thành hai nhóm sao cho mỗi thành viên trong mỗi nhóm có nhiều nhất một đối thủ trong cùng nhóm.*

Lời giải. Khi bắt đầu, ngẫu nhiên ta chia những thành viên trong câu lạc bộ thành hai nhóm. Kí hiệu S là số các cặp đối thủ trong cùng nhóm. Nếu một thành viên có ít nhất hai đối thủ trong cùng nhóm, thì thành viên này có nhiều nhất một đối thủ trong nhóm khác. Thành viên này được di chuyển sang nhóm khác, ta sẽ giảm S đi ít nhất 1. Vì S là một số nguyên không âm, nó không thể giảm mãi được. Như vậy sau một số hữu hạn lần chuyển đổi, mỗi thành viên có thể có nhiều nhất một đối thủ trong cùng một nhóm. ☺

Chú ý: Phương pháp chứng minh bài toán trên gọi là *phương pháp xuống dốc vô hạn*. Nó chỉ ra rằng ta không thể giảm mãi số lượng khi nó chỉ có hữu hạn giá trị (bạn đọc có thể xem kĩ phương pháp này trong cuốn sách [9]).

Ví dụ 1.33. *Ta bắt đầu với những số* a, b, c, d. *Ta thay chúng bởi các số* $a' = a - b, b' = b - c, c' = c - d, d' = d - a$. *Ta thực hiện quá* *trình này 1996 lần. Có khả năng đến số cuối cùng* A, B, C, D *sao cho* $|BC - AD|, |AC - BD|, |AB - CD|$ *là những số nguyên tố?*

Lời giải. Trả lời: Không.

Bốn bước lặp đầu tiên cho kết quả

a - b	b - c	c - d	d - a
a-2b+c	b-2c+d	c-2d+a	d-2a+b
a-3b+3c-d	b-3c+3d-a	c-3d+3a-b	d-3a+3b-c
2a-4b+6c-4d	2b-4c+6d-4a	2c-4d+6a-4b	2d-4a+6b-4c

Do đó sau 4 bước lặp tất cả các số đều là số chẵn. Như vậy sau 1996 phép lặp tất cả các số là bội của 2. Vì thế $|BC - AD|, |AC - BD|, |AB - CD|$ tất cả là bội của 4, suy ra không có số nào là số nguyên tố. ☺

Ví dụ 1.34. *Trong một bảng ô vuông có* $n \times n$ *ô với* n *là một số lẻ. Trong mỗi ô ta viết* $+1$ *hoặc* -1. *Gọi* a_i *là tích tất cả các số thuộc hàng thứ* i *và* b_j *là tích tất cả các số thuộc cột thứ* j $(i, j = 1, 2, ..., n)$. *Chứng minh rằng*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n \neq 0.$$

Lời giải. Nếu ta đổi dấu của số nằm ở hàng thứ p và cột thứ q, những số a_p và b_q cũng đổi dấu, còn những số khác vẫn giữ nguyên. Ta xem sự thay đổi của $a_p + b_q$ trước và sau khi đổi dấu:

	trước	sau	trước	sau	trước	sau	trước	sau
a_p	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1
b_q	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1
$a_p + b_q$	-2	+2	0	0	0	0	+2	-2

Ta thấy rằng $a_p + b_q$ biến đổi bằng cách thêm vào một số bội của 4. Ta xét bảng chỉ có số $+1$, với bảng này $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 2n$ và theo điều kiện n là một số lẻ, như vậy tổng này không chia hết cho 4. Bởi vì mỗi bảng khác nhận được từ bảng toàn số $+1$ bằng cách biến đổi một số phần tử và ta thấy rằng tổng $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ đều không chia hết cho 4 và như vậy tổng này luôn khác 0. ☺

Bài tập

▷ **1.35.** Mọi số trong các số từ 1 đến 1 000 000 được thay bằng tổng các số chữ số của nó. Với dãy số ta nhận được, lại làm như vậy và tiếp tục. Cuối cùng nhận được một triệu số có một chữ số. Những số 1 nhiều hơn hay những số 2 nhiều hơn? (Gợi ý: Hãy sử dụng số dư của một số chia cho 9 bằng số dư của tổng các chữ số chia cho 9. Trả lời: Những số 1 nhiều hơn.)

▷ **1.36.** (Hungari 1989) Tại mỗi đỉnh của một hình vuông, ta đặt một số que diêm. Khởi đầu chỉ có một que diêm trên một đỉnh và ba đỉnh kia không có một que diêm nào. Bước tiến hành đặt diêm: Người ta cho phép lấy một số bất kì những que tại một đỉnh và đặt vào hai đỉnh bên cạnh số que mà tổng của chúng bằng hai lần số que đã lấy đi. Sau một số hữu hạn lần đặt diêm, số diêm tại bốn đỉnh hình vuông có thể là $1, 9, 8, 9$ tính theo chiều kim đồng hồ hoặc là tính theo ngược chiều kim đồng hồ được không?

▷ **1.37.** Những số $1, 2, ..., n$ được sắp xếp theo một thứ tự nào đó trên một đường thẳng. Ta có thể chuyển đổi hai số bất kì cạnh nhau. Chứng minh rằng một số lẻ những chuyển đổi tạo ra dãy số luôn luôn khác với dãy được sắp xếp theo thứ tự ban đầu.

1.4. Bất biến đơn điệu

Theo định nghĩa bất biến ở phần trước thì đại lượng bất biến là một tính chất của bài toán không thay đổi qua sự tác động biến đổi của hệ thống. Nhưng khi ta thay đổi hệ thống mà có đại lượng biến đổi theo một quy luật nào đó thì sao ? Ví dụ như khi hệ thống biến đổi có một đại lượng luôn luôn tăng hoặc luôn luôn giảm một lượng cố định. Ví dụ như cấp số