

LỜI NÓI ĐẦU

Có thể nói tư duy về tổ hợp ra đời từ rất sớm, tuy nhiên lý thuyết tổ hợp được hình thành như một ngành toán học mới vào khoảng thế kỷ 17 bằng một loạt các công trình nghiên cứu của các nhà toán học xuất sắc như Pascal, Fermat, Leibnitz, Euler... Mặc dù vậy, trong suốt hai thế kỷ rưỡi, tổ hợp không đóng vai trò nhiều trong việc nghiên cứu tự nhiên. Đến nay với sự hỗ trợ đắc lực của máy tính, tổ hợp đã chuyển sang lĩnh vực toán ứng dụng với sự phát triển mạnh mẽ, có nhiều ứng dụng cho con người.

Nhận thức được vai trò của lý thuyết tổ hợp đối với đời sống hiện đại, lý thuyết tổ hợp đã được đưa vào chương trình toán trung học phổ thông. Các bài toán tổ hợp ngày càng chiếm một vị trí hết sức quan trọng trong các kì thi học sinh giỏi toán, olympic toán, vô địch toán... Toán tổ hợp là một dạng toán khó, đòi hỏi tư duy logic, tư duy thuật toán cao, tính hình tượng tốt, phù hợp với mục đích tuyển chọn học sinh có khả năng và năng khiếu toán học. Hơn nữa, nội dung các bài toán kiểu này ngày càng gần với thực tế, và điều này hoàn toàn phù hợp với xu hướng của toán học hiện đại.

Giải một bài toán tổ hợp không hề đơn giản. Khi mới làm quen với giải tích tổ hợp, chúng ta vẫn liên tục đếm nhầm vì những vụ đếm lặp, đếm thiếu, không phân biệt được các đối tượng tổ hợp cần áp dụng, không biết nên sử dụng công cụ gì để giải quyết bài toán. Khi đã vượt qua những khó khăn ban đầu này, ta lại gặp những bài toán mà việc áp dụng trực tiếp các quy tắc đếm cơ bản và các đối tượng tổ hợp không đem lại kết quả mong muốn ngay lập tức. Với những bài toán như vậy, ta cần đến các phương pháp đếm nâng cao hơn.

Bài viết này đề xuất **phương pháp sử dụng ánh xạ** để giải một số lớp bài toán tổ hợp quan trọng.

Trong bài viết này, để có tính hệ thống, trước hết chúng tôi sẽ trình bày một cách vắn tắt phần lý thuyết cơ bản của phương pháp ánh xạ, sau đó, chúng tôi sẽ tập trung vào giới thiệu về sử dụng phương pháp ánh xạ thông qua các ví dụ cụ thể.

Đồng Hới, ngày 24 tháng 4 năm 2013

Tác giả

Nguyễn Chiến Thắng

NỘI DUNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Ánh xạ

1.1. Định nghĩa. Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử x của X với một (và chỉ một) phần tử của Y . Phần tử này được gọi là ảnh của x qua ánh xạ f và được kí hiệu là $f(x)$.

(i) Tập X được gọi là tập xác định của f . Tập hợp Y được gọi là tập giá trị của f .

(ii) Ánh xạ f từ X đến Y được kí hiệu là

$$f : X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

(iii) Khi X và Y là các tập số thực, ánh xạ f được gọi là một hàm số xác định trên X

(iv) Cho $a \in X, y \in Y$. Nếu $f(a) = y$ thì ta nói y là ảnh của a và a là nghịch ảnh của y qua ánh xạ f .

(v) Tập hợp $Y = \{y \in Y \mid \exists x \in X, y = f(x)\}$ gọi là tập ảnh của f . Nói cách khác, tập ảnh $f(X)$ là tập hợp tất cả các phần tử của Y mà có nghịch ảnh.

2. Đơn ánh, toàn ánh, song ánh

2.1. Định nghĩa. Ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là đơn ánh nếu với $a \in X, b \in X$ mà $a \neq b$ thì $f(a) \neq f(b)$, tức là hai phần tử phân biệt sẽ có hai ảnh phân biệt.

Từ định nghĩa ta suy ra ánh xạ f là đơn ánh khi và chỉ khi với $a \in X, b \in X$ mà $f(a) = f(b)$, ta phải có $a = b$.

2.2. Định nghĩa. Ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ được gọi là toàn ánh nếu với mỗi phần tử $y \in Y$ đều tồn tại một phần tử $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Như vậy f là toàn ánh nếu và chỉ nếu $Y = f(X)$.

2.3. Định nghĩa. Ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ được gọi là song ánh nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh. Như vậy ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ là song ánh nếu và chỉ nếu với mỗi $y \in Y$, tồn tại và duy nhất một phần tử $x \in X$ để $y = f(x)$.

3. Ánh xạ ngược của một song ánh

3.1. Định nghĩa. Ánh xạ ngược của f , được kí hiệu bởi f^{-1} , là ánh xạ từ Y đến X gán cho mỗi phần tử $y \in Y$ phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Như vậy

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

3.2. Chú ý. Nếu f không phải là song ánh thì ta không thể định nghĩa được ánh xạ ngược của f . Do đó chỉ nói đến ánh xạ ngược khi f là song ánh.

4. Ánh xạ hợp

4.1. Định nghĩa. Nếu $g: A \rightarrow B$ và $f: B \rightarrow C$ và $g(A) \subset B$ thì ánh xạ hợp

$f \circ g: A \rightarrow C$ được xác định bởi

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)).$$

Kí hiệu $p^n = \underbrace{p \circ p \circ \dots \circ p}_n$.

II. PHƯƠNG PHÁP ÁNH XẠ

Nguyên lý ánh xạ. Cho A và B là các tập hữu hạn khác rỗng và $f: A \rightarrow B$ là một ánh xạ. Khi đó,

a) Nếu f là đơn ánh thì $|A| \leq |B|$

b) Nếu f là toàn ánh thì $|A| \geq |B|$

c) Nếu f là song ánh thì $|A|=|B|$.

Phương pháp ánh xạ dựa vào ý tưởng rất đơn giản:

- Nếu tồn tại một song ánh từ tập hữu hạn A vào tập hữu hạn B thì $|A| = |B|$. Do đó, muốn chứng minh hai tập hợp có cùng số phần tử, chỉ cần xây dựng một song ánh giữa chúng. Hơn nữa, ta có thể đếm được số phần tử của một tập hợp A bằng cách xây dựng song ánh từ A vào một tập hợp B mà ta đã biết cách đếm hoặc dễ đếm hơn.
- Nếu tồn tại một đơn ánh (t.ư toàn ánh) từ A vào B thì $|A| \leq |B|$ (t.ư $|A| \geq |B|$). Do đó, đơn ánh và toàn ánh chủ yếu được sử dụng để chứng minh các bài toán liên quan đến bất đẳng thức tổ hợp. Chuyển bài toán cần chứng minh về việc so sánh số phần tử của hai tập hợp, trong đó có một tập hợp đã biết cách đếm hoặc dễ đếm.

Tương tự nguyên lý **Dirichle**, về mặt ý tưởng thì hết sức đơn giản tuy nhiên thực tế thì không phải đơn giản như thế. Để sử dụng phương pháp này ta cần xác định được một song ánh giữa tập cần đếm vào một tập đã biết cách đếm việc làm này không phải lúc nào cũng thực hiện dễ dàng. Sau đây là một số bài tập áp dụng phương pháp trên.

Định lý. (Bài toán chia kẹo của Euler) Cho k, n là các số nguyên dương. Số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ là C_{n+k-1}^{k-1} .

Chứng minh: Ta cho tương ứng mỗi nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ (1) với một xâu nhị phân độ dài $n+k-1$ trong đó có n bit 1 và $k-1$ bit 0, cụ thể xâu gồm x_1 bit 1, sau đó là 1 bit 0, tiếp theo là x_2 bit 1, sau đó là 1 bit 0, cứ như thế, cuối cùng là x_k bit 1. Dễ dàng chứng minh được đây là một song ánh từ tập A các nghiệm nguyên không âm của (1) vào tập hợp B các xâu nhị phân độ dài $n+k-1$ với n bit 1 và $k-1$ bit 0. Từ đó, theo nguyên lý song ánh ta có $|A|=|B|=C_{n+k-1}^{k-1}$. (đpcm).

Ví dụ 1. Cho các số tự nhiên k, n . Hãy xác định số các ánh xạ $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \square$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^n f(i) = k$.

Lời giải: Đây chính là bài toán chia kẹo Euler. Đáp số: C_{n+k-1}^{k-1} .

Ví dụ 2. (IMO 1989).

Mỗi hoán vị $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ của $1, 2, \dots, 2n$ gọi là có tính chất P nếu $|x_i - x_{i+1}| = n$ với ít nhất một giá trị $i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$. Chứng minh rằng với mỗi số n , số hoán vị có tính chất P lớn hơn số hoán vị không có tính chất P .

Lời giải:

Cách 1: Ta chia $1, 2, \dots, 2n$ thành n cặp $(1, n+1), (1, n+2), \dots, (n, 2n)$. Bây giờ ta thiết lập một ánh xạ f từ tập các hoán vị không có tính chất P vào tập các hoán vị có tính chất P . Giả sử $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ là một hoán vị bất kì không có tính chất P và giả sử x_k là số cùng cặp với x_{2n} , $k \leq 2n-2$, khi đó ánh xạ f xác định như sau

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{2n}, x_{2n-1}, x_{2n-2}, \dots, x_{k+1}).$$

Ta chứng minh f là đơn ánh nhưng không toàn ánh. Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 3. Với số nguyên dương n , chứng minh rằng số cách biểu diễn n thành tổng các số lẻ nhiều hơn số cách biểu diễn n thành tổng các số nguyên dương đôi một khác nhau.

Lời giải: Giả sử A là tập tất cả các cách biểu diễn n thành tổng các số lẻ và B là tập tất cả các cách biểu diễn n thành tổng các số nguyên dương đôi một khác nhau. Tức là,

$$A = \{(a_i) | a_i \text{ odd}, \sum_i a_i = n\} \text{ và}$$

$$B = \{(b_i) | b_i \neq b_j, i \neq j, \sum_i b_i = n, b_i \in \mathbb{N}^*\}$$

$$= \{2^{s_i} r_i - i | s_i \in \mathbb{N}, r_i \text{ odd}, \sum_i b_i = n\}$$

Ta xây dựng toàn ánh f từ A vào B .

Với mỗi bộ $(a_i) \in A$, giả sử có k_1 số lẻ b_1, k_2 số lẻ $b_2, \dots, k_t$ số lẻ b_t . Tức là ta có

$$\sum_{i=1}^t k_i b_i = n$$

Biểu diễn $k_i, i = 1, 2, \dots, t$ theo hệ nhị phân

$$k_i = \overline{l_{s_i, i} l_{s_i-1, i} \dots l_{1, i} l_{0, i}} = 2^{s_i} l_{s_i, i} + 2^{s_i-1} l_{s_i-1, i} + \dots + 2^1 l_{1, i} + 2^0 l_{0, i}$$

Ta thấy

$$\sum_{i=1}^t (2^{s_i} l_{s_i, i} + 2^{s_i-1} l_{s_i-1, i} + \dots + 2^1 l_{1, i} + 2^0 l_{0, i}) b_i = \sum_{i=1}^t k_i b_i = n$$

Và các số hạng trong biểu diễn nhị phân của k_i trừ trường hợp $l_{s_i-j, i} \neq 0$ đôi một khác nhau. Do đó

$$(2^{s_1} l_{s_1, 1} b_1, 2^{s_1-1} l_{s_1-1, 1} b_1, \dots, 2^0 l_{0, 1} b_1, \dots, 2^{s_t} l_{s_t, 1} b_t, 2^{s_t-1} l_{s_t-1, 1} b_t, \dots, 2^0 l_{0, t} b_t) \in B$$

Khi đó ánh xạ $f : A \rightarrow B$ được xác định như sau

$$(b_1, b_1, \dots, b_1, b_2, b_2, \dots, b_2, \dots, b_t, b_t, \dots, b_t) \mapsto$$

$$(2^{s_1} l_{s_1, 1} b_1, 2^{s_1-1} l_{s_1-1, 1} b_1, \dots, 2^0 l_{0, 1} b_1, \dots, 2^{s_t} l_{s_t, 1} b_t, 2^{s_t-1} l_{s_t-1, 1} b_t, \dots, 2^0 l_{0, t} b_t)$$

Ta chứng minh được f là toàn ánh. Do đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 4. (APMO 1998). Giả sử F là tập hợp tất cả các bộ gồm n tập $(A_1, A_2, \dots, A_n)$, trong đó A_i là tập con của tập $\{1, 2, \dots, 2012\}$. Tính

$$\sum_{(A_1, A_2, \dots, A_n) \in F} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|.$$

Lời giải. Với i phần tử $n_1, n_2, \dots, n_i \in \{1, 2, \dots, 2012\}$, ta đếm xem có bao nhiêu bộ $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ thỏa mãn $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{n_1, n_2, \dots, n_i\}$ (*)

Ta cho các phần tử $n_1, n_2, \dots, n_i$ đăng kí có mặt trong tập A_k bằng cách với mỗi phần tử

n_j ta gán cho 1 bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sao cho $a_t = \begin{cases} 0 & \text{if } n_i \notin A_t \\ 1 & \text{if } n_i \in A_t \end{cases}, \forall t = \overline{1, n}$.

Một bộ đăng kí là hợp lệ nếu có ít nhất 1 số 1 (nếu không thì phần tử tương ứng không có mặt trong tập $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$).

Với i phiếu đăng kí $n_1, n_2, \dots, n_i$ (ta gọi là nhóm phiếu đăng kí), ta sẽ lập được bộ $(A_1, A_2, \dots, A_n)$.

Ngược lại, với 2 nhóm phiếu đăng kí khác nhau ta sẽ có 2 bộ tập hợp $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ khác nhau, do đó số bộ $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ thỏa mãn (*) bằng số nhóm phiếu đăng kí hợp lệ.

Vì phiếu đăng kí của $n_j, j = 1, 2, \dots, n$ gồm n chữ số 0 hoặc 1 và phải có ít nhất 1 số 1 nên có $2^n - 1$ cách ghi phiếu cho n_j , suy ra có $(2^n - 1)^i$ nhóm phiếu đăng kí hợp lệ khác nhau.

Có C_{2012}^i cách chọn i phần tử nên suy ra

$$\begin{aligned} \sum_{(A_1, A_2, \dots, A_n) \in F} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^{2012} i C_{2012}^i (2^n - 1)^i = 2012(2^n - 1)2^{n(2012-1)} \\ &= 2012(2^n - 1)2^{2011n} \end{aligned}$$

Bình luận: Bài toán này không dùng phương pháp song ánh theo nghĩa thường, ở đây sẽ không có ánh xạ nào cả. Nguyên lý ánh xạ ở đây được dùng bằng cách, thay vì tính tổng này ta tìm cách tính một tổng khác dễ hơn và có giá trị bằng tổng đã cho. Với mỗi $\{1, 2, \dots, 2012\}$ ta gọi S_i là số các bộ trong F mà i thuộc hợp các phần tử của họ. Rõ ràng trong S thì i được đếm S_i lần, do đó $S = \sum S_i$. Dễ thấy các S_i bằng nhau và bằng $(2^n - 1)2^{2011n}$ và tổng cần tính bằng $2012(2^n - 1)2^{2011n}$.

Ví dụ 5. Cho $n \geq 3$ và $X \subset \{1, 2, \dots, n^3\} = E$ gồm $3n^2$ phần tử. Chứng minh rằng có

thể tìm được 9 số $a_1, a_2, \dots, a_9 \in X$ đôi một khác nhau sao cho hệ
$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ a_4x + a_5y + a_6z = 0 \\ a_7x + a_8y + a_9z = 0 \end{cases}$$

có nghiệm nguyên (x_0, y_0, z_0) thỏa mãn $x_0, y_0, z_0 \neq 0$.

Lời giải.

Sắp xếp các phần tử của tập X theo thứ tự $x_1 < x_2 < \dots < x_{3n^2}$. Đặt

$$X_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{n^2}\}, X_2 = \{x_{n^2+1}, x_{n^2+2}, \dots, x_{2n^2}\}, X_3 = \{x_{2n^2+1}, x_{2n^2+2}, \dots, x_{3n^2}\}$$

Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} f : X_1 \times X_2 \times X_3 &\rightarrow E \times E \\ (a, b, c) &\mapsto (b - a, c - b) \end{aligned}$$

Ta có $|X_1 \times X_2 \times X_3| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot |X_3| = n^6$. Do

$a \in X_1, b \in X_2, c \in X_3$ nên $a < b < c$, suy ra

$b - a \geq 1, c - b \geq 1$ và $(b - a) + (c - b) = c - a < n^3$. Vì vậy tập ảnh của f là tập con của tập A với $A = \{(m; n) \mid m, n \in X, m + n \leq n^3\}$. Mà ta có

$$|A| = \sum_{k=1}^{n^3-1} k = \frac{n^3(n^3-1)}{2} < \frac{n^6}{2}.$$

Do đó, theo nguyên lý Dirichle tồn tại 3 bộ số $(a_i, b_i, c_i), i = 1, 2, 3$ cho cùng một ảnh

(x_0, y_0) nghĩa là ta có $b_i - a_i = x_0$ và $c_i - b_i = y_0, i = 1, 2, 3$. Chọn $z_0 = -x_0 - y_0$ thì

$z_0 = a_i - c_i, i = 1, 2, 3$. Do vậy với mỗi $i = 1, 2, 3$ thì ta có

$c_i x_0 + a_i y_0 + b_i z_0 = c_i(b_i - a_i) + a_i(c_i - b_i) + b_i(a_i - c_i) = 0$. Chứng tỏ hệ phương trình

$$\begin{cases} c_1x + a_1y + b_1z = 0 \\ c_2x + a_2y + b_2z = 0 \\ c_3x + a_3y + b_3z = 0 \end{cases}$$

Có nghiệm nguyên (x_0, y_0, z_0) thỏa mãn $x_0, y_0, z_0 \neq 0$. Do

$$a_i \in X_1, b_i \in X_2, c_i \in X_3 \text{ nên } a_i \neq b_i \neq c_i, \forall 1 \leq i, j, k \leq 3.$$

Giả sử $\exists 1 \leq i < j \leq 3: a_i = a_j$ thì do $b_i - a_i = b_j - a_j$ nên $b_i = b_j$ suy ra $c_i = c_j$, do đó $(a_i, b_i, c_i) = (a_j, b_j, c_j)$, vô lý. Vậy $a_i \neq a_j, \forall 1 \leq i < j \leq 3$.

Tương tự, $b_i \neq b_j, c_i \neq c_j, \forall 1 \leq i < j \leq 3$. Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 6. Có n người xếp hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra k người sao cho không có hai người liên tiếp được chọn.

Lời giải: Ta đánh số n người bằng các số thứ tự $1, 2, \dots, n$. Một cách chọn thích hợp chính là một bộ số $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$ thỏa mãn điều kiện $a_{i+1} - a_i > 1$ (tức là ≥ 2). Vậy ta cần tìm số phần tử của

$$A = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n, a_{i+1} - a_i \geq 2 \text{ với } i=1, 2, \dots, k-1\}$$

Xét ánh xạ $f(a_1, a_2, \dots, a_k) = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ với $b_i = a_i - i + 1$ thì rõ ràng ta có

- 1) $b_1 = a_1 \geq 1$;
- 2) $b_{i+1} - b_i = (a_{i+1} - (i+1) + 1) - (a_i - i + 1) = a_{i+1} - a_i - 1 > 0$
- 3) $b_k = a_k - k + 1 \leq n - k + 1$.

Suy ra $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ là phần tử của tập hợp B :

$$B = \{(b_1, b_2, \dots, b_k) \mid 1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_k \leq n - k + 1\}$$

Dễ thấy f là một đơn ánh.

Ngoài ra, ánh xạ $g(b_1, b_2, \dots, b_k) = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ với $a_i = b_i + i - 1$ cho chúng ta một đơn ánh từ B vào A . Vậy $|A| = |B| = C_{n-k+1}^k$.

Ví dụ 7. (Putnam 2002). Cho $n > 1$ là một số nguyên dương và T_n là số các tập con khác rỗng của tập $\{1, 2, \dots, n\}$ sao cho trung bình cộng tất cả các phần tử của nó là một số nguyên. Chứng minh rằng $T_n - n$ là một số chẵn.

Hướng dẫn. Có n tập con 1 phần tử và các tập này đều thoả mãn điều kiện trong đầu bài.

Vậy ta chỉ cần chứng minh số các tập con nhiều hơn một phần tử có tính chất đó là một số chẵn là xong. Ta hãy ghép các tập con này thành từng cặp như sau: Các tập có trung bình thuộc nó đi với một tập có trung bình không thuộc nó.

Ví dụ 8. Có 20 người xếp thành một vòng tròn. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người sao cho không có hai người kề nhau được chọn.

Lời giải. Ta giải các bài toán tổng quát sau

Ví dụ 8.1. Có n người xếp thành một hàng dọc. Có bao nhiêu cách chọn ra k người, sao cho không có hai người kề nhau được chọn?

Cách 1. (Phương pháp song ánh) Đặt $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Gọi $u_1 < u_2 < \dots < u_k$ là số thứ tự của những người được chọn thì ta có $u_{i+1} - u_i \geq 2$ với mọi $i=1, \dots, k-1$. Đặt $A = \{(u_1, u_2, \dots, u_k) \in E_n^k \mid u_{i+1} - u_i \geq 2 \text{ với mọi } i=1, \dots, k-1\}$. Xét ánh xạ $f: A \rightarrow B$, trong đó

$B = \{(v_1, v_2, \dots, v_k) \in E_{n-k+1}^k \mid v_1 < v_2 < \dots < v_k\}$ xác định như sau

$$f(u_1, u_2, \dots, u_k) = (v_1, v_2, \dots, v_k)$$

với $v_i = u_i - (i-1)$. Ta kiểm tra $(v_1, v_2, \dots, v_k) \in B$:

$$1) \text{ Rõ ràng } v_{i+1} - v_i = (u_{i+1} - i) - (u_i - (i-1)) = u_{i+1} - u_i - 1 \geq 1$$

$$2) v_1 = u_1 \geq 1, v_k = u_k - (k-1) \leq n - k + 1.$$

Ta kiểm tra f là một song ánh. Nếu $(u_1, u_2, \dots, u_k) \neq (u'_1, u'_2, \dots, u'_k)$ thì rõ ràng ảnh của chúng khác nhau. Suy ra f là một đơn ánh. Ngược lại, với $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ thuộc B , ta chọn $u_i = v_i + i - 1$ thì $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ thuộc A và $f(u_1, \dots, u_k) = (v_1, v_2, \dots, v_k)$. Suy ra f là toàn ánh.

Vậy $|A| = |B|$. Mà $|B|$ thì rõ ràng là bằng số các tập con k phần tử của E_{n-k+1} , do đó bằng C_{n-k+1}^k .

Cách 2. (Sử dụng bài toán chia kẹo của Euler). Giả sử ta chọn được k người. Gọi x_1 là số người tính từng người đầu tiên đến trước người thứ nhất được chọn, x_2 là số người nằm giữa người thứ nhất và người thứ hai, ..., x_k là số người nằm giữa người thứ $k-1$ và người thứ k và x_{k+1} là số người nằm sau người thứ k đến cuối. Khi đó ta có

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = n - k \quad (1)$$

và x_1, x_{k+1} là các số nguyên không âm, còn $x_2, \dots, x_k$ là các số nguyên ≥ 1 .

Ngược lại, nếu $(x_1, \dots, x_{k+1})$ là một nghiệm của (1) với $x_1, x_{k+1} \geq 0, x_2, \dots, x_k \geq 1$ thì ta cho tương ứng với cách chọn người thứ $1+x_1, 2+x_1+x_2, \dots, k+x_1+\dots+x_k$ thì rõ ràng do $(i + x_1 + \dots + x_i) - (i-1 + x_1 + \dots + x_{i-1}) = 1 + x_i \geq 2$ nên không có 2 người liên tiếp được chọn.

Để hoàn tất lời giải bài toán, ta đặt $y_1 = x_1, y_{k+1} = x_{k+1}$ và $y_i = x_i - 1$ với $i=2, \dots, k$ thì được

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{k+1} = n - 2k + 1 \quad (2)$$

với y_i là các số nguyên không âm.

Theo kết quả của định lý chia kẹo của Euler, ta có số nghiệm của (2) bằng C_{n-k+1}^k . Đó cũng chính là kết quả của bài toán ban đầu của chúng ta.

Ví dụ 8.2. Có n người xếp thành một vòng tròn. Có bao nhiêu cách chọn ra k người, sao cho không có hai người kề nhau được chọn?

Bài toán này có thể giải bằng kết quả của bài toán trên và phương pháp « cắt đường tròn ». Giả sử n người đó được đánh số $1, 2, \dots, n$. Ta xét các trường hợp sau :

1) Người số 1 được chọn. Khi đó người số 2 và số n không được chọn. Như vậy ta phải chọn thêm $k-1$ người từ 3 đến $n-1$ sao cho không có hai người kề nhau được chọn. Vì $n-1$ không kề 3 nên có thể coi đây là $n-3$ người xếp theo một hàng dọc. Theo kết quả của bài toán trên, số cách chọn bằng $C_{n-3-(k-1)+1}^{k-1} = C_{n-k-1}^{k-1}$.

2) Người số 1 không được chọn. Khi đó ta cần chọn k người từ số 2 đến n sao cho không có 2 người kề nhau được chọn. Vì 2 và n không kề nhau nên có thể coi đây là $n-1$ người xếp theo một hàng dọc. Theo kết quả của bài toán trên, số cách chọn bằng C_{n-k}^k .

Vậy đáp số của bài toán là

$$C_{n-k-1}^{k-1} + C_{n-k}^k = \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!} + \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} = \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (k+n-k) = \frac{n}{k} C_{n-k-1}^{k-1}$$

Ví dụ 9. Cho $k, n \in \mathbb{N}^*$ và $1 < k \leq n$. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn ra k số đôi một khác nhau từ n số nguyên dương đầu tiên sao cho trong mỗi bộ k số được chọn ra, không có hai số nào là hai số nguyên liên tiếp.

Lời giải. Gọi m là số cần tìm. Ta có $m = |A|$, với A là tập gồm tất cả các bộ không có thứ tự $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ thỏa mãn $a_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ với $i = 1, 2, \dots, k$ và $|a_i - a_j| \notin \{0, 1\}$ với mọi $i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Không mất tính tổng quát, với mỗi $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A$, ta có thể giả sử

$$a_1 < a_2 < \dots < a_k.$$

Xét tương ứng

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A \rightarrow (a_1, a_2 - 1, \dots, a_k - k + 1).$$

Dễ thấy, tương ứng nói trên xác lập một song ánh từ A đến B , với B là tập gồm tất cả các bộ $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ không có thứ tự thỏa mãn

$$b_i \in \{1, 2, \dots, n - k + 1\}, \forall i = 1, 2, \dots, k \text{ và } b_i \neq b_j, \forall i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Từ đây suy ra $|A| = |B| = C_{n-k+1}^k$.

Ví dụ 10. (VMO 2012)

Cho một nhóm gồm 5 cô gái, kí hiệu là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 và 12 chàng trai. Có 17 chiếc ghế được xếp thành một hàng ngang. Người ta xếp nhóm người đã cho ngồi vào các chiếc ghế đó sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

- 1/ Mỗi ghế có đúng một người ngồi;
- 2/ Thứ tự ngồi của các cô gái, xét từ trái qua phải, là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 ;
- 3/ Giữa G_1 và G_2 có ít nhất 3 chàng trai;
- 4/ Giữa G_4 và G_5 có ít nhất 1 chàng trai và nhiều nhất 4 chàng trai.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp như vậy? (Hai cách xếp được coi là khác nhau nếu tồn tại một chiếc ghế mà người ngồi ở chiếc ghế đó trong hai cách xếp là khác nhau).

Lời giải.

Cách 1. Trước hết ta chứng minh bổ đề.

Bổ đề. (Bài toán chia kẹo của Euler) Cho k, n là các số nguyên dương. Số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ là C_{n+k-1}^{k-1} .

Chứng minh: (Xem định lý).

Trở lại bài toán.

Đánh số thứ tự các ghế từ trái sang phải là $1, 2, \dots, 17$.

Gọi x_1 là số chàng trai được xếp bên trái G_1 , x_2 là số chàng trai ở giữa G_1 và G_2 , x_3 là số chàng trai ở giữa G_2 và G_3 , x_4 là số chàng trai ở giữa G_3 và G_4 , x_5 là số chàng trai ở giữa G_4 và G_5 , x_6 là số chàng trai được xếp ở bên phải G_5 . Khi đó bộ số $(x_1, x_2, \dots, x_6)$ hoàn toàn xác định vị trí các cô gái và ta có

$$1) x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$$

$$2) 3 \leq x_2$$

$$3) 1 \leq x_5 \leq 4$$

Đổi biến $y_2 = x_2 - 3$ và $y_5 = x_5 - 1$ ta được $x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 8$

Với các ẩn không âm và có thêm điều kiện $y_5 \leq 3$.

Tiếp theo, sử dụng bài toán chia kẹo của Euler ở dạng

$$x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 8 - y_5$$

ta được số cách phân ghế cho các cô gái là

$$C_{12}^4 + C_{11}^4 + C_{10}^4 + C_9^4 = 1161.$$

Vì còn có 12 chàng trai có thể hoán đổi vị trí ở 12 chiếc ghế dành cho họ nên số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán là $12! \cdot 1161$.

Cách 2. Cũng đánh số thứ tự các ghế từ trái sang phải là $1, 2, \dots, 17$. Gọi

g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 là vị trí chỗ ngồi của các cô gái G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 tương ứng.

Khi đó ta có $1 \leq g_1 < g_2 < g_3 < g_4 < g_5 \leq 17$. Ngoài ra ta còn có

$$3 < g_2 - g_1 \text{ và } 1 < g_5 - g_4 < 6.$$

Đặt

$$A = \{(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) \mid 1 \leq g_1 < g_2 < g_3 < g_4 < g_5 \leq 17, 3 < g_2 - g_1, 1 < g_5 - g_4 < 6\}$$

thì ta cần tìm $|A|$.

Đặt

$$B = \{(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) \mid 1 \leq g_1 < g_2 < g_3 < g_4 < g_5 \leq 17, 3 < g_2 - g_1, 1 < g_5 - g_4\}$$

$$C = \{(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) \mid 1 \leq g_1 < g_2 < g_3 < g_4 < g_5 \leq 17, 3 < g_2 - g_1, 6 \leq g_5 - g_4\}$$

thì rõ ràng ta có $A = B \setminus C$ (với $C \subset B$), suy ra $|A| = |B| - |C|$.

Để tính $|B|$, ta đặt $D = \{(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) \mid 1 \leq h_1 < h_2 < h_3 < h_4 < h_5 \leq 13\}$ và xét ánh xạ

$$f: B \rightarrow D, f(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) \mapsto (g_1, g_2 - 3, g_3 - 3, g_4 - 3, g_5 - 4)$$

thì dễ dàng kiểm chứng được f là một song ánh.

Nhưng $|D|$ bằng số cách chọn 5 phần tử ra từ 13 phần tử nên ta có $|D| = C_{13}^5$. Vậy $|B| = |D| = C_{13}^5$.

Một cách hoàn toàn tương tự, ta tính được $|C| = C_9^5$. Vậy số cách xếp chỗ cho 15 cô gái bằng $C_{13}^5 - C_9^5 = 1161$.

Vì còn có 12 chàng trai có thể hoán đổi vị trí ở 12 chiếc ghế dành cho họ nên số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán là $12! \cdot 1161$.

Bình luận.

- Bài toán chia kẹo Euler là một ứng dụng trực tiếp của phương pháp song ánh hết sức quan trọng để giải các bài toán tổ hợp.
- Đây là một bài tổ hợp cơ bản. Các vấn đề này đã được trình bày khá kỹ trong các tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi.

- Ngoài các phương pháp trình bày ở trên, còn có thể trình bày theo lối hàm sinh, đa thức. Chẳng hạn số cách xếp 5 cô gái thỏa mãn yêu cầu đề bài chính là hệ số của x^8 trong khai triển $(1+x+x^2+\dots)^5(1+x+x^2+x^3)$.
- Một sai lầm phổ biến có thể gặp là quên nhân $12!$.
- Trong lời giải, nên chứng minh chặt chẽ f (trong lời giải 2) là ánh xạ, sau đó chứng minh nó là song ánh.
- Nếu không chứng minh lại định lý bài toán chia kẹo của Euler thì ít nhất cũng cần phát biểu rõ ràng định lý này.
- Bài tập tương tự: Có bao nhiêu cách chọn ra k người từ n người xếp thành một hàng dọc sao cho không có hai người liên tiếp được chọn?

Ví dụ 11. Cho $n, k, m \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện $m > 1$ và $1 < k \leq n$. Hỏi có tất cả bao nhiêu chỉnh hợp chập k $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ của n số nguyên dương đầu tiên mà mỗi chỉnh hợp $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ đều thỏa mãn ít nhất một trong hai điều kiện:

- Tồn tại hai số $i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\}$ sao cho $i < j$ và $a_i > a_j$
- Tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ sao cho $a_i - i$ không chia hết cho m

Lời giải. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau

Bổ đề 3: Cho các số nguyên dương k và n . Nếu A là tập gồm các số nguyên dương a không vượt quá n và thỏa mãn $n : k$ thì $|A| = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$.

Chứng minh: Dễ thấy $A = \{k, 2k, \dots, mk\}$, với m là số thỏa mãn điều kiện $mk \leq n < (m+1)k$. (1)

Từ đó suy ra $A \sim \{1, 2, \dots, m\}$. Vì thế $|A| = m = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ (do (1)).

Trở lại bài toán,

Gọi A là tập gồm tất cả các chỉnh hợp chập k của n số nguyên dương đầu tiên. Gọi A^* là tập gồm tất cả các chỉnh hợp thỏa mãn yêu cầu bài toán, và gọi B là tập gồm tất cả các chỉnh hợp không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Hiển nhiên ta có

$$A^* = A \setminus B \quad (1)$$

Xét tập B . Ta có

$$B = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A \mid a_1 < a_2 < \dots < a_k; a_i - i \leq m, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}\}.$$

Xét tương ứng

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) \in B \mapsto (a_1 + (m-1), a_2 + 2(m-1), \dots, a_k + k(m-1)).$$

Ta chứng minh được tương ứng trên là một song ánh từ B đến B_1 , trong đó B_1 là tập gồm tất cả các bộ không có thứ tự $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ thỏa mãn $b_i \in \{1, 2, \dots, n + k(m-1)\}$ và $b_i \leq m, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Từ đó suy ra $|B| = |B_1|$. Mặt khác, theo bổ đề ta có $|B_1| = C_{\lfloor \frac{n-k}{m} \rfloor + k}^k$. Vì vậy, từ (1) ta được $|A^*| = n(n-1)\dots(n-k+1) - C_{\lfloor \frac{n-k}{m} \rfloor + k}^k$.

Chú ý: Trong bài toán trên, khi cho $m=2$ ta sẽ có bài 3 của đề thi quốc gia chọn học sinh giỏi toán THPT năm 1996 (bảng A).

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $n, k, m \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện $m > 1$ và $1 < k \leq n$. Hỏi có tất cả bao nhiêu chỉnh hợp chập k $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ của n số nguyên dương đầu tiên mà mỗi chỉnh hợp $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ đều thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- i) Tồn tại hai số $i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\}$ sao cho $i < j$ và $a_i > a_j$
- ii) Tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ sao cho $a_i - i$ không chia hết cho m

Bài 2. Cho các số $n, k \in \mathbb{N}^*$ và $1 < k < n, n > 3$. Cho đa giác lồi $A_1, A_2, \dots, A_n$. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu k đỉnh của đa giác đó sao cho trong mỗi cách tô không có hai đỉnh kề nhau nào cùng được tô màu.

Hướng dẫn:

Gọi T là tập gồm tất cả các cách tô màu thỏa mãn yêu cầu đề bài. Gọi T_1 là tập gồm tất cả các cách tô màu thuộc T mà trong mỗi cách tô, ta đều thấy đỉnh A_1 không được tô màu. Đặt $T_2 = T \setminus T_1$. Hiển nhiên $T = T_1 \cup T_2$ và $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Từ đó, theo bài toán trên, ta chứng minh được $|T| = \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k$.

Bài 3. Cho m, n là các số nguyên lớn hơn 1. Cho S là một tập hợp có n phần tử, $A_1, A_2, \dots, A_m$ là những tập con của S . Giả thiết rằng bất kì hai phần tử x và y trong S bao giờ cũng có một tập hợp A_i sao cho x ở trong A_i và y không ở trong A_i hoặc x không ở trong A_i và y ở trong A_i . Chứng minh rằng $n \leq 2^m$.

Hướng dẫn: Xét đơn ánh $f: S \rightarrow T = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) | x_i \in \{0, 1\}\}$ trong đó $f(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ thỏa mãn $x_i = 1$ nếu x ở trong A_i và $x_i = 0$ nếu x không ở trong A_i .

Bài 4. Có một nhóm người mà trong đó, mỗi cặp không quen nhau có đúng hai người quen chung, mỗi cặp quen nhau thì không có người quen chung. Chứng minh rằng số người quen của mỗi người là như nhau.

Hướng dẫn: Giả sử a, b là hai người tùy ý.

- Nếu a quen b thì a, b không có người quen chung. Gọi A, B là tập các người quen của a, b tương ứng. Ta chỉ ra một tương ứng 1-1 giữa A, B như sau: Với mỗi người tùy ý $a' \in A$ thì a' không quen b nên a' và b có đúng hai người quen chung. Một trong hai người đó là a người còn lại là c , một người quen của b (hay $c \in B$).
- Nếu a không quen b thì họ có người quen chung là c . Khi đó $|A| = |B| = |C|$ (đpcm)

Bài 5. Gọi C_n là số hoán vị f của tập $S = \{1, 2, \dots, n\}$ thỏa mãn $f(i) \geq i - 1, i = 1, 2, \dots, n$. Gọi E_n là số hoán vị f của S sao cho $f(i) \leq i + 1, i = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh rằng $E_n = C_n$.

Hướng dẫn: Thiết lập song ánh $f \mapsto g: g(i) = n + 1 - f(n - i + 1)$.

Bài 6. Gọi M là số nguyên dương trong hệ thập phân có $2n$ chữ số, trong đó có n chữ số 1 và n chữ số 2. Gọi N là số nguyên dương trong hệ thập phân có n chữ số, trong đó chỉ có n các chữ số 1, 2, 3, 4 và số chữ số 1 bằng số chữ số 2. Chứng minh $M = N$.

Hướng dẫn: Thiết lập tương ứng như sau $f: \overline{a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_n} \mapsto \overline{c_1 c_2 \dots c_n}$. Trong đó, $\overline{a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_n} \in M$ và $c_i = a_i + b_i$ theo qui tắc

$$1 + 1 = 1$$

$$1 + 2 = 3$$

$$2 + 1 = 4$$

$$2 + 2 = 2$$

Khi đó, f là một ánh xạ từ M vào N . Thật vậy, đặt

$$X = \{i \mid (a_i, b_i) = (2, 1), 1 \leq i \leq n\}, |X| = x$$

$$Y = \{i \mid (a_i, b_i) = (1, 2), 1 \leq i \leq n\}, |Y| = y$$

$$Z = \{i \mid (a_i, b_i) = (1, 1), 1 \leq i \leq n\}, |Z| = z$$

$$T = \{i \mid (a_i, b_i) = (2, 2), 1 \leq i \leq n\}, |T| = t$$

thì số số 1 trong $\overline{a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_n}$ là $x + y = 2z$, còn số số 2 là $x + y = 2t$. Suy ra $z = t$. Vậy $\overline{c_1 c_2 \dots c_n}$ chứa số số 1 và số số 2 bằng nhau hay $\overline{c_1 c_2 \dots c_n} \in N$. Hơn nữa, $f: \overline{a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_n} \mapsto \overline{c_1 c_2 \dots c_n}$ là một song ánh ví phép toán quy ước xác định tương ứng 1-1 giữa (a, b) và c . Vậy $|M| = |N|$.

Bài 7. Cho n nguyên dương và r nguyên dương thỏa mãn $r < n - r + 1$. Giả sử $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Có bao nhiêu tập con của X có r phần tử mà không có hai số tự nhiên liên tiếp nào.

Hướng dẫn: Gọi A là tập các tập con của X , có r phần tử và không chứa hai số tự nhiên liên tiếp và B là tập các tập con có r phần tử của tập hợp

$Y = \{1, 2, \dots, n - r + 1\}$. Thiết lập song ánh

$$f : S = \{x_1, x_2, \dots, x_r\} \mapsto T = \{x_1, x_2 - 1, x_3 - 2, \dots, x_r - r + 1\}.$$

Trong đó $S \subset X, x_1 + 1 < x_2, x_2 + 1 < x_3, \dots, x_{r-1} + 1 < x_r$ (vì S không chứa hai số nguyên liên tiếp).

Dễ thấy $Y \in B$ và tương ứng trên là một song ánh. (Tập T là tập có r phần tử và có thể có hai số tự nhiên liên tiếp). Vậy $|A| = |B| = C_{n-r+1}^r$

Bài 8. Cho tập S gồm tất cả các số nguyên dương c trong đoạn $[1, n]$. Gọi T là tập hợp tất cả các tập con khác rỗng của S . Với mỗi X thuộc T , gọi $m(X)$ là

trung bình cộng các phần tử của X . Tính $m = \frac{\sum_{X \in T} m(X)}{|T|}$

Hướng dẫn: Ta thiết lập một ánh xạ

$$f : T \rightarrow T$$

$$X \mapsto f(X) = \{n + 1 - x, x \in X\}$$

Khi đó, f là song ánh nên $m(X) = m(f(X))$, do đó $2m = \frac{\sum_{X \in T} (m(X) + m(f(X)))}{|T|}$

mà $m(X) + m(f(X)) = n + 1$. Vậy $m = \frac{n + 1}{2}$.

Bài 9. Tính trung bình cộng các số tự nhiên N gồm 2013 chữ số thoả mãn N chia hết cho 999 và các chữ số của N nằm trong tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Hướng dẫn: Gọi X là tập các số tự nhiên thoả mãn đề bài. Ta thiết lập một song ánh

$$f : X \rightarrow X$$

$$x = \overline{a_1 a_2 \dots a_n} \mapsto f(x) = \overline{(9 - a_1)(9 - a_2) \dots (9 - a_n)}$$

Rõ ràng $x + f(x) = 99 \dots 9$ nên trung bình cộng các phần tử của X là $\frac{99 \dots 9}{2}$.

KẾT LUẬN

Bài toán tổ hợp là bài toán có nội dung thực tế, lý luận hấp dẫn và lý thú, những điều nghe như là đơn giản nhưng giải được nó là một quá trình tư duy sâu sắc, ứng dụng ánh xạ sẽ làm rõ hơn cách giải toán rời rạc cho học sinh giỏi toán ở trường Trung học phổ thông, chuyên Toán.

Do thời gian và năng lực bản thân còn hạn chế nên bài viết không thể tránh khỏi những sai sót. Rất mong sự nhận xét, góp ý của các thầy cô, đồng nghiệp và tất cả học sinh để bài viết có thể hoàn thiện hơn và trở thành tài liệu tham khảo tốt cho học sinh yêu toán.

Xin chân thành cảm ơn.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Khắc Minh, *Tài liệu bồi dưỡng giáo viên*, Hà Nội 1996
2. Hebert S. Wilf, *Generating Functionology*, A.K. Peters Ltd, 2005
3. M. Hall, *Combinatorial Theory*, New York: Wiley, 1986
4. Cohen, D., *Basic Techniques of Combinatorial Theory*, New York: Wiley, 1978
5. Stanley R.P, *Enumerative Combinatorics*, New York, Cambridge University Press, 1999.
6. Tài liệu Internet, đặc biệt là các website: www.mathlinks.ro, www.diendantoanhoc.net, www.mccme.ru.