NGUYÊN LÝ BẤT BIẾN

(Kỹ năng giải và sáng tạo bài toán mới)

Xét tập X của những trạng thái (mỗi trạng thái có thể là một bộ n số thực - một bảng số ($n\times n$)). Một dãy lặp của các trạng thái được thành lập bằng cách thực hiện nhiều lần một phép biến đổi, một thuật toán hay một quy tắc cho phép chúng ta chuyển từ trạng thái này sang trạng thái tiếp sau

$$x_1 \to x_2 \to x_3 \to \text{L L} \to x_n$$

Đối với dãy lặp như trên có 3 dạng bài toán sau được đặt ra:

I. BÀI TOÁN VỀ TÍNH CHẤT HỮU HẠN HOẶC VÔ HẠN CỦA DÃY LẶP

Nếu dãy lặp là hữu hạn thì xác định chiều dài lớn nhất của dãy lặp và trạng thái cuối cùng hoặc một trạng thái bất kì.

Bài toán 1. Trên bàn có 6 viên sỏi, được chia thành vài đống nhỏ. Mỗi phép biến đổi được thực hiện như sau: Ta lấy ở mỗi đống 1 viên và lập đống mới. Hỏi sau 30 bước biến đổi như trên, các viên sỏi trên mặt bàn được chia thành mấy đống, mỗi đống có bao nhiêu viên?

II. BÀI TOÁN VỀ TÍNH CHẤT TUẦN HOÀN CỦA DÃY LẶP

Bài toán 2. Bắt đầu với bộ 4 số thực dương (a,b,c,d) trong đó a, b, c, d không đồng thời bằng 1. Ta lập bộ mới (ab,bc,cd,da) và lặp lại phép biến đổi này. Chứng minh rằng trong các bộ 4 số nhận được từ phép biến đổi không có bộ (a,b,c,d).

III. BÀI TOÁN VỀ SỰ TỒN TẠI CỦA DÃY LẶP MÀ TRẠNG THÁI CUỐI CÙNG THOẢ MÃN MỘT TÍNH CHẤT CHO TRƯỚC

Đây là dạng bài toán khái quát của những bài toán thường gặp mà khi giải chúng, ta phải sử dụng nguyên lý bất biến.

Bài toán 3. Trên bảng có (10×10) có 9 ô bôi đen. Mỗi bước biến đổi ta bôi đen một ô kề liền (có cạnh chung) với ít nhất 2 ô đen. Hỏi sau một số hữu hạn bước ta có thể tô đen cả bảng được hay không?

IV. TÌM ĐẠI LƯỢNG KHÔNG THAY ĐỔI SAU MỖI PHÉP BIẾN ĐỔI

Bài toán 4. Trên một đường tròn, chúng ta viết 2 số 1 và 48 số 0 theo thứ tự 1, 0, 1, 0, 0, …, 0. Mỗi phép biến đổi ta thay một cặp 2 số liền nhau bất kì (x, y) bởi $(x+1, y+1)$. Chứng minh rằng bằng những phép biến đổi trên ta không thu được dãy 50 số bằng nhau.

Bài toán 5. Xét một đa giác đều 12 đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$. Tại đỉnh A_1 ta viết số -1, tại các đỉnh khác ta viết số 1. Mỗi phép biến đổi ta đổi dấu 6 đỉnh liền kề của đa giác. Hỏi có thể thu được trạng thái: (Đỉnh A_2 viết số -1 và các đỉnh còn lại viết số 1) sau một số hữu hạn phép biến đổi hay không?

V. TÌM TÍNH CHẤT CỦA MỘT ĐẠI LƯỢNG KHÔNG THAY ĐỔI SAU CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI

Bài toán 6. Xét dãy số $1, 2, 3, 4, \ldots, 2n$ với n lẻ. Mỗi phép biến đổi ta xoá 2 số a, b bất kì và viết thêm vào dãy một số $|a-b|$. Sau mỗi bước dãy giảm một số. Chứng minh rằng số cuối cùng còn lại phải là số lẻ.

Bài toán 7. Các số $1, 2, 3, 4, \ldots, n$ ban đầu được xếp theo một thứ tự nào đó. Mỗi phép biến đổi cho phép đổi thứ tự 2 số kề nhau. Chứng minh rằng sau một số lẻ lần phép biến đổi chúng ta không thể nhận được hoán vị ban đầu.

VI. NGUYÊN LÝ BẤT BIẾN

Thực chất cách giải của bài toán 4 và 5 là tìm hàm $f : X \to c \in$ ¡ (c là hằng số), bài toán 6, 7 là sử dụng tính chất $f : X \to$ ¥*. Vậy ta có thể mô tả nguyên lý bất biến như một hàm số học xác định trên tập các trạng thái X và nhận giá trị trên tập Y. (Y thường là tập cá số nguyên dương, tập số thực, tập các bộ số nguyên dương,bộ số thực). Sử dụng tính chất của hàm f chúng ta giải các dạng bài toán 1, 2, 3 trên dãy lặp của những trạng thái. Trong phần này chúng ta sử dụng nhiều ví dụ cụ thể để luyện tập kĩ năng giải.

Bài toán 8. Cho bộ 3 số nguyên (a,b,c), ta xây dựng bộ mới $(|a-b|,|b-c|,|c-a|)$. Chứng minh rằng sau một số hữu hạn phép biến đổi ta nhận được bộ 3 số có chứa số 0.

Bài toán 9. Giả sử, *n* số thực $n \geq 4$ được viết xung quanh một đường tròn. Nếu 4 số kề nhau *a, b, c, d* thoả mãn $(a-d)(b-c) < 0$ ta đổi vị trí của 2 số kề nhau *b, c*. Chứng minh rằng các phép biến đổi như trên sẽ kết thúc sau một số hữu hạn bước.

Bài toán 10. Xét một dãy số nguyên $x_1, x_2, ..., x_n$ cho trước. Nếu với *i>j* là hai chỉ số tuỳ ý sao cho $x_i - x_j = 1$ thì ta thay thế x_i, x_j bởi x_{j+1}, x_{i+1} (theo đúng thứ tự). Chứng minh rằng các phép biến đổi như vậy sẽ kết thúc sau một số hữu hạn bước.

Bài toán 11. Trong dãy số 1, 0, 1, 0, 1, 0, 3, 5, 0, bắt đầu từ số thứ 7 thì mỗi số bằng chữ số thập phân cuối cùng của tổng 6 số đứng trước. Chứng minh rằng trong dãy vô hạn thu được không xuất hiện lại 6 số 0, 1, 0, 1, 0, 1.

VII. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐƠN GIẢN

Để rèn luyện kĩ năng giải chúng ta bắt đầu với các bài toán đơn giản và một số nhận xét về phương pháp giải.

Bài toán 12. Xét tập $M = \{(0,0),(1,1),(-3,0),(2,-1)\}$. Mỗi phép biến đổi ta thay thế $(a,b) \in M$ bất kì bởi $(a+2c, b+2d)$ với $(c,d) \in M$. Hỏi sau một số hữu hạn bước có nhận được tập $M_1 = \{(-1,2),(2,-1),(4,0),(1,1)\}$

Bài toán 13. Chúng ta bắt đầu với 2 số 0, 1. Một phép biến đổi chúng ta thêm vào hoặc xoá đi 2 số kề nhau (0, 0) hoặc (1, 1). Chứng minh rằng chúng ta không thể nhận được cặp 2 số (1, 0) ở trạng thái cuối cùng.

Bài toán 14. Trong dãy vô hạn các bình phương có chứa một dãy con vô hạn lập thành cấp số cộng?

Bài toán 15. Kí hiệu $d(n)$ là tổng các chữ số của $n \in ¥$. Hãy tìm *n* thoả mãn đẳng thức

$$n + d(n) + d(d(n)) = 1997.$$

Bài toán 16. Giả sử $(a_1, a_2, ..., a_n)$ là một hoán vị của $1, 2, ..., n$. Với *n* lẻ, chứng minh rằng

$$P = (a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)...(a_n - n)$$

là số chẵn.

Bài toán 17. Xét dãy số 1, 2, 3, ..., 4*n*-1, ta thực hiện các phép biến đổi liên tiếp như sau:

Xoá 2 số bất kì trong dãy và viết tiếp vào dãy một số bằng hiệu của chúng. Chứng minh rằng số nguyên còn lại cuối cùng là số chẵn.

Bài toán 18. Ta viết tuỳ ý các số nguyên dương vào một bảng $(m \times n)$. Mỗi phép biến đổi cho phép gấp đôi các số của một hàng hoặc trừ 1 tất cả các số của một cột. Chứng minh rằng chúng ta có thể thực hiện một số phép biến đổi như vậy để nhận được một bảng gồm toàn số 0.

VIII. MỘT SỐ BÀI TOÁN NÂNG CAO

Trong phần này chúng ta xây dựng cách giải cho những bài toán phức tạp hơn.

Bài toán 19. Xung quanh công viên người ta trồng *n* cây và giả sử trên mỗi cây có một con chim. Thỉnh thoảng 2 con chim đồng thời bay sang cây bên cạnh theo hướng ngược lại. Hỏi có thể đến một lúc nào đó tất cả các con chim cùng đậu trên một cây không?

BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN

Bài toán 21. Có một hàng gồm 1000 số nguyên. Ta xây dựng hàng thứ hai bằng cách viết dưới số nguyên *a* của hàng thứ 1 số *f(a)* bằng số lần xuất hiện của *a* ở dòng thứ 1.

Bằng cách tương tự ta xây dựng liên tiếp các hàng tiếp theo. Chứng minh rằng sau một số hữu hạn bước chúng ta sẽ xây dựng được 2 hàng giống hệt nhau.

Bài toán 22. Ta viết các số nguyên trên mỗi ô của bàn cờ (8×8). Mỗi phép biến đổi, chúng ta chọn ra bất kì một hình vuông con (2×2) hoặc (3×3) và thêm 1 vào các số nguyên ở mỗi ô.

1. Ta có thể luôn nhận được một bảng gồm toàn số chẵn hay không?
2. Ta có thể luôn luôn nhận được một bảng mà gồm toàn các số chia hết cho 3 hay không?

Bài toán 23. Tại các đỉnh của đa giác chúng ta viết các số nguyên x_i sao cho $S=\sum_{i=1}^{5}x_i>0$. Nếu *x, y, z* là 3 số tại 3 đỉnh liên tiếp có $y<0$ ta thay 3 số này bởi 3 số $x+y,-y,z+y$. Chứng minh rằng phép biến đổi trên sẽ dừng lại sau một số hữu hạn bước.

Bài toán 24. Có 2*n* ngài đại sứ được mời đến dự một bữa tiệc. Biết rằng một đại sứ không quen nhiều nhất *n*-1 đại sứ khác. Chứng minh rằng có thể xếp các đại sứ xung quanh một bàn tròn sao cho không có đại sứ nào ngồi giữa 2 người không quen.

Bài toán 25. Xét các số $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ gồm các số nhận một trong hai giá trị 1 hoặc -1 thoả mãn

$$S=a_1a_2a_3a_4+a_2a_3a_4a_5+\ldots+a_na_1a_2a_3=0.$$

Chứng minh rằng *n* phải chi hết cho 4.

Bài toán 26. Giả sử 4 số a,b,c,d là 4 số nguyên không đồng thời bằng 0. Với (a,b,c,d) là trạng thái ban đầu chúng ta thực hiện phép biến đổi sau:

Thay (a,b,c,d) bởi $(a-b,b-c,c-d,d-a)$.

Chứng minh rằng với phép biến đổi trên chúng ta luôn nhận được những bộ 4 số có một thành phần lớn tuỳ ý.

Bài toán 27. Trong một hội đồng nhân dân, mỗi thành viên của hội đồng có nhiều nhất 3 người bất đồng chính kiến với mình. Chứng minh rằng ta có thể chia hội đồng thành hai hội đồng nhỏ sao cho trong mỗi hội đồng nhỏ một thành viên chỉ có nhiều nhất một người bất đồng chính kiến.

NGUYÊN LÝ BẤT BIẾN

(Kỹ năng giải và sáng tạo bài toán mới)

Xét tập X của những trạng thái (mỗi trạng thái có thể là một bộ n số thực - một bảng số ($n \times n$)). Một dãy lặp của các trạng thái được thành lập bằng cách thực hiện nhiều lần một phép biến đổi, một thuật toán hay một quy tắc cho phép chúng ta chuyển từ trạng thái này sang trạng thái tiếp sau

$$x_1 \to x_2 \to x_3 \to \cdots \to x_n$$

Đối với dãy lặp như trên có 3 dạng bài toán sau được đặt ra:

I. BÀI TOÁN VỀ TÍNH CHẤT HỮU HẠN HOẶC VÔ HẠN CỦA DÃY LẶP

Nếu dãy lặp là hữu hạn thì xác định chiều dài lớn nhất của dãy lặp và trạng thái cuối cùng hoặc một trạng thái bất kì.

Bài toán 1. Trên bàn có 6 viên sỏi, được chia thành vài đống nhỏ. Mỗi phép biến đổi được thực hiện như sau: Ta lấy ở mỗi đống 1 viên và lập đống mới. Hỏi sau 30 bước biến đổi như trên, các viên sỏi trên mặt bàn được chia thành mấy đống, mỗi đống có bao nhiêu viên?

Bài giải

Mỗi trạng thái (phép chia) chúng ta mô tả bằng một bộ số nguyên dương. Ví dụ như (4, 1, 1) có nghĩa là 3 đống, 1 đống 4 viên và hai đống còn lại mỗi đống 1 viên.

Nếu nhận được trạng thái (3, 2, 1) thì các phép biến đổi sau không làm thay đổi cách chia vì theo quy tắc ta có

$$(3,2,1) \to (2,1,3) \to (1,2,3) \to (1,2,3)$$

(Vẫn là 3 nhóm, một nhóm 3 viên, một nhóm 2 viên, 1 nhóm 1 viên). Suy ra, số các trạng thái của dãy lặp là hữu hạn, nếu mọi cách chia đều dẫn tới trạng thái (3, 2, 1) sau một số hữu hạn bước. Thật vậy, ta có bảng mô tả các phép biến đổi như sau:

$$\begin{tikzcd}
& & {[2,1,1,1,1]} \arrow[d] & {[2,2,1,1]} \arrow[r] & {[4,1,1]} \arrow[r] & {[3,3]} \arrow[d] \\
{[1,1,1,1,1,1]} \arrow[r] & {[6]} \arrow[r] & {[5,1]} \arrow[r] & {[4,2]} \arrow[d] & {[3,1,1,1]} \arrow[l] & {[2,2,2]} \arrow[l] \\
& & & {[3,1,2]} & &
\end{tikzcd}$$

Như vậy, sau nhiều nhất là 6 bước ta sẽ gặp trạng thái [3, 1, 2]. Suy ra, ở bước 30 ta có cách phân chia là (3, 1, 2).

II. BÀI TOÁN VỀ TÍNH CHẤT TUẦN HOÀN CỦA DÃY LẶP

Bài toán 2. Bắt đầu với bộ 4 số thực dương (a,b,c,d) trong đó a, b, c, d không đồng thời bằng 1. Ta lập bộ mới (ab,bc,cd,da) và lặp lại phép biến đổi này. Chứng minh rằng trong các bộ 4 số nhận được từ phép biến đổi không có bộ (a,b,c,d).

Bài giải

Giả sử phản chứng rằng sau một số hữu hạn bước ta nhận được bộ số ban đầu (a,b,c,d), đặt $S = abcd$.

Ở bước 1, tích của 4 số sẽ là: $(ab)(bc)(cd)(da) = S^2$

Ở bước 2, tích của 4 số sẽ là S^4.

Suy ra, ở bước thứ k, tích của 4 số sẽ là S^{2^k} $(k \geq 1)$.

Từ giả thiết phản chứng suy ra $S^{2^k} = S$ $(k \geq 1) \Leftrightarrow S = 1$.

Tóm lại ta có $abcd = 1$.

Ta xét một số trạng thái

$$\begin{aligned}
&(a,b,c,d) \to (ab,bc,cd,da) \to (ab^2c,bc^2d,cd^2a,da^2b) \\
&\to (ab^3c^3d,bc^3d^3a,cd^3a^3b,da^3b^3c) = (b^2c^2,c^2d^2,d^2a^2,a^2b^2)
\end{aligned}$$

Như vậy bộ ở trạng thái 4 nhận được từ trạng thái 2 bằng cách bình phương từng thành phần và xếp lại thứ tự (thứ 2 $\to$ thứ 1, thứ 3 $\to$ thứ 2, thứ 4 $\to$ thứ 3, thứ 1 $\to$ thứ 4). Và cứ như vậy, bộ thứ 6 nhận được từ bộ thứ 4, bộ thứ 8 nhận được từ bộ thứ 6 v.v....

Ký hiệu $t = \text{Max}(ab, bc, cd, da) \Rightarrow t^2$ là thành phần lớn nhất của bộ thứ 4, t^4 là thành phần lớn nhất của bộ thứ 6, v.v..., $t^{2^{k-1}}$ là thành phần lớn nhất của bộ thứ $2k$. Theo giả thiết phản chứng, dãy lặp là tuần hoàn (đến một bước nào đó sẽ thu được (a,b,c,d)). Suy ra dãy số $t, t^2, t^4, \ldots$ là dãy vô hạn chỉ nhận một số hữu hạn giá trị. Vậy ta thu được $t = 1$.

Ta có, $1 = a^2b^2c^2d^2 = ab.bc.cd.da \le t.t.t.t = t^4 = 1$.

Suy ra, $ab = bc = cd = da \Rightarrow a = b = c = d = 1$ (mâu thuẫn).

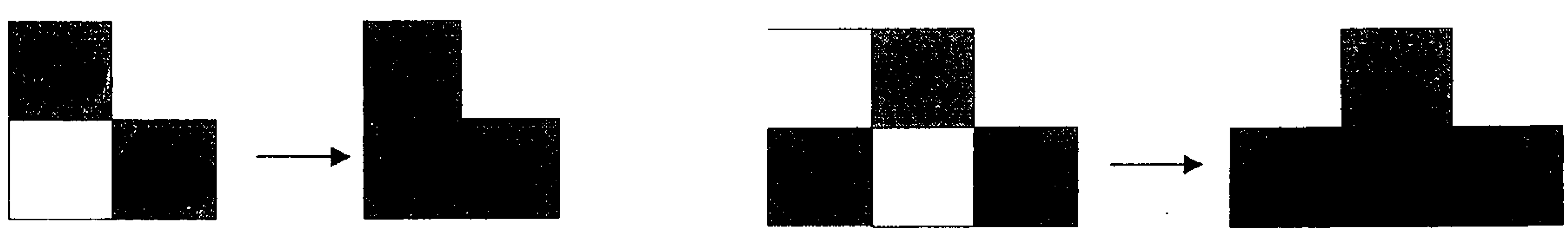
III. BÀI TOÁN VỀ SỰ TỒN TẠI CỦA DÃY LẶP MÀ TRẠNG THÁI CUỐI CÙNG THOẢ MÃN MỘT TÍNH CHẤT CHO TRƯỚC

Đây là dạng bài toán khái quát của những bài toán thường gặp mà khi giải chúng, ta phải sử dụng nguyên lý bất biến.

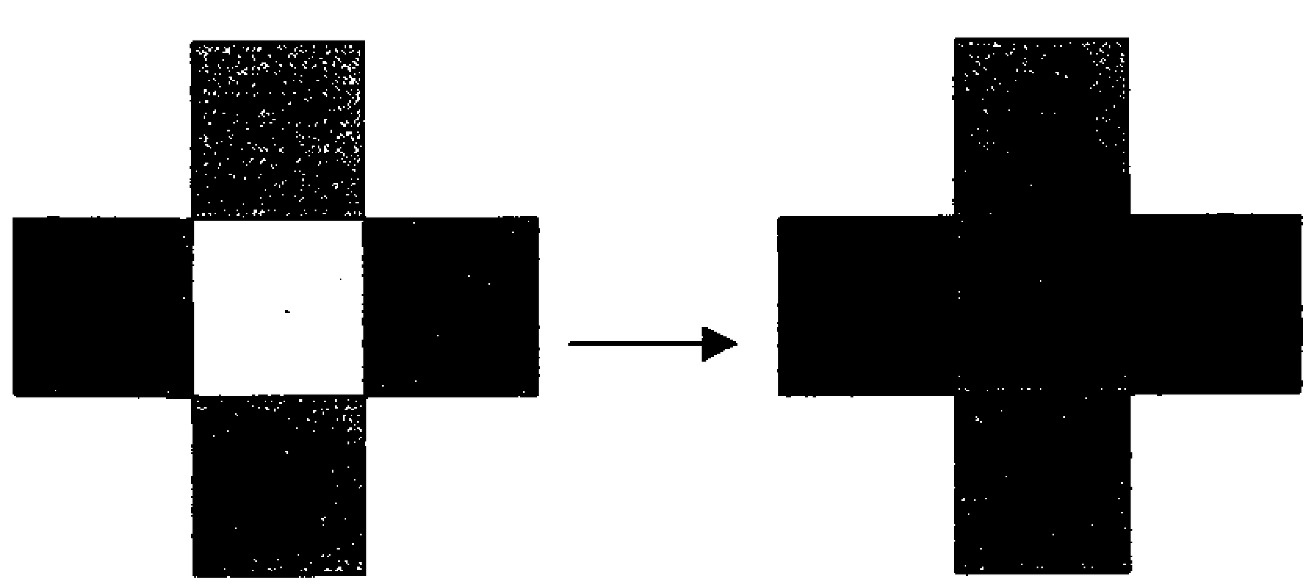
Bài toán 3. Trên bảng có (10×10) có 9 ô bôi đen. Mỗi bước biến đổi ta bôi đen một ô kề liền (có cạnh chung) với ít nhất 2 ô đen. Hỏi sau một số hữu hạn bước ta có thể tô đen cả bảng được hay không?

Bài giải

Sau mỗi phép biến đổi chu vi của tất cả các ô đen không tăng (1)



Chu vi 8 Chu vi 8 Chu vi 12 Chu vi 11



Chu vi 16 Chu vi 12

Ở trạng thái ban đầu, chu vi $d_A \le 4.9 = 36$ (2).

(Chu vi lớn nhất bằng 36 khi 9 ô đôi một không kề nhau).

Ở trạng thái kết thúc, chu vi $d_B = 4.10 = 40$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra không thể nhận được trạng thái cuối cùng.

- ***Nhận xét.*** Ta mô tả bài toán tổng quát như sau:

Xét $A \subset X$, $B \subset X$, hỏi có tồn tại một dãy lặp của các trạng thái $x_1 \to x_2 \to x_3 \to \text{L L} \to x_n$ sao cho $x_1 \in A, x_n \in B$. Trong các bài toán cụ thể, các tập A, B được xác định bằng một tính chất nào đó:

$$A = \{a \in X \mid a \text{ thoả mãn tính chất } F_A\}$$

$$B = \{b \in X \mid b \text{ thoả mãn tính chất } F_B\}.$$

Bài toán 3 được mô tả như sau:

- X là tập hợp các bảng (10×10) bị bôi đen ít nhất 9 ô tuỳ ý.
- Quy tắc biến đổi: Tô đen một ô kề với ít nhất 2 ô đen.
- $A = \{x \in X \mid \text{có 9 ô tô đen}\}$
- $B = \{x \in X \mid \text{tất cả các ô tô đen}\}$
- Câu hỏi: Có tồn tại một dãy lặp $x_1, x_2, ..., x_n$ mà $x_1 \in A, x_n \in B$ hay không.

Khi tìm lời giải của các bài toán 1, 2, 3 nêu trên thì sự khó khăn không phải là mô tả bài toán mà là phải tìm ra một tính chất của một đại lượng (yếu tố) nào đó từ bài toán. Công việc này thường gọi là tìm ra một bất biến nào đó để sử dụng cho việc giải bài toán.

IV. TÌM ĐẠI LƯỢNG KHÔNG THAY ĐỔI SAU MỖI PHÉP BIẾN ĐỔI

Bài toán 4. Trên một đường tròn, chúng ta viết 2 số 1 và 48 số 0 theo thứ tự 1, 0, 1, 0, 0, ..., 0. Mỗi phép biến đổi ta thay một cặp 2 số liền nhau bất kì (x, y) bởi $(x+1, y+1)$. Chứng minh rằng bằng những phép biến đổi trên ta không thu được dãy 50 số bằng nhau.

Bài giải

Ta kí hiệu các số viết trên đường tròn theo thứ tự là $x_1, x_2, ..., x_{50}$. Ta xét đại lượng

$$I = (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) + (x_5 - x_6) + \ldots + (x_{49} - x_{50})$$

Giá trị của I không thay đổi sau mỗi phép biến đổi vì 2 số liền kề trong tổng I có 2 dấu ngược nhau (khi tăng cả 2 số thì số hạng mang dấu + sẽ tăng 1, số hạng mang dấu - sẽ giảm 1). (1)

Ta có $I_0 = 2$ (ở trạng thái ban đầu) (2)

$I_E = 0$ (ở trạng thái kết thúc). (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra không thể thu được 50 số bằng nhau.

Bài toán 5. Xét một đa giác đều 12 đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$. Tại đỉnh A_1 ta viết số -1, tại các đỉnh khác ta viết số 1. Mỗi phép biến đổi ta đổi dấu 6 đỉnh liền kề của đa giác. Hỏi có thể thu được trạng thái: (Đỉnh A_2 viết số -1 và các đỉnh còn lại viết số 1) sau một số hữu hạn phép biến đổi hay không?

Bài giải

Sau mỗi phép biến đổi, các tích $a_1a_7, a_2a_8, a_3a_9, a_4a_{10}, a_5a_{11}, a_6a_{12}$ đổi dấu vì chỉ có 1 thừa số đổi dấu. Suy ra $I = (a_2a_8)(a_3a_9)$ không thay đổi sau mọi phép biến đổi. (1)

Tại vị trí ban đầu ta có $I_0 = 1$ (2)

Tại vị trí kết thúc ta có $I_E = -1$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra không thể nhận được trạng thái tại đỉnh A_2 viết -1, đỉnh khác viết số 1.

- *Nhận xét*: Nếu phép biến đổi là đổi dấu tại 4 đỉnh liền kề của đa giác, ta có lời giải như sau:

Sau mỗi phép biến đổi, các tích $a_1a_5a_9, a_2a_6a_{10}, a_3a_7a_{11}, a_4a_8a_{12}$ sẽ đổi dấu vì chỉ một thừa số đổi dấu sau mỗi phép biến đổi. Suy ra:

$I = (a_1a_5a_9)(a_3a_7a_{11})$ không đổi sau mọi phép biến đổi. (1)

$I_0 = -1$ (trạng thái ban đầu) (2)

$I_E = 1$ (trạng thái kết thúc). (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra không thể nhận được trạng thái cuối cùng như theo yêu cầu của bài toán.

V. TÌM TÍNH CHẤT CỦA MỘT ĐẠI LƯỢNG KHÔNG THAY ĐỔI SAU CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI

Bài toán 6. Xét dãy số $1,2,3,4,...,2n$ với n lẻ. Mỗi phép biến đổi ta xoá 2 số a,b bất kì và viết thêm vào dãy một số $|a-b|$. Sau mỗi bước dãy giảm một số. Chứng minh rằng số cuối cùng còn lại phải là số lẻ.

Bài giải

Kí hiệu S là tổng các số của dãy ở từng trạng thái. Giả sử $a>b$, sau mỗi phép biến đổi S thay đổi một lượng bằng $-(a+b)+(a-b)=-2b$ Suy ra tính chất chẵn, lẻ của S là bất biến. (1)

Trạng thái ban đầu $S=1+2+3+\cdots+2n=n(2n+1)$ là số lẻ (vì n lẻ). (2)

Từ (1), (2) suy ra số còn lại duy nhất ở trạng thái cuối cùng phải là số lẻ.

Bài toán 7. Các số $1,2,3,4,...,n$ ban đầu được xếp theo một thứ tự nào đó. Mỗi phép biến đổi cho phép đổi thứ tự 2 số kề nhau. Chứng minh rằng sau một số lẻ lần phép biến đổi chúng ta không thể nhận được hoán vị ban đầu.

Bài giải

Trong hoán vị $(a_1,a_2,...,a_n)$ của các số $1,2,3,4,...,n$, một bộ (a_j,a_k), $j<k$, $a_j>a_k$ gọi là một bộ tốt.

Kí hiệu d_i là tổng số các bộ tốt ở trạng thái thứ i. Khi thực hiện một phép biến đổi thì tổng số các bộ tốt tăng 1 hoặc giảm 1. Suy ra, tính chất chẵn, lẽ của d_i thay đổi sau mỗi phép biến đổi. Sau một số lẻ lần biến đổi d_0 và d_n (trạng thái cuối cùng) khác tính chẵn lẻ. Vậy không thể nhận được hoán vị đầu tiên.

VI. NGUYÊN LÝ BẤT BIẾN

Thực chất cách giải của bài toán 4 và 5 là tìm hàm $f:X\to c\in\mathbb{R}$ (c là hằng số), bài toán 6, 7 là sử dụng tính chất $f:X\to\mathbb{N}^*$. Vậy ta có thể mô tả nguyên lý bất biến như một hàm số học xác định trên tập các trạng thái X và nhận giá trị trên tập Y. (Y thường là tập cá số nguyên dương, tập số thực, tập các bộ số nguyên dương,bộ số thực). Sử dụng tính chất của hàm f chúng ta giải các dạng bài toán 1, 2, 3 trên dãy lặp của những trạng thái. Trong phần này chúng ta sử dụng nhiều ví dụ cụ thể để luyện tập kĩ năng giải.

Bài toán 8. Cho bộ 3 số nguyên (a,b,c), ta xây dựng bộ mới $(|a-b|,|b-c|,|c-a|)$. Chứng minh rằng sau một số hữu hạn phép biến đổi ta nhận được bộ 3 số có chứa số 0.

Bài giải

Không mất tổng quát, ta giả thiết $a, b, c>0$. Vì ở trạng thái thứ 2, 3, thành phần đã là số dương.

Ta đặt $J = \text{Max}(a,b,c)$; $J_1 = \text{Max}(|a-b|,|b-c|,|c-a|)$.

Ta có bất đẳng thức

$$|x-y| = \text{Max}(x, y) - \text{Min}(x,y) < \text{Max}(x,y)$$

Suy ra $J_1 < J_0 \Rightarrow J_1 \le J_0 - 1$. Tương tự $J_2 \le J_1 - 1 \Rightarrow J_2 \le J_0 - 2, \ldots, J_n \le J_0 - n$. (1)

Chọn $n > J_0$ suy ra (1) không thoả mãn.

Vậy các phép biến đổi trên phải dừng sau một số hữu hạn bước và khi đó bộ 3 số nhận được có chứa số 0.

Bài toán 9. Giả sử, n số thực $n \ge 4$ được viết xung quanh một đường tròn. Nếu 4 số kề nhau a, b, c, d thoả mãn $(a-d)(b-c) < 0$ ta đổi vị trí của 2 số kề nhau b, c. Chứng minh rằng các phép biến đổi như trên sẽ kết thúc sau một số hữu hạn bước.

Bài giải

Ta đánh số các số xung quanh đường tròn theo một hướng nhất định $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Và đối với một cách sắp xếp ta xác định (ở trạng thái thứ k)

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$$

Giả sử tại tình huống (trạng thái) thứ k ta có

$$(x_i - x_{i+3})(x_{i+1} - x_{i+2}) < 0 \Leftrightarrow x_ix_{i+1} + x_{i+2}x_{i+3} < x_ix_{i+2} + x_{i+1}x_{i+3} \quad (1)$$

Sang trạng thái thứ $k+1$ ta có bộ $(x_i, x_{i+2}, x_{i+1}, x_{i+3})$

$$f_k = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + (x_ix_{i+1} + x_{i+1}x_{i+2} + x_{i+2}x_{i+3}) + x_{i+3}x_{i+4} + \cdots + x_nx_1$$
$$f_{k+1} = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + (x_ix_{i+2} + x_{i+2}x_{i+1} + x_{i+1}x_{i+3}) + \cdots + x_nx_1$$

Áp dụng điều kiện (1) ta có $f_k < f_{k+1}$. (2)

Mặt khác, f chỉ nhận một số hữu hạn giá trị (nhiều nhất là $n!$ giá trị) (3).

Từ (2), (3) suy ra các phép biến đổi như trên phải kết thúc sau một số hữu hạn bước.

Bài toán 10. Xét một dãy số nguyên $x_1, x_2, ..., x_n$ cho trước. Nếu với $i>j$ là hai chỉ số tuỳ ý sao cho $x_i - x_j = 1$ thì ta thay thế x_i, x_j bởi x_{i+1}, x_{j+1} (theo đúng thứ tự). Chứng minh rằng các phép biến đổi như vậy sẽ kết thúc sau một số hữu hạn bước.

Bài giải

- Ta lập hàm số học

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

Sau mỗi phép biến đổi ta thay $x_i^2 + x_j^2$ bởi $(x_i + 1)^2 + (x_j + 1)^2$ trong f.

Vậy f thay đổi một lượng bằng $(x_i + 1)^2 + (x_j + 1)^2 - (x_i^2 + x_j^2) = 2(x_i - x_j) + 2 = 4$. Vậy f là hàm tăng thực sự.

- Kí hiệu $M = \text{Max}(x_1, x_2, ..., x_n)$; $m = \text{Min}(x_1, x_2, ..., x_n)$

Ta xét một phép biến đổi $x_i - x_j = 1 \Rightarrow y_i = x_i + 1; y_j = x_j + 1$

Nếu $x_i = k - 1 \Rightarrow y_i = x_i + 1 = k$

$x_i = k \Rightarrow y_i = x_i + 1 = k + 1$

$x_i = k + 1 \Rightarrow x_j = k \Rightarrow y_j = x_j - 1 = k - 1$

$x_j = k - 1 \Rightarrow x_i = x_j + 1 = y_j = k.$

Vậy nếu $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \cap \{k-1, k, k+1\} \neq \varnothing$

suy ra $\{y_1, y_2, ..., y_n\} \cap \{k-1, k, k+1\} \neq \varnothing$. (1)

Trong đó $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ nhận được từ $x_1, x_2, ..., x_n$ sau một phép biến đổi.

- Ta chứng minh $y_i < M + 3n$ (2) (y_i là một thành phần bất kì của bộ số nhận được sau một phép biến đổi bất kì).

Giả sử phản chứng $y_i \geq M + 3n$, suy ra mọi số nguyên $M \leq a \leq y_i$ phải là thành phần của một bộ n số nào đó trong dãy lặp (Vì sau mỗi phép biến đổi các thành phần của bộ n số tăng nhiều nhất 1. Mà theo giả thiết phản chứng đã tăng tới $y_i \geq M + 3n$).

Từ kết quả (1) suy ra $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ có giao khác trống với $(n+1)$ tập đôi một rời r nhau.

$$\{M-1, M, M+1\}, \{M+2, M+3, M+4\}, .., \{M+3n-1, M+3n, M+3n+1\}$$

(Mâu thuẫn vì bộ chỉ có n số). Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được $y_i > m - 3n$ (3).

Từ các bất đẳng thức (2), (3) suy ra f bị chặn trên.

Vì f là hàm tăng thực sự nên suy ra quá trình biến đổi phải kết thúc sau một số hữu hạn bước.

Bài toán 11. Trong dãy số 1, 0, 1, 0, 1, 0, 3, 5, 0, bắt đầu từ số thứ 7 thì mỗi số bằng chữ số thập phân cuối cùng của tổng 6 số đứng trước. Chứng minh rằng trong dãy vô hạn thu được không xuất hiện lại 6 số 0, 1, 0, 1, 0, 1.

Bài giải

Xét phép biến đổi $(x_1, x_2, ..., x_6) \to (x_2, x_3, ..., x_7)$ trong đó x_7 là chữ số cuối cùng của tổng $x_1 + x_2 + \cdots + x_6$. Ta lập hàm số học

$$f(x_1, x_2, ..., x_6) = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 10x_5 + 12x_6$$

Khi đó

$$\begin{aligned} f(x_2, x_3, ..., x_7) - f(x_1, x_2, ..., x_6) &= [2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 8x_5 + 10x_6 + 12x_7] - \\ &\quad - [2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 10x_5 + 12x_6] \\ &= [10x_7 + 2(x_7 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_6))] \end{aligned}$$

0912313787
T. Vũ Hệ

Vì x_7 là chữ số cuối cùng của $x_1 + x_2 + \dots + x_6$ suy ra $x_7 - (x_1 + x_2 + \dots + x_6)$ chia hết cho 10.

Suy ra $f(x_2, x_3, ..., x_7) - f(x_1, x_2, ..., x_6)$ chia hết cho 10.

Ta có $f(1,0,1,0,1,0) = 18$, theo tính chất của f thì tất cả các giá trị f_i ở các trạng thái sau phải có số cuối cùng là 8 để $f_{i+1} - f_i$ chia hết cho 10. Nếu xuất hiện 0, 1, 0, 1, 0, 1 trong dãy thì $f(1,0,1,0,1,0)$ phải có số cuối cùng là 8. Nhưng theo định nghĩa ta lại có $f(1,0,1,0,1,0) = 24$ (mâu thuẫn).

VII. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐƠN GIẢN

Để rèn luyện kĩ năng giải chúng ta bắt đầu với các bài toán đơn giản và một số nhận xét về phương pháp giải.

Bài toán 12. Xét tập $M = \{(0,0),(1,1),(-3,0),(2,-1)\}$. Mỗi phép biến đổi ta thay thế $(a,b) \in M$ bất kì bởi $(a+2c, b+2d)$ với $(c,d) \in M$. Hỏi sau một số hữu hạn bước có nhận được tập $M_1 = \{(-1,2),(2,-1),(4,0),(1,1)\}$

Bài giải

Với $(x,y) \in M$ ta có $|x-y|$ chia hết cho 3.

Nếu $(a,b) \in M$, $(c,d) \in M$ ta có $(a+2c)-(b+2d) = (a-b)+2(c-d)$ chia hết cho 3.

Do vậy chúng ta không thể nhận được M_1 sau một số hữu hạn bước vì $(4,0) \in M_1$ mà $4-0$ không chia hết cho 3.

Bài toán 13. Chúng ta bắt đầu với 2 số 0, 1. Một phép biến đổi chúng ta thêm vào hoặc xoá đi 2 số kề nhau (0, 0) hoặc (1, 1). Chứng minh rằng chúng ta không thể nhận được cặp 2 số (1, 0) ở trạng thái cuối cùng.

Bài giải

Trong một trạng thái 2 số bất kì 1, 0 (một xếp trước) tạo thành một cặp tốt. Khi thực hiện các phép biến đổi thì tổng số các cặp tốt sẽ không tăng, tăng chẵn, giảm chẵn. Ở trạng thái ban đầu ta có tổng số cặp tốt d=0, ở trạng thái cuối cùng $d_c = 1$ (khác tính chẵn, lẻ) vậy không thể nhận được 1, 0 ở trạng thái cuối cùng.

Bài toán 14. Trong dãy vô hạn các bình phương có chứa một dãy con vô hạn lập thành cấp số cộng?

Bài giải

Xét 3 bình phương lập thành cấp số cộng $a_1^2 < a_2^2 < a_3^2$.

Khi đó ta có $a_3^2 - a_2^2 = a_2^2 - a_1^2 \Leftrightarrow (a_3 - a_2)(a_3 + a_2) = (a_2 - a_1)(a_2 + a_1)$

Vì $a_1 + a_2 < a_2 + a_3 \Rightarrow a_3 - a_2 < a_2 - a_1$ (1)

Giả sử phản chứng rằng có tồn tại một dãy con vô hạn lập thành cấp số cộng, áp dụng (1) ta có $a_2 - a_1 > a_3 - a_2 > a_4 - a_3 > \ldots$

Dãy số trên là dãy số nguyên dương giảm thực sự (bị chặn dưới bởi 0) nên không là dãy vô hạn (mâu thuẫn).

Bài toán 15. Kí hiệu $d(n)$ là tổng các chữ số của $n \in$ ¥ . Hãy tìm n thoả mãn đẳng thức

$$n + d(n) + d(d(n)) = 1997.$$

Bài giải

Vì $n \equiv d(n) (\text{mod} 3) \Rightarrow d(d(n)) \equiv d(n) \equiv n (\text{mod} 3)$

Suy ra $n + d(n) + d(d(n)) \equiv 0 (\text{mod} 3)$

Mặt khác $1997 \not\equiv 0 (\text{mod} 3)$. Vậy không tồn tại n.

Bài toán 16. Giả sử $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ là một hoán vị của $1, 2, \ldots, n$. Với n lẻ, chứng minh rằng

$$P = (a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)\ldots(a_n - n)$$

là số chẵn.

Bài giải

Giả sử phản chứng P là số lẻ, suy ra mọi thừa số $a_i - i$ phải là số lẻ. Suy ra $\sum_{i=1}^{n}(a_i - i)$ là số lẻ. (Tổng của một số lẻ các số hạng lẻ). Mặt khác $S = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} i = 0$ (mâu thuẫn).

Bài toán 17. Xét dãy số 1, 2, 3, ..., $4n$-1, ta thực hiện các phép biến đổi liên tiếp như sau:

Xoá 2 số bất kì trong dãy và viết tiếp vào dãy một số bằng hiệu của chúng. Chứng minh rằng số nguyên còn lại cuối cùng là số chẵn.

Bài giải

Sau mỗi bước số phần tử của dãy giảm 1. Suy ra sau $4n$-2 bước ta thu được dãy gồm 1 số duy nhất.

Tại trạng thái ban đầu trong dãy có 2n số lẻ. Sau mỗi phép biến đổi thì số số lẻ giảm 2 hoặc không giảm vì

- Nếu xoá 2 số lẻ ta có hiệu của chúng là số chẵn, suy ra số số lẻ giảm 2.
- Nếu xoá 2 số chẵn thì hiệu của chúng là số chẵn, suy ra số số lẻ không thay đổi.
- Nếu xoá 1 số lẻ, 1 số chẵn thì hiệu của chúng là số lẻ, suy ra tổng số số lẻ không thay đổi.

Vì ở trạng thái ban đầu có 2n số lẻ, suy ra trạng thái kết thúc cũng phải có số chẵn số lẻ. Vậy còn 1 số cuối cùng thì số đó phải là số chẵn để số số lẻ bằng 0.

Bài toán 18. Ta viết tuỳ ý các số nguyên dương vào một bảng $(m \times n)$. Mỗi phép biến đổi cho phép gấp đôi các số của một hàng hoặc trừ 1 tất cả các số của một cột. Chứng minh rằng chúng ta có thể thực hiện một số phép biến đổi như vậy để nhận được một bảng gồm toàn số 0.

Bài giải

Nếu có một cột gồm toàn số 0 thì cột số này hoàn toàn không thay đổi khi chúng ta nhân đôi một hàng. Như vậy, để đạt được mục đích chúng ta cần xây dựng được một cột bất kì gồm toàn số 1, sau đó trừ 1 vào các số của cột này. Các cột sau thực hiện tương tự.

Để có một cột gồm toàn số 1, chúng ta làm như sau: Vì có thể trừ 1 vào các số của một cột nên luôn tìm được hoặc tạo ra bằng cách liên tiếp trừ vào 1 cột một số 1 tại một cột nào đó. Ta nhân đôi vào hàng có chứa số 1 và từ 1 vào chính cột này. Sau 2 phép biến đổi các số của cột này giảm đi 1. Tiếp tục các phép biến đổi trên ta nhận được một cột gồm toàn số 1 (đpcm).

VIII. MỘT SỐ BÀI TOÁN NÂNG CAO

Trong phần này chúng ta xây dựng cách giải cho những bài toán phức tạp hơn.

Bài toán 19. Xung quanh công viên người ta trồng n cây và giả sử trên mỗi cây có một con chim. Thỉnh thoảng 2 con chim đồng thời bay sang cây bên cạnh theo hướng ngược lại. Hỏi có thể đến một lúc nào đó tất cả các con chim cùng đậu trên một cây không?

Bài giải

Chúng ta đánh số các cây trong công viên là 1, 2, 3, 4, ..., n.

- Trường hợp $n = 2k + 1$ (lẻ) là có thể và bằng cách sau đây:
    - Chim từ cây 2, cây $2k + 1$ đồng thời bay về cây 1.
    - Chim từ cây 3, cây $2k$ đồng thời bay về $(2, 2k + 1) \to 1$.
    - Chim từ cây 4, cây $2k - 1$ đồng thời bay về $(3, 2k) \to 1$.
    - Chim từ cây $(k + 1, k + 2) \to (k, k + 3) \to \cdots\cdots \to 1$.
- Trường hợp $n = 2k$ (câu trả lời là không thể).

Giả sử tại một thời điểm nào đó ta kí hiệu P_i là số chim trên cây thứ i và xét tổng

$$S = 1.P_1 + 2P_2 + \ldots + nP_n$$

Khi con chim bay sang bên cạnh theo chiều đánh số thì số hạng iP_i giảm i, số hạng $(i+1)P_{i+1}$ tăng $i+1$.

Suy ra S tăng 1. Nếu chim bay từ cây n sang cây 1 thì nP_n giảm n, $1P_1$ tăng 1. Suy ra S giảm $n-1$.

Khi con chim bay theo chiều ngược lại với lý luận tương tự ta có S giảm 1 hoặc tăng $n-1$.

Vậy khi 2 con chim bay đồng thời sang cây bên cạnh theo chiều ngược lại thì tổng S thay đổi một lượng là $1+(-1)=0$; $(n-1)-(n-1)=0$; $1+(n-1)=n$; $-(n-1)-1=-n$

Như vậy tổng S là bất biến trong phép chia cho n.

Tại trạng thái ban đầu $S = 1.1 + 2.1 + \text{L } n.1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Không chia hết cho n vì $\dfrac{n+1}{2} = \dfrac{2k+1}{2}$ không là số nguyên.

Tại trạng thái cuối cùng ta có $S = n.j$ chia hết cho n (mâu thuẫn).

Bài toán 20. Từ một bộ n số $(x_1, x_2, ..., x_n)$ trong đó x_i $(i = 1, ..., n)$ nhận một trong hai giá trị $+1, -1$. Mỗi phép biến đổi ta lập bộ mới $(x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, ..., x_nx_1)$. Chứng minh rằng nếu $n = 2^k$, ($k \geq 1$) thì sau một số hữu hạn bước ta sẽ nhận được bộ $(1,1,1,\text{K } ,1)$.

Bài giải

Ta chứng minh quy nạp theo k.

$$k = 1\ (n = 2):\ (1,-1) \to (-1,-1) \to (1,1)$$

Giả sử bài toán đúng với dãy chiều dài $n = 2^k$. Ta xét dãy chiều dài 2^{k+1}. Ở trạng thái 2 ta có:

$$(x_1x_2^2x_3, x_2x_3^2x_4, \text{K } , x_{n-1}x_n^2x_1, x_nx_1^2x_2) = (x_1x_3, x_2x_4, \text{K } , x_{n-1}x_1, x_nx_2)$$

là bộ số được cấu tạo bởi 2 bộ chiều dài $n = 2^k$:

$(x_1x_3, x_2x_4, \text{K } , x_{n-1}x_1)$ và $(x_2x_4, x_4x_6\text{K } , x_nx_2)$. (1)

Ở trạng thái thứ 4 ta thu được $(x_1x_5, x_2x_6, x_3x_4, x_4x_8, \text{K } , x_nx_4)$.

Bộ số này có thể nhận được bằng phép biến đổi riêng rẽ của 2 bộ (1). Suy ra áp dụng quy tắc biến đổi cho 2 bộ $(x_1x_3, x_2x_4, \text{K } , x_{n-1}x_1)$ và $(x_2x_4, x_4x_6\text{K } , x_nx_2)$ theo giả thiết quy nạp ta sẽ nhận được hai bộ gồm toàn số 1. Và 2 bộ nhận được này cũng là kết quả của phép biến đổi bộ ở trạng thái 2.

BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN

Bài toán 21. Có một hàng gồm 1000 số nguyên. Ta xây dựng hàng thứ hai bằng cách viết dưới số nguyên a của hàng thứ 1 số $f(a)$ bằng số lần xuất hiện của a ở dòng thứ 1.

Bằng cách tương tự ta xây dựng liên tiếp các hàng tiếp theo. Chứng minh rằng sau một số hữu hạn bước chúng ta sẽ xây dựng được 2 hàng giống hệt nhau.

Bài giải

Theo quy tắc biến đổi ta sẽ nhận được các cột như sau:

$$a$$

$$f(a)$$

$$f(f(a))$$

$$f(f(f(a)))$$

Trong đó $f(a)$ xuất hiện ở hàng thứ hai ít nhất là $f(a)$ lần. Suy ra $f^2(a)=f(f(a))\geq f(a)$ (tăng thực sự nếu có các số $b\neq a$ cũng xuất hiện ở hàng 1, $f(b)=f(a)$ lần).

Bắt đầu từ hàng thứ hai các số trên mỗi cột là các số nguyên dương và đơn điệu không giảm. Suy ra sau một số hữu hạn bước các số trên mỗi cột sẽ không tăng. Khi đó hàng sau sẽ giống hệt hàng trước.

Bài toán 22. Ta viết các số nguyên trên mỗi ô của bàn cờ (8×8). Mỗi phép biến đổi, chúng ta chọn ra bất kì một hình vuông con (2×2) hoặc (3×3) và thêm 1 vào các số nguyên ở mỗi ô.

1. Ta có thể luôn nhận được một bảng gồm toàn số chẵn hay không?
2. Ta có thể luôn luôn nhận được một bảng mà gồm toàn các số chia hết cho 3 hay không?

Bài giải

Trả lời: Không.

- Kí hiệu S là tổng các số của bảng trừ hàng thứ 3 và hàng thứ 6. Sau mỗi phép biến đổi S tăng 4 hoặc 2. Suy ra $S_i \equiv 0 (\bmod 2)$. Do vậy nếu S_0 không chia hết cho 2 thì không thể nhận được một bảng gồm toàn số chẵn được (vì $S_n \equiv 0 (\bmod 2)$).

- Ký hiệu S là tổng các số của bảng trừ hàng thứ 4 và thứ 8. Sau mỗi phép biến đổi S tăng 9 hoặc tăng 6. Suy ra $S_i \equiv 0 (\bmod 3)$. Vậy nếu $S_0 \neq 0 (\bmod 3)$ thì không thể nhận được một bảng gồm toàn các số chia hết cho 3 được.

Bài toán 23. Tại các đỉnh của đa giác chúng ta viết các số nguyên x_i sao cho $S = \sum_{i=1}^{5} x_i > 0$. Nếu x, y, z là 3 số tại 3 đỉnh liên tiếp có $y < 0$ ta thay 3 số này bởi 3 số $x + y, -y, z + y$. Chứng minh rằng phép biến đổi trên sẽ dừng lại sau một số hữu hạn bước.

Bài giải

Tại mỗi trạng thái ta lập hàm số học sau:

$$f_0(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_5)^2 + (x_4 - x_1)^2 + (x_5 - x_2)^2$$

Nếu $x_4 < 0$ ta thực hiện phép biến đổi và nhận được

$$f_1(x_1, x_2, x_3 + x_4, -x_4, x_5 + x_4) = (x_1 - x_3 - x_4)^2 + (x_2 + x_4)^2 + (x_3 - x_5)^2 + (x_4 + x_1)^2 + (x_5 + x_4 - x_1)^2$$

Ta có:

$$f_1 - f_0 = 2x_4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 2x_4.S < 0 \text{ (vì } S > 0).$$

Giả sử phép biến đổi không dừng lại sau một số hữu hạn bước, ta thu được dãy vô hạn

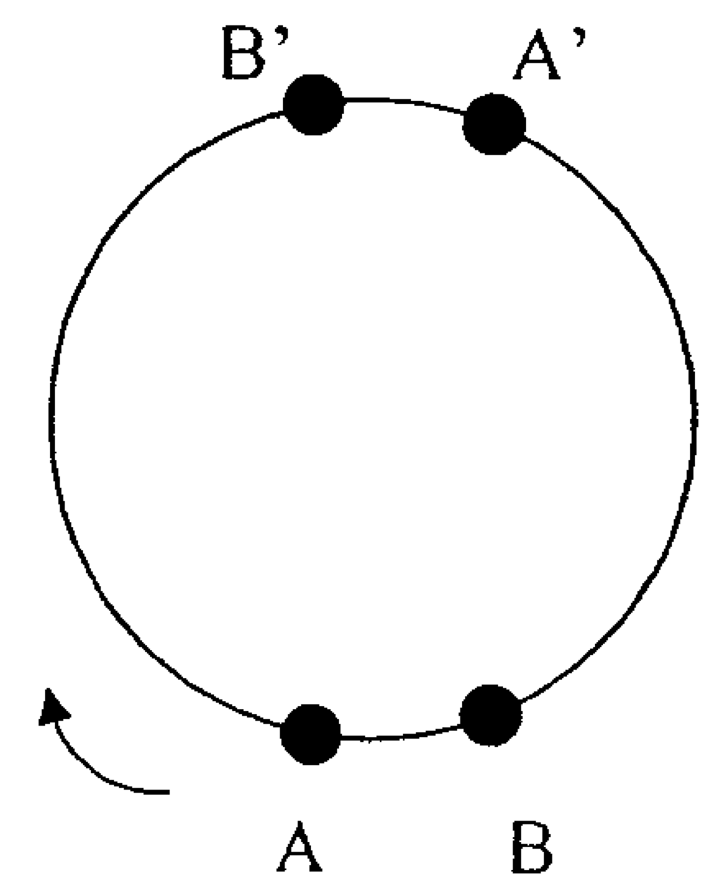
$$f_0 > f_1 > f_2 > \ldots$$

của các số nguyên dương (mâu thuẫn).

Bài toán 24. Có $2n$ ngài đại sứ được mời đến dự một bữa tiệc. Biết rằng một đại sứ không quen nhiều nhất n-1 đại sứ khác. Chứng minh rằng có thể xếp các đại sứ xung quanh một bàn tròn sao cho không có đại sứ nào ngồi giữa 2 người không quen.

Bài giải

Trước hết ta xét một cách xếp bất kì, giả sử 2 đại sứ không quen A, B ngồi cạnh nhau. Kí hiệu d là số các cặp không quen ngồi cạnh nhau. Ta xây dựng một cách xếp để d giảm thực sự như sau:



Ta di chuyển A xung quanh đường tròn. Khi đó A sẽ gặp ít nhất n người bạn A' của mình (theo giả thiết A không quen nhiều nhất n - 1 người). Trong số n người ngồi cạnh A' phải có một người quen của B (vì B không quen nhiều nhất n - 1 người) ta gọi người đó là B'. Đổi chỗ giữa B và A' ta thu được 2 cặp quen nhau. Suy ra d giảm ít nhất 1. Do vậy, sau một số hữu hạn bước ta sẽ có $d = 0$.

Bài toán 25. Xét các số $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ gồm các số nhận một trong hai giá trị 1 hoặc -1 thoả mãn

$$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \ldots + a_na_1a_2a_3 = 0.$$

Chứng minh rằng n phải chi hết cho 4.

Bài giải

Nếu thay a_i bởi $-a_i$ ta sẽ có 4 số hạng trong tổng không đổi dấu (a_i thuộc 4 số hạng).

Nếu 4 số hạng chứa $a_i > 0$ suy ra S giảm 8.

Nếu 4 số hạng chứa $a_i < 0$ suy ra S tăng 8.

Nếu 3 số âm, 1 số dương suy ra S tăng 6 - 2=4.

Nếu 3 số dương, 1 số âm suy ra S giảm 4.

Nếu 2 số âm, 2 số dương, suy ra S không đổi.

Như vậy $S_i \equiv S_{i+1} (\mathrm{mod}\, 4)$.

Ta có $S_0 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ Trong tổng S từng bước ta chuyển các số âm thành số dương (-1 thành 1) và ở trạng thái cuối cùng ta có $S_k = n$. Suy ra $4 \mid n$.

Bài toán 26. Giả sử 4 số a,b,c,d là 4 số nguyên không đồng thời bằng 0. Với (a,b,c,d) là trạng thái ban đầu chúng ta thực hiện phép biến đổi sau:

Thay (a,b,c,d) bởi $(a-b, b-c, c-d, d-a)$.

Chứng minh rằng với phép biến đổi trên chúng ta luôn nhận được những bộ 4 số có một thành phần lớn tuỳ ý.

Bài giải

Giả sử 4 số ở trạng thái n là (a_n, b_n, c_n, d_n), theo quy tắc biến đổi ta có $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$

Chúng ta xây dựng hàm số học như sau:

$$P_n = P(a_n, b_n, c_n, d_n) = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2$$

Khi đó

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (a_n - b_n)^2 + (b_n - c_n)^2 + (c_n - d_n)^2 + (d_n - a_n)^2 \\ &= 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 2(a_n b_n + b_n c_n + c_n d_n + d_n a_n) \end{aligned}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} 0 = (a_n + b_n + c_n + d_n)^2 &= (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2 + 2(a_n + c_n)(b_n + d_n) \\ &= (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2 + 2(a_n b_n + b_n c_n + c_n d_n + d_n a_n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -2(a_n b_n + b_n c_n + c_n d_n + d_n a_n) = (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_{n+1} &= 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) + (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2 \\ &\geq 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) = 2P_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_n \geq 2^{n-1}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2).$$

Bài toán 27. Trong một hội đồng nhân dân, mỗi thành viên của hội đồng có nhiều nhất 3 người bất đồng chính kiến với mình. Chứng minh rằng ta có thể chia hội đồng thành hai hội đồng nhỏ sao cho trong mỗi hội đồng nhỏ một thành viên chỉ có nhiều nhất một người bất đồng chính kiến.

Bài giải

Trước hết ta tách tuỳ ý thành 2 hội đồng và ký hiệu d_1 là tổng số người bất đồng chính kiến với từng thành viên trong hội đồng thứ 1, d_2 là tổng số người bất đồng chính kiến với từng thành viên trong hội đồng thứ 2. Kí hiệu $d = d_1 + d_2$.

Giả sử thành viên A có ít nhất 2 người bất đồng chính kiến trong hội đồng thứ 1. (Khi cách chia không thoả mãn yêu cầu bài toán). Khi đó A sẽ có nhiều nhất 1 người bất đồng chính kiến trong hội đồng thứ 2 (theo giả thiết). Vậy ta chuyển A sang hội đồng thứ 2 thì A thoả mãn yêu cầu của bài toán. Hơn nữa, khi đó d_1 giảm 2 và d_2 tăng 1. Suy ra bất biến d giảm 1. Sau một số hữu hạn bước phép biến đổi dừng lại có nghĩa là không có thành viên nào có ít nhất 2 người bất đồng chính kiến.