

HÌNH HỌC HOÁ BẤT ĐẲNG THỨC QUA BA BIẾN p, R, r

Đặt a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Còn p, R, r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của $\triangle ABC$.

1/ Một số đẳng thức liên hệ giữa 3 cạnh tam giác và p, R, r .

- $ab + bc + ca = p^2 + 4Rr + r^2$
- $2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 + 16Rr + 4r^2$
- $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 8Rr - 2r^2$
- $2Rr - r^2 - \frac{p^2}{9} = -\frac{1}{18p}(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$
- $4Rr - r^2 - \frac{p^2}{4} = -\frac{1}{32p}(b+c-3a)(c+a-3b)(a+b-3c)$

2/ Một số bổ đề quan trọng sử dụng nhiều trong chứng minh BĐT.

- ❖ **Bổ đề 1:** Cho tam giác ABC, D là một điểm bất kì thuộc BC. Khi đó: $nc^2 + mb^2 = (d^2 + mn)a$ trong đó $AD = d, BD = m, DC = n$.

Chứng minh:

Ta có: $m^2 + d^2 - c^2 = 2md\cos\angle ADB$ (1), $n^2 + d^2 - b^2 = 2nd\cos\angle ADC$ (2).

Nhân cả hai vế của (1) với n và cả 2 vế của (2) với m ta được:

$$n(m^2 + d^2 - c^2) = 2mnd\cos\angle ADB \quad (3), \quad m(n^2 + d^2 - b^2) = 2mnd\cos\angle ADC \quad (4)$$

Cộng vế theo vế của (3) và (4), ta được đpcm.

- ❖ **Bổ đề 2:** Nếu tam giác ABC có: Hai góc $\geq 60^\circ$ thì $p \geq \sqrt{3}(R+r)$, hai góc $\leq 60^\circ$ thì $p \leq \sqrt{3}(R+r)$, một góc bằng 60° thì $p = \sqrt{3}(R+r)$.

Chứng minh: Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{p - \sqrt{3}(R+r)}{2R} &= \frac{a+b+c}{4R} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{r}{R}\right) = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos A + \cos B + \cos C) \\ &= \sin\left(A - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(B - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(C - \frac{\pi}{3}\right) \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $x = A - \frac{\pi}{3}$; $y = B - \frac{\pi}{3}$; $z = C - \frac{\pi}{3}$, ta có $x + y + z = 0$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x \geq y \geq z$ thì

$$\begin{aligned} (1) &= \sin x + \sin y + \sin z = \sin x + \sin y - \sin(x+y) = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2} \\ &= 2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\right) = 4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} \end{aligned}$$

Do $x + y + z = 0$ và $x \geq y \geq z$ và $x \geq 0, x < \pi, x + y < \pi$ suy ra $4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} \geq 0$.

- Nếu $y \geq 0 \Leftrightarrow B \geq \frac{\pi}{3}$ thì $\sin\frac{y}{2} \geq 0$, do đó $\frac{p - \sqrt{3}(R+r)}{2R} = 4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} \geq 0$

tức là $p \geq \sqrt{3}(R+r)$ khi $\triangle ABC$ có 2 góc $\geq \frac{\pi}{3}$.

- Nếu $y \leq 0$ thì $\sin\frac{y}{2} \leq 0$, do đó: $\frac{p - \sqrt{3}(R+r)}{2R} = 4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} \leq 0$.

tức là $p \leq \sqrt{3}(R+r)$ khi $\triangle ABC$ có 2 góc $\leq \frac{\pi}{3}$.

- Nếu $y=0$ thì $p=\sqrt{3}(R+r)$ do $\sin \frac{y}{2}=0$.

❖ **Bổ đề 3:** ta luôn có BĐT sau : $p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$.

Chứng minh: Giả sử a, b, c thỏa mãn $a \geq b \geq c \geq 0$ là 3 nghiệm của phương trình:

$$f(x) = x^3 - 2px^2 + (p^2 + 4Rr + r^2)x - 4pRr = 0$$

Điều kiện để a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác là:

$$\begin{cases} b+c > a \\ c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p > a \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow p > a \geq b \geq c > 0 \quad (1).$$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm thỏa (1).

Ta có : $f'(x) = 3x^2 - 4px + p^2 + 4Rr + r^2$ có $\Delta' = (2p)^2 - 3(p^2 + 4Rr + r^2) = p^2 - 12Rr - 3r^2$.

$f(x)=0$ có 3 nghiệm $\Rightarrow \Delta' \geq 0$.

Hai nghiệm của $f'(x)=0$ là: $x_1 = \frac{2p - \sqrt{\Delta'}}{3}$; $x_2 = \frac{2p + \sqrt{\Delta'}}{3}$.

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) < 0 \\ f(x_1) \geq 0 \\ f(x_2) \leq 0 \\ f(p) > 0 \end{cases} \text{ Ta nhận thấy ngay } f(0) < 0 \text{ và } f(p) > 0.$$

$$\text{Còn } \begin{cases} f(x_1) \geq 0 \\ f(x_2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \sqrt{\Delta'} \geq p(p^2 - 18Rr + 9r^2) \\ \Delta' \sqrt{\Delta'} \geq -p(p^2 - 18Rr + 9r^2) \end{cases} \Leftrightarrow \Delta' \sqrt{\Delta'} \geq |p(p^2 - 18Rr + 9r^2)|$$

$$\Leftrightarrow (\Delta')^3 \geq p^2(p^2 - 18Rr + 9r^2)^2 \Leftrightarrow p^4 - 2p^2(2R^2 + 10Rr - r^2) + r(4R+r)^3 \leq 0 \quad (2)$$

$$\Delta'_1 = (2R^2 + 10Rr - r^2)^2 - r(4R+r)^3 = 4R(R-2r)^3 \geq 0$$

$$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \leq p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

❖ **Bổ đề 4:** $p^2 \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2$ trong mọi tam giác nhọn. Từ đó ta cũng suy ra được:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(R+r)^2 \text{ và } ab + bc + ca \geq 2R^2 + 12Rr + 4r^2.$$

Việc chứng minh khá là đơn giản nên dành cho các bạn tự chứng minh.

❖ **Bổ đề 5:** $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 4r^2$.

Chứng minh: Ta có : $R(R-2r) \leq R(R-2r) + r^2 = (R-r)^2$. Do đó:

$$p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)(R-r) \Leftrightarrow p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R^2 - 3Rr + 2r^2)$$

$$\Leftrightarrow p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2 \Leftrightarrow 2p^2 \leq 8R^2 + 8Rr + 6r^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 8Rr + 2r^2 \leq 8R^2 + 8Rr + 6r^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 4r^2 \quad (dpcm)$$

❖ **Bổ đề 6:** Trong tam giác ta luôn có: $p^2 \geq 16Rr - 5r^2 + \frac{r^2(R-2r)}{R} \quad (*)$

Chứng minh: Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp, O là tâm đường tròn ngoại tiếp, G là trọng tâm tam giác ABC .

theo công thức Euler ta có : $OI = \sqrt{R(R-2r)}$, và ta cũng tính được rằng :

$$OG = \frac{1}{3} \sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}.$$

$$\text{Ta luôn có: } IG \geq OI - OG \Leftrightarrow IG \geq \sqrt{R(R-2r)} - \frac{1}{3} \sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$\Leftrightarrow 3.IG \geq 3\sqrt{R(R-2r)} - \sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)} \Leftrightarrow 3.IG \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 18Rr}{3\sqrt{R(R-2r)} + \sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}} \quad (1)$$

$$\text{Do } 9.IG^2 = p^2 - 16Rr + 5r^2 \text{ nên } p^2 \geq 16Rr - 5r^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 8Rr - 2r^2 \geq 24Rr - 12r^2 \quad (2)$$

Từ (1), (2)

$$\Rightarrow 3.IG \geq \frac{6Rr - 12r^2}{3\sqrt{R(R-2r)} + \sqrt{9R^2 - 24Rr + 12r^2}} = \frac{6Rr - 12r^2}{6\sqrt{R(R-2r)}} = r \sqrt{\frac{R-2r}{R}} \Rightarrow 9.IG^2 \geq \frac{r^2(R-2r)}{R^2}.$$

Vậy BĐT (*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

❖ **Bổ đề 7:** Cho tam giác ABC thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $a+b \geq 3c$. CMR: $\frac{r}{R} \leq \frac{4}{9}$.

$$\text{Chứng minh: Ta có: } \frac{r}{R} = \frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{2abc}.$$

Đặt

$$f(c) = \frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{2abc} \Rightarrow f'(c) = \frac{(a+b)c^2 - 2c^3 + (a+b)(a-b)^2}{2abc^2} \geq \frac{(a+b-2c)c^2}{2abc^2} \geq 0.$$

Do đó $f(c)$ đồng biến theo c . Thay $c = \frac{a+b}{3}$ vào $f(c)$ ta được:

$$f(c) \leq f\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{4(2b-a)(2a-b)}{9ab} = \frac{4}{9} - \frac{2(a-b)^2}{9ab} \leq \frac{4}{9}.$$

Vậy $\frac{r}{R} \leq \frac{4}{9}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = \frac{3}{2}c$.

3/ Sử lý số liệu để chuyển một BĐT đại số qua BĐT hình học với p, R, r .

Từ 3 biến $a, b, c > 0$ đã cho trong bất đẳng thức đại số, ta đặt $x = b+c$; $y = a+c$; $z = a+b$, thì x, y, z trở thành độ dài 3 cạnh 3 cạnh của một tam giác. Ta sẽ chuyển một số đại lượng trong đại số về hình học thông qua p, R, r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ. Ta sẽ biểu diễn a, b, c theo p, R, r như sau:

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 + z^2 = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) \quad (1)$$

$$xy + yz + zx = (b+c)(c+a) + (c+a)(a+b) + (a+b)(b+c) = a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\text{a) } 4(a^2 + b^2 + c^2) = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) = (x+y+z)^2 - 2[2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2)]$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2) = 4p^2 - 2(16Rr + 4r^2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 8Rr - 2r^2$$

$$\text{b) } 4(ab + bc + ca) = 16Rr + 4r^2 \Leftrightarrow ab + bc + ca = 4Rr + r^2$$

$$\text{c) } \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} = \frac{p^2 - 8Rr - 2r^2}{4Rr + r^2} = \frac{p^2}{4Rr + r^2} - 2$$

$$\text{d) } \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)}{8xyz} = \frac{(p-x)(p-y)(p-z)}{xyz} = \frac{pr^2}{4Rrp} = \frac{r}{4R}.$$

$$\text{e) } \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 3 = \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc} - 3$$

$$= \frac{p(4Rr+r^2)}{(p-x)(p-y)(p-z)} - 3 = \frac{p(4Rr+r^2)}{pr^2} - 3 = \frac{4Rr+r}{r} - 3 = \frac{2(2R-r)}{r}.$$

$$f) a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)[(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)] + 3abc = p(p^2-12Rr)$$

$$g) a^4+b^4+c^4 = (a^2+b^2+c^2)^2 - 2(ab+bc+ca)^2 + 4abc(a+b+c) = p^4 - 16Rrp^2 + 2(4Rr+r^2)^2$$

$$h) \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} = \frac{p}{\sqrt[3]{pr^2}} = \sqrt[3]{\frac{p^2}{r^2}}.$$

$$i) \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = (a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) - 3 = \frac{p^2-8Rr+r^2}{4Rr}.$$

$$j) \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{p}{pr^2} = \frac{1}{r^2}$$

$$k) \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2} = \frac{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)}{a^2b^2c^2} = \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p^2r^2}$$

$$l) \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{p^2+4Rr+r^2}{4Rrp}.$$

$$m) \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} = \frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{abc} = \frac{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)}{abc} = \frac{(4R+r)^2 - 2p^2}{p}.$$

$$n) a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 = (ab+bc+ca)^3 - 3abc(a+b)(b+c)(c+a) = r^3(4R+r)^3 - 12p^2r^3R.$$

$$o) \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} = \frac{p^4-8(2R+r)rp^2+5r^2(4R+r)^2}{4r^2(4R^2+6Rr+r^2)p^2-2p^4r^2-2r^3(4R+r)^3}.$$

$$p) (a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2) = r^2[r(4R+r)^3+3p^2r^2+p^4-24Rrp^2].$$

$$q) \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{(xy+yz+zx)^2 - 2xyz(x+y+z)}{x^2y^2z^2} = \frac{(p^2+4Rr+r^2)^2}{16R^2r^2p^2} - \frac{1}{Rr}.$$

4/ Bài tập ứng dụng.

★ **Bài 1: (Iran 1996).** Cho $a, b, c > 0$, CMR : $\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{9}{4(ab+bc+ca)}.$

Giải: Áp dụng công thức b và q trong phần 3, ta cần chứng minh :

$$\frac{(p^2+4Rr+r^2)^2}{16R^2r^2p^2} - \frac{1}{Rr} \geq \frac{9}{4(4Rr+r^2)} \Leftrightarrow \frac{(p^2+4Rr+r^2)^2}{16R^2rp^2} - \frac{1}{R} \geq \frac{9}{4(4R+r)}.$$

Xét $f(p) = \frac{(p^2+4Rr+r^2)^2}{16R^2rp^2}$. Ta sẽ chứng minh $f(p)$ đồng biến.

$$\text{Thật vậy, ta có : } f(p) = \frac{p^2 + \frac{(4Rr+r^2)^2}{p^2} + 2(4Rr+r^2)}{16R^2r} \geq \frac{\frac{8}{9}p^2 + \frac{2(4Rr+r^2)}{3} + 2(4Rr+r^2)}{16R^2r}.$$

Đến đây ta nhận thấy ngay $f(p)$ đồng biến.

Mà $p^2 - 16Rr + 5r^2 = 9.IG^2 \geq 0 \Rightarrow p^2 \geq 16Rr - 5r^2$. Do đó :

$$f(p) \geq \frac{(16Rr-5r^2+4Rr+r^2)^2}{16R^2r(16Rr-5r^2)} = \frac{(20Rr-4r^2)^2}{16R^2r^2(16R-5r)} = \frac{(5R-r)^2}{R^2(16R-5r)} = \frac{25R^2-10Rr+r^2}{16R^3-5R^2r}.$$

Công việc còn lại ta chỉ cần chứng minh :

$$\frac{25R^2 - 10Rr + r^2}{16R^3 - 5R^2r} - \frac{1}{R} \geq \frac{9}{4(4R+r)} \Leftrightarrow \frac{9R^2 - 5Rr + r^2}{16R^3 - 5R^2r} \geq \frac{9}{4(4R+r)}$$

$$\Leftrightarrow 4(4R+r)(9R^2 - 5Rr + r^2) \geq 9(16R^3 - 5R^2r)$$

$$\Leftrightarrow 4(36R^3 + 9R^2r - 20R^2r - 5Rr^2 + 4Rr^2 + r^3) \geq 9(16R^3 - 5R^2r)$$

$$\Leftrightarrow r(R - 2r)^2 \geq 0$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} r=0 \\ R=2r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b, c=0 \text{ (và các hoán vị)} \\ a=b=c \end{cases}.$$

★**Bài 2:** Cho $a, b, c > 0$. CMR: $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right)$.

Giải: Áp dụng công thức e và i ở phần 3, ta cần chứng minh: $\frac{2(2R-r)}{r} \geq 4 \cdot \frac{p^2 - 8Rr + r^2}{4Rr}$.

$$\Leftrightarrow 2R(2R-r) \geq p^2 - 8Rr + r^2 \Leftrightarrow 4R^2 + 6Rr - r^2 \geq p^2. \text{ Áp dụng bổ đề 3, ta cần chứng minh:}$$

$$2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \leq 4R^2 + 6Rr - r^2 \Leftrightarrow 2R(R-2r) \geq 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

Dễ thấy BĐT trên luôn đúng, suy ra đpcm.

★**Bài 3:** Chứng minh rằng $\forall a, b, c$ không âm ta có BĐT : $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$

Giải: Nếu trong 3 số a, b, c có 2 số bằng 0 thì ta có ngay đpcm.

Nếu trong 3 số có 2 số khác 0 thì áp dụng công thức a và b, ta cần chứng minh:

$$p^2 - 8Rr - 2r^2 + 2pr^2 + 1 \geq 2(4Rr + r^2) \Leftrightarrow p^2 + 2pr^2 + 1 \geq 16Rr + 4r^2$$

Ta có: $2pr^2 + 1 = pr^2 + pr^2 + 1 \geq 3\sqrt{p^2 r^4} \geq 3\sqrt{27r^2 \cdot r^4} = 9r^2$ (1), $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

★**Bài 4:** Cho $a, b, c > 0$. CMR: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{3abc}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq 4$.

Giải: Đặt $\frac{a}{b} = x, \frac{b}{c} = y, \frac{c}{a} = z \Rightarrow xyz = 1$ ($x, y, z > 0$). Bài toán trở thành:

Cho $xyz=1$, CMR : $x + y + z + \frac{3}{xy + yz + zx} \geq 4$. Chuyển bài toán về p, R, r ta được :

Cho $pr^2=1$. CMR : $p + \frac{3}{4Rr + r^2} \geq 4$.

Ta có: $p^2 \geq 16Rr - 5r^2 \geq 3(4Rr + r^2) \geq 27r^2 \Rightarrow p^3 \geq 27pr^2 = 27 \Rightarrow p \geq 3$.

$$p + \frac{3}{4Rr + r^2} \geq p + \frac{9}{p^2} = 3 \cdot \frac{p}{3} + \frac{9}{p^2} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{p}{3}} \geq 4. \text{ Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow a = b = c.$$

★**Bài 5:** Cho $a, b, c > 0$; $a + b + c + 1 = 4abc$. CMR: $a + b + c \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Giải: Chuyển về p, R, r ta được bài toán tương đương sau:

Cho $p+1=4pr^2$. CMR: $p^2r^2 \geq 4Rr + r^2$.

Ta có: $p^2 \geq 27r^2 \Rightarrow \frac{4p^3}{27} \geq p+1 \Rightarrow p \geq 3$.

Ta cần chứng minh: $p(p+1) \geq 4(4Rr + r^2)$.

Mặt khác: $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ (1)

Do $p \geq 3$ nên $4p^2 \geq 9 \cdot 4pr^2 \Rightarrow p \geq 9r^2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $p(p+1) \geq 4(4Rr+r^2)$, tức là bài toán đã được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

5/ Một số bài toán dành cho bạn đọc tự luyện:

☆**Bài 1:** Cho a, b, c thực dương. CMR: $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \geq (1+a)(1+b)(1+c)$.

☆**Bài 2:** (USA 1979). Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. CMR:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geq \frac{1}{4}.$$

☆**Bài 3:** (Italy 1993) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $0 \leq x, y, z \leq 1$. CMR:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq x^2y + y^2z + z^2x + 1.$$

☆**Bài 4:** (Vietnam 1991) Cho các số thực $x \geq y \geq z \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} \geq x^2 + y^2 + z^2.$$

☆**Bài 5:** (Bears 1996) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x+y+z = \sqrt{xyz}$.

CMR: $xy + yz + xz \geq 9(x+y+z)$.

☆**Bài 6:** (Albania 2002). Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

☆**Bài 7:** (Iran 2005). Cho các số thực $a, b, c > 0$. CMR:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

☆**Bài 8:** (Romania 2005). Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c=3$. CMR:

$$a^2b^2c^2 \geq (3-2a)(3-2b)(3-2c).$$

Name : Mai Xuân Việt

Address : Đội II – thôn Dương Quang – Xã Đức Thắng – Huyện Mộ Đức – Tỉnh Quảng Ngãi .

Email : xuanviet15@gmail.com

Tel : 01678336358 – 0938680277 – 0947572201