BỔ ĐỀ ERIQ VÀ ỨNG DỤNG

TRẦN MINH NGỌC -THPT LÊ HỒNG PHONG

I. Phát biểu và chứng minh

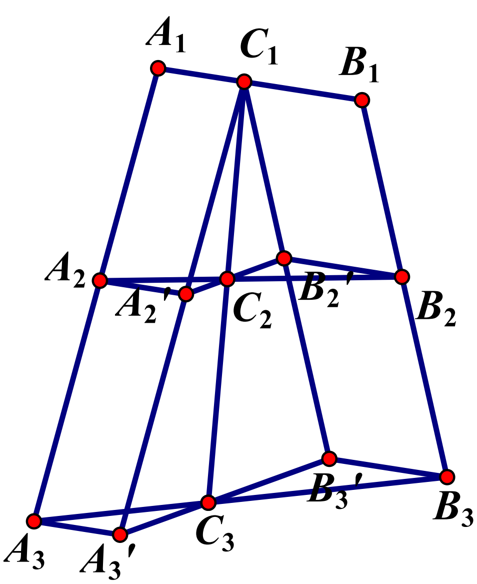
Phát biểu:

Cho hai bộ ba điểm thẳng hàng (A_1, A_2, A_3) và (B_1, B_2, B_3) thỏa $\dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}} = \dfrac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_1B_3}} = k$

Lần lượt lấy $C_1 \in A_1B_1, C_2 \in A_2B_2, C_3 \in A_3B_3$ thỏa $\dfrac{\overline{C_1A_1}}{\overline{C_1B_1}} = \dfrac{\overline{C_2A_2}}{\overline{C_2B_2}} = \dfrac{\overline{C_3A_3}}{\overline{C_3B_3}}$.

Khi đó: C_1, C_2, C_3 thẳng hàng và $\dfrac{\overline{C_1C_2}}{\overline{C_1C_3}} = k$

Chứng minh:



T($\overrightarrow{A_1C_1}$): A_1 -> C_1, A_2 -> A_2', A_3 -> A_3'

Do A_1, A_2, A_3 thẳng hàng và $\dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}} = k$

Nên C_1, A_2', A_3' thẳng hàng và $\dfrac{\overline{C_1A_2'}}{\overline{C_1A_3'}} = k$

T($\overrightarrow{B_1C_1}$): B_1 -> C_1, B_2 -> B_2', B_3 -> B_3'

Tương tự ta có C_1, B_2', B_3' thẳng hàng và $\dfrac{\overline{B_1A_2'}}{\overline{B_1A_3'}} = k$

Ta có $\frac{\overline{C_1A_1}}{\overline{C_1B_1}} = \frac{\overline{A_2'A_2}}{\overline{B_2'B_2}} = \frac{\overline{C_2A_2}}{\overline{C_2B_2}}$

=> A_2', B_2', C_2 thẳng hàng

Tương tự ta có: A_3', B_3', C_3 thẳng hàng

$H(C_1;k)$: $A_3' \to A_2'$, $B_3' \to B_2'$

=> $A_3'B_3' \to A_2'B_2'$

=> $C_3 \to C_2$

=> C_1, C_2, C_3 thẳng hàng và $\frac{\overline{C_1C_2}}{\overline{C_1C_3}} = k$

Nhận xét

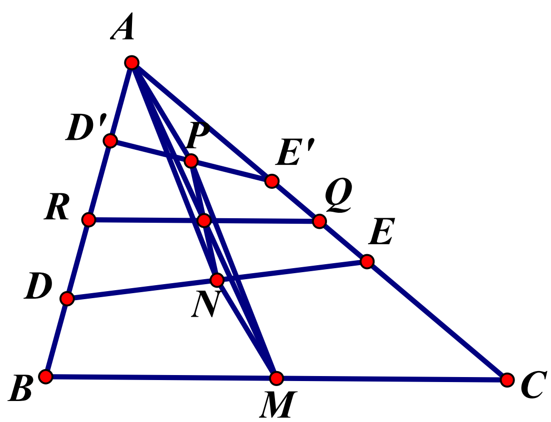
Khi $A_1 \equiv B_1 \equiv I$ thì $\frac{\overline{IA_2}}{\overline{IA_3}} = \frac{\overline{IB_2}}{\overline{IB_3}} = k$ => $A_2A_3 // B_2B_3$.

Ta phát biểu lại trường hợp đặc biệt:

> Cho tam giác ABC. B_1, C_1 trên AB, AC sao cho $B_1C_1 // BC$. A_1, A_2 lần lượt thuộc B_1C_1, BC thỏa $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1C_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_2C_2}}$. Khi đó A, A_1, A_2 thẳng hàng

II. Áp dụng

> AD1: Cho tam giác ABC. Trên canh AB lấy D, D' sao cho BD = AD'. Trên AC lấy E, F sao cho CE = AE'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, DE, D'E'. Cmr: ANMP là hình bình hành



Gọi Q, R là trung điểm AC, AB

Ta có: RD = RD'; QE = QE'

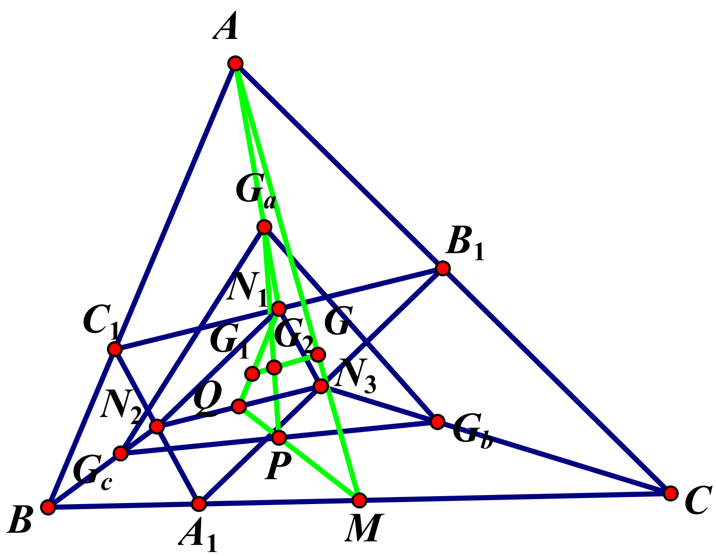
Xét 2 bộ điểm thẳng hàng (R, D, D'), (Q, E, E'): thỏa $\frac{RD}{RD'} = \frac{QE}{QE'} = 1$

Theo bổ đề ERIQ: PN đi qua trung điểm RQ và bị điểm này chia đôi

Mặt khác AM cũng bị trung điểm RQ chia đôi

=> ANMP là hình bình hành

AD2: Cho tam giác ABC. A_1, B_1, C_1 là các điểm trên BC, CA, AB. Gọi G_a, G_b, G_c là trọng tâm ▲AB_1C_1, ▲BC_1A_1, CA_1B_1. Cmr Trọng tâm của ▲ABC, ▲$A_1B_1C_1$, ▲$G_aG_bG_c$ thẳng hàng



Ta chứng minh bài toán qua các bước sau:
Bước 1: Gọi N_1, N_2, N_3 lần lượt là trung điểm B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. M, P, Q lần lượt là trung điểm BC, G_bG_c, N_1N_2. Chứng minh M, P, Q thẳng hàng

Xét 2 bộ điểm thẳng hàng (B,G_c, N_2,) và (C,G_b, N_3, C) thỏa $\frac{BG_c}{BN_2} = \frac{CG_b}{CN_3} = \frac{2}{3}$

Theo bổ đề ERIQ: P, Q, M thẳng hàng và $\frac{MP}{MQ} = \frac{2}{3}$

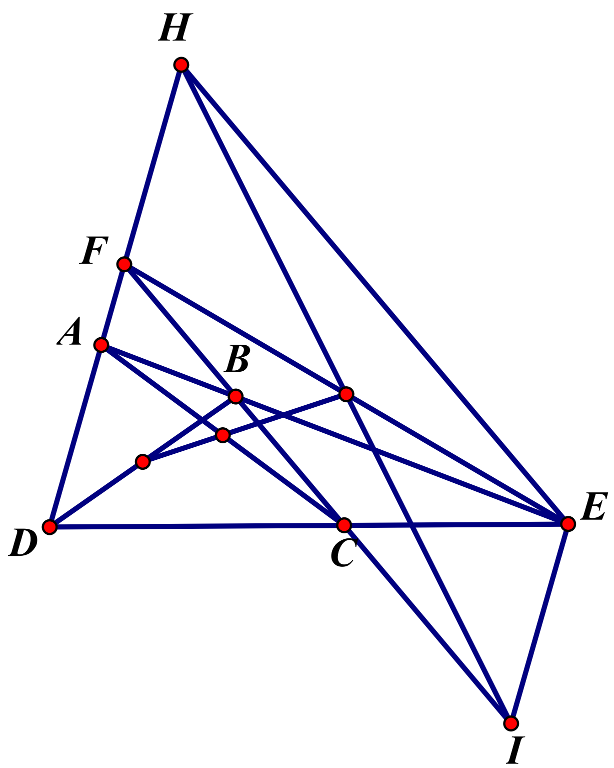
Bước 2: Gọi G, G_1, G_2 là trọng tâm của ▲ABC, ▲$A_1B_1C_1$, ▲$G_aG_bG_c$. Chứng minh G, G_1, G_2 thẳng hàng
Dễ thấy G_1 cũng là trọng tâm $N_1N_2N_3$

Xét 2 bộ điểm thẳng hàng (A, G_a, N_1) và (M, P, Q) thỏa $\frac{AG_a}{AN_1} = \frac{MP}{MQ} = \frac{2}{3}$

Các điểm G, G_2, G_1 thỏa $\frac{GA}{GM} = \frac{G_2G_a}{G_2P} = \frac{G_1N_1}{G_1Q} = 2$

Theo bổ đề ERIQ: G, G_2, G_1 thẳng hàng

AD3 (Định lý Gauss): Cho tứ giác ABCD. AB ∩ CD = {E}, AD ∩ BC = {F}. Cmr: Trung điểm AC, BD, EF thẳng hàng



Lần lượt lấy H, I nằm trên DA, BC sao cho EIFH là hình bình hành
Khi đó trung điểm EF cũng là trung điểm HI

Sử dụng định lý Menelaus và định lý Thales, ta được

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}}.\frac{\overline{AF}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BF}}.\frac{\overline{ED}}{\overline{EC}}.\frac{\overline{AF}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CI}}.\frac{\overline{IF}}{\overline{BF}}.\frac{\overline{AF}}{\overline{AH}} (1)$$

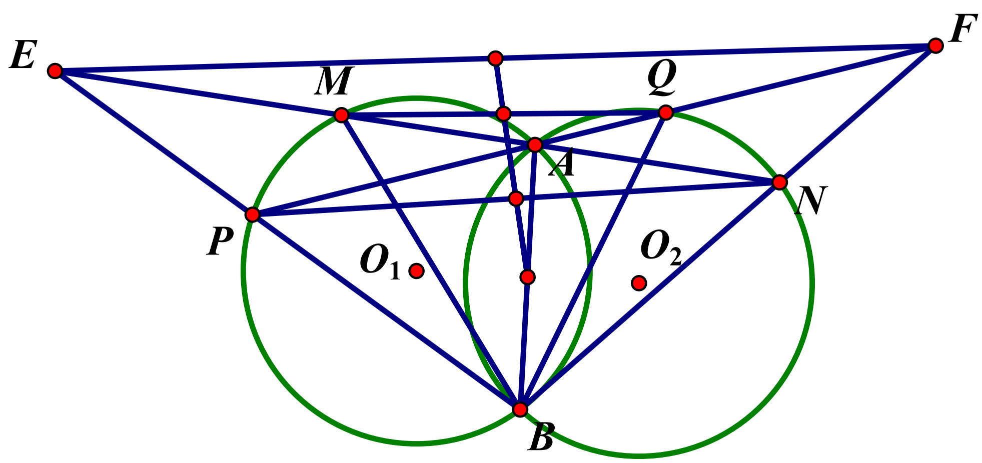
$$\frac{\overline{BF}}{\overline{BI}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{EI}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{HF}} \Rightarrow \frac{\overline{AF}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{IF}} (2)$$

Từ (1) ; (2) => $\frac{\overline{AD}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CI}}$

Xét 2 bộ điểm thẳng hàng (A, D, F) và (C, B, I) thỏa $\frac{\overline{AD}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CI}}$

Theo bổ đề ERIQ: Trung điểm AC, BD, HI thẳng hàng
=> Trung điểm AC, BD, EF thẳng hàng

AD4: Cho (O_1), (O_2) bằng nhau và cắt nhau tại A và B. Hai đường thẳng d và d' qua A lần lượt cắt đường tròn (O) và (O') tại M, N, P, Q. Cmr: trung điểm AB, MQ, NP thẳng hàng

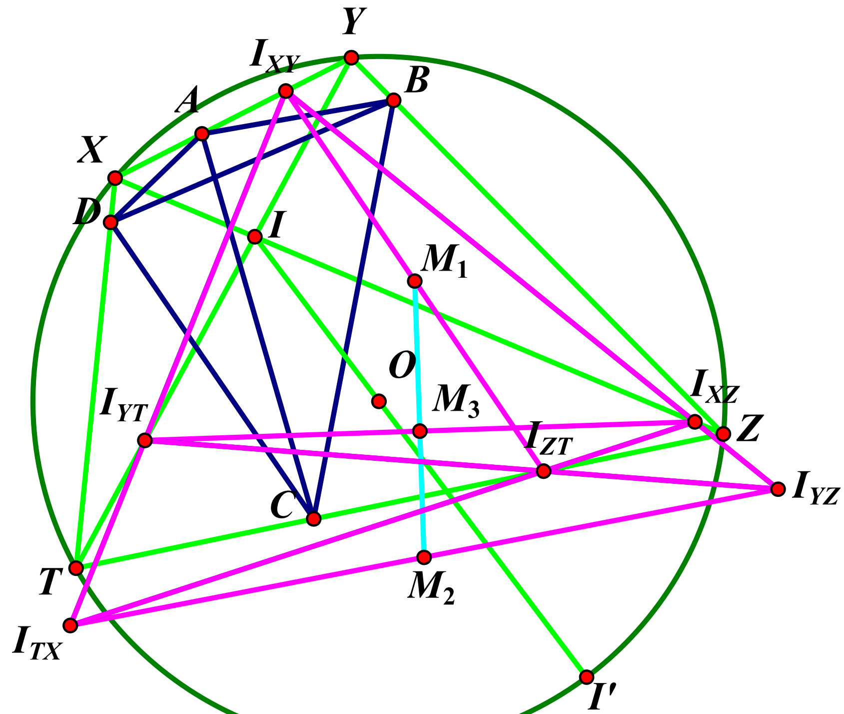


Xét tứ giác ANBP có AN ∩ BP = {E}, AP ∩ BN = {F}
Theo định lý Gauss: trung điểm AB, NP, EF thẳng hàng (1)
Từ (O) và (O') bằng nhau không khó thấy ▲BEN ~ ▲BFQ và ▲BEM ~ ▲BFQ
=> $\frac{EM}{EN} = \frac{EM}{EB} . \frac{EB}{EN} = \frac{FQ}{FB} . \frac{FB}{FP} = \frac{FQ}{FP}$
Xét 2 bộ điểm thẳng hàng (E, M, N) và (F, Q, P) thỏa $\frac{EM}{EN} = \frac{FQ}{FP}$
Theo bổ đề ERIQ: trung điểm EF, MQ, NP thẳng hàng (2)
Từ (1) , (2) => trung điểm AB, MQ, NP thẳng

AD5: (Định lý Newton): Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (I). Cmr: đoạn thẳng nối trung điểm AC, BD đi qua I

Ta sẽ chứng minh bài toán qua các bước sau:
Bước 1: Các đường thẳng vuông góc với OA, OB, OC, OD tại A, B, C, D đôi một cắt nhau tại X,Y,Z,T. Chứng minh tứ giác XYZT nội tiếp và XZ, YT cắt nhau tại O (Đây là một tính chất quen thuộc của tứ giác ngoại tiếp)

Bước 2: Dựng tâm O của (XYZT). OI cắt (XYZT) tại một điểm I'. Gọi I_a là hình chiếu của I' lên a. Gọi M_1, M_2, M_3 là trung điểm của $I_{XY}I_{ZT}$, $I_{XT}I_{YZ}$, $I_{XZ}I_{YT}$. Khi đó M_1, M_2, M_3 thẳng hàng

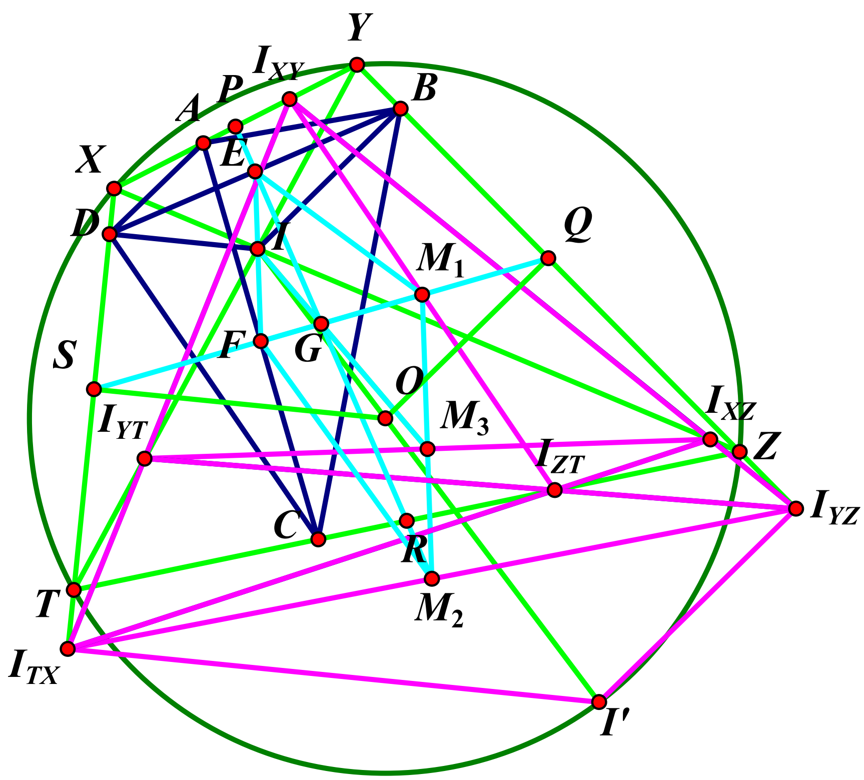


Theo định lý Simson: (I_{XY}, I_{YZ}, I_{XZ}), (I_{YZ}, I_{ZT}, I_{YT}), (I_{ZT}, I_{TX}, I_{ZX}), (I_{TX}, I_{XY}, I_{TY}) là các bộ điểm thẳng hàng

Xét tứ giác $I_{XY}I_{XZ}I_{ZT}I_{YT}$ có $I_{XY}I_{XZ} \cap I_{ZT}I_{YT} = \{I_{YZ}\}$, $I_{XY}I_{YT} \cap I_{XZ}I_{ZT} = \{I_{TX}\}$

Theo định lý Gauss: M_1, M_2, M_3 thẳng hàng

Bước 3: Gọi G là trọng tâm của tứ giác XYZT. Chứng minh EG, FG, IG lần lượt đi qua M_1, M_2, M_3



Gọi P, Q, R, S, T, U lần lượt là trung điểm của XY, YZ, ZT, TX, XZ, YT

=> PQ, RS cắt nhau tại G là trung điểm mỗi đường (1)

Áp dụng định lý Thales, ta được

$$\frac{SD}{SI_{TX}} = \frac{OI}{OI'} = \frac{QB}{QI_{YZ}}$$

Xét 2 bộ điểm thẳng hàng (S, D, I_{TX}) và (Q, B, I_{YZ}) thỏa $\frac{SD}{SI_{TX}} = \frac{QB}{QI_{YZ}}$

Theo bổ đề ERIQ: E, G, M_2 thẳng hàng (2)

Tương tự ta có F, G, M_1 thẳng hàng và I, G, M_3 thẳng hàng

Cũng theo bổ đề ERIQ: $\frac{GE}{GM_2} = \frac{GF}{GM_1} = \frac{GI}{GM_3} = \frac{OI}{OI'}$

=> H(G; $\frac{OI}{OI'}$): M_2 -> E, M_1 -> F, M_3 -> I

Mà M_1, M_2 M_3 thẳng hàng

Nên E, I, F thẳng hàng

Nhận xét 1

$$\frac{DX}{DT} = \frac{ID.\cot\widehat{DXI}}{ID.\cot\widehat{DTI}} = \frac{\cot\widehat{DXI}}{\cot\widehat{DTI}} = \frac{\cot\widehat{DAI}}{\cot\widehat{DCI}}$$

Tương tự ta có: $\frac{BY}{BZ} = \frac{\cot\widehat{BAI}}{\cot\widehat{BCI}}$

Mặc khác $\widehat{DAI} = \widehat{BAI}, \widehat{DCI} = \widehat{BCI}$

Nên $\frac{DX}{DT} = \frac{BY}{BZ}$

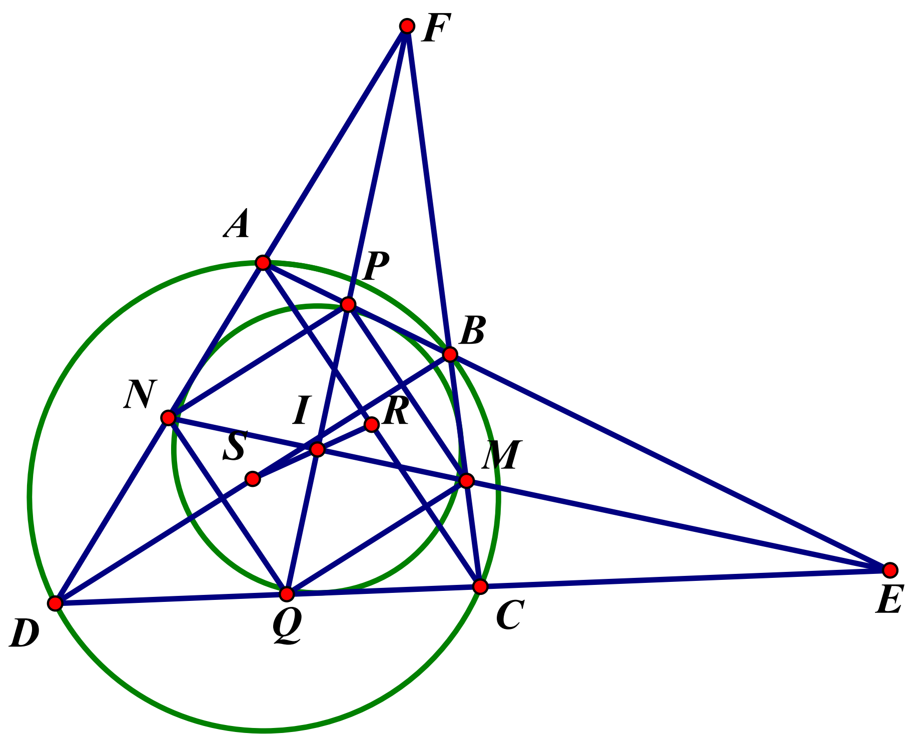
Xét 2 bộ điểm thẳng hàng (D, X, T) và (B, Y, Z) thỏa $\frac{DX}{DT} = \frac{BY}{BZ}$

Theo định lý ERIQ thì P, E, R thẳng hàng (3)
Từ (1), (2), (3) => P, E, G, R, M_2 thẳng hàng.
Tương tự ta có S, F, G, Q, M_1 thẳng hàng

Nhận xét 2:
Trong quá trình chứng minh bước 2, bước 3 ta phát hiện kết quả khá đẹp không kém đường thẳng newton sau:

Cho tứ giác ABCD, Với mỗi điểm P trong mặt phẳng, dựng
$PX \perp AB, PY \perp BC, PZ \perp CD, PT \perp DA, PU \perp AC, PV \perp BD$
Khi đó trung điểm XZ, YT, UV thẳng hàng

AD6: Cho tứ giác ABCD vừa nội tiếp (O) vừa ngoại tiếp (I). AB ∩ CD = {E}, BC ∩ DA = {F}, IE ∩ BC, DA = {M, N}, IF ∩ AB, CD = {P, Q}. Cmr MPNQ là hình bình hành



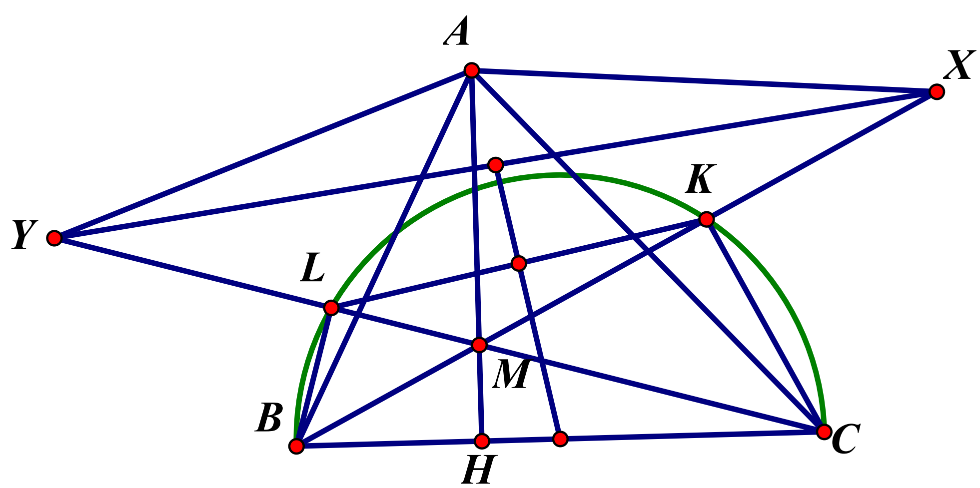
Gọi R, S lần lượt là trung điểm AC, BD
Theo định lý Newton: R, S, I thẳng hàng
Gọi I' là trung điểm PQ

Do IF là tia phân giác $\widehat{AFB}, \widehat{CFD}$ và ▲AFB ~ ▲CFD => $\frac{PA}{PB} = \frac{FA}{FB} = \frac{FC}{FD} = \frac{QC}{QD}$

Xét 2 bộ điểm thẳng hàng (A, P, B) và (C, P, D) thỏa $\frac{PA}{PB} = \frac{QC}{QD}$

Theo bổ đề ERIQ: R, S, I' thẳng hàng
Vậy I ≡ I'
=> I là trung điểm PQ
Tương tự ta có: I là trung điểm MN
=> MPNQ là hình bình hành

AD7: Cho tam giác ABC. M là một điểm trên đường cao kẻ từ A. BM ∩ (BC) = {K}, CM ∩ (BC) = {L}. BM ∩ (AMC) = {X}, CM ∩ (AMB) = {Y}. Cmr điểm chia đoạn BC, KL, XY theo cùng một tỉ số thì thẳng hàng. (BC) là đường tròn đường kính BC



Do $\widehat{CAX} = \widehat{CMX} = \widehat{BMY} = \widehat{BAY}$ nên $\widehat{BAX} = \widehat{CAY}$
Áp dụng định lý hàm sin, Ta được

$$\begin{cases} \dfrac{BK}{CL} = \dfrac{BK}{BC}.\dfrac{BC}{CL} = \dfrac{\sin\widehat{BCK}}{\sin\widehat{CBL}} = \dfrac{\sin\widehat{AMB}}{\sin\widehat{AMC}} \\ \dfrac{BX}{CY} = \dfrac{BX}{BA}.\dfrac{BA}{CA}.\dfrac{CA}{CY} = \dfrac{\sin\widehat{BAX}}{\sin\widehat{CAY}}.\dfrac{\sin\widehat{CYA}}{\sin\widehat{BXA}}.\dfrac{BA}{CA} = \dfrac{\sin\widehat{ABM}}{\sin\widehat{ACM}}.\dfrac{BA}{CA} \end{cases}$$

$$=> \frac{BK}{CL} : \frac{BX}{CY} = \frac{\sin\widehat{AMB}}{\sin\widehat{ABM}}.\frac{\sin\widehat{ACM}}{\sin\widehat{AMC}}.\frac{CA}{BA} = \frac{BA}{CA}.\frac{CA}{BA} = 1$$

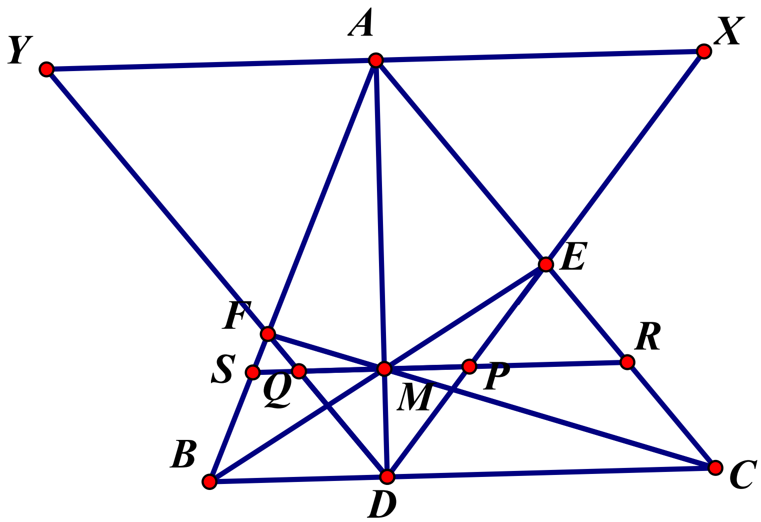
$$=> \quad \frac{BK}{CL} = \frac{BX}{CY}$$

Xét 2 bộ điểm thẳng hàng (B, K, X) và (C, L, Y) thỏa $\frac{BK}{BX} = \frac{CL}{CY}$

Theo bổ đề ERIQ: Các điểm chia BC, KL, XY theo cùng tỉ số thì thẳng hàng

AD8: Cho tam giác ABC. M là một điểm trên đường cao AD. (D thuộc BC). BM ∩ AC = {E}, CM ∩ AB = {F}. DE ∩ (AB) = {K}, DF ∩ (AC) = {L}. Cmr: đoạn nối trung điểm EF, KL đi qua A

Ta chứng minh bài toán qua các bước sau:
Bước 1: Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt DE, DF tại X, Y. Chứng minh A là trung điểm XY



Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt DE, DF, AC, AB tại P, Q, R, S

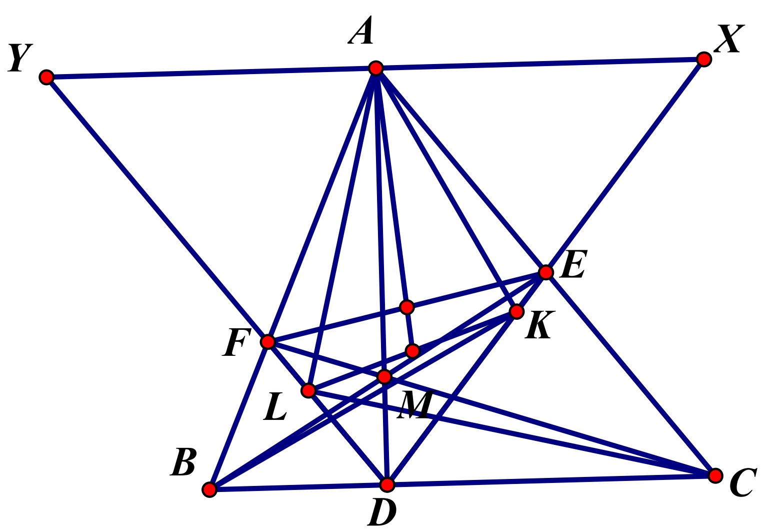
Ta có: $\frac{MQ}{MP} = \frac{MQ}{DC}.\frac{DC}{DB}.\frac{DB}{MP} = \frac{FM}{FC}.\frac{MR}{MS}.\frac{EB}{EM} = \frac{MS}{BC}.\frac{MR}{MS}.\frac{BC}{MR} = 1$

=> M là trung điểm PQ

=> A là trung điểm XY

Hơn nữa DA là đường phân giác $\widehat{EDF}$

Bước 2: Chứng minh: Đoạn nối Trung điểm LK, EF đi qua A



Do $\widehat{LAC}=\widehat{FDB}=\frac{\pi}{2}-\widehat{FDA}=\frac{\pi}{2}-\widehat{EDA}=\widehat{EDC}=\widehat{KAB}$ nên $\widehat{BAL}=\widehat{CAK}$ và

▲LAC~▲KAB

Áp dụng định lý hàm sin và định lý Thales, ta được:

$$\begin{cases}\frac{EK}{EX}=\frac{EK}{ED}.\frac{ED}{EX}=\frac{AK}{AD}.\frac{\sin\widehat{EAK}}{\sin\widehat{EAD}}.\frac{AX}{CD}=\frac{AK}{AC}.\frac{AX\sin EAK}{AD}\\ \frac{FL}{FY}=\frac{AL}{AB}.\frac{AY\sin FAL}{AD}\end{cases}$$

$$=>\frac{EK}{EX}:\frac{FL}{FY}=\frac{AK}{AC}.\frac{AB}{AL}.\frac{AX\sin\widehat{EAK}}{AY\sin\widehat{FAL}}=1$$

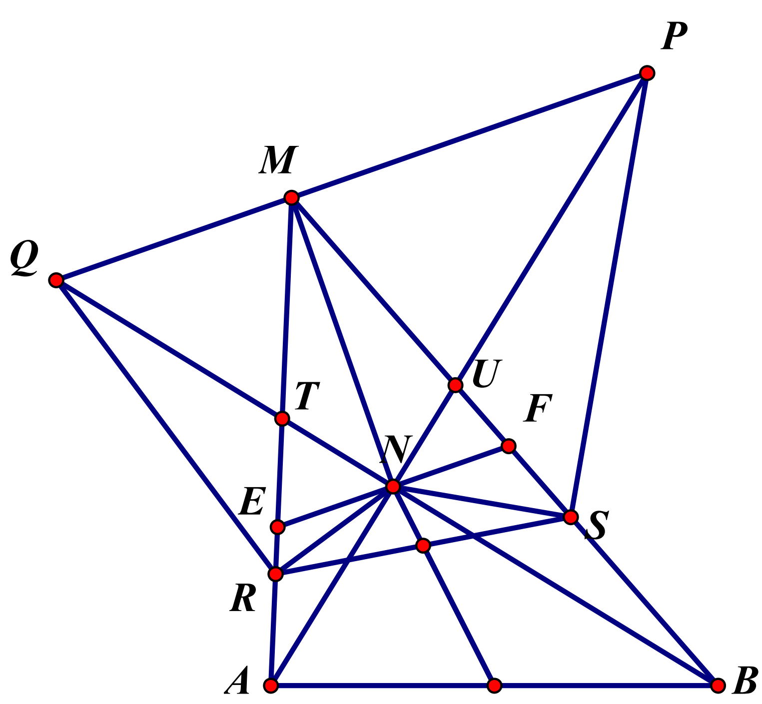
$$=>\frac{EK}{EX}=\frac{FL}{FY}.$$

Xét 2 bộ điểm thẳng hàng (E, K, X) và (F, L, Y) thỏa $\frac{EK}{EX}=\frac{FL}{FY}$. Theo bổ đề ERIQ:

Đoạn nối Trung điểm LK, EF đi qua A

AD9 (Viet Nam TST 2009): Cho AB cố định. Với mỗi điểm M không nằm trên AB, tia phân giác trong $\widehat{AMB}$ cắt (AB) tại N, tia phân giác ngoài $\widehat{AMB}$ cắt NA, NB tại P. Q. (NQ) ∩ MA = {M, R}, (NP) ∩ MB = {M, S}. Cmr đường trung tuyến ứng với đỉnh N của ▲NRS luôn đi qua điểm cố định khi M thay đổi.

Lời giải 1 (Tác giả)



Đường thẳng vuông góc MN tại N cắt MA, MB tại E, F

=> N là trung điểm EF

Ta chứng minh bài toán qua các bước sau:

Bước 1: NQ ∩ MF = {T}, NP ∩ MB = {U}. Chứng minh: ▲TNE ~ ▲TRN, ▲SNF~▲SUN, ▲RQN ~ ▲SPN

Do $\widehat{TNE} = \widehat{NQM} = \widehat{NRT}$

=> ▲TNE ~ ▲TRN

Tương tự, ta có: ▲SNF ~ ▲SUN

Ngoài ra: $\widehat{NRQ} = \widehat{NSP} = \frac{\pi}{2}$ và $\widehat{NQR} = \widehat{NMR} = \widehat{NMS} = \widehat{NPS}$

=> ▲RQN ~ ▲SPN

Bước 2: Chứng minh đường trung tuyến ứng với đỉnh N của ▲NRS qua trung điểm AB

Áp dụng định lý hàm sin, ta được: $\begin{cases} \frac{AR}{AE} = \frac{NR.\sin\widehat{ANR}}{NE.\sin\widehat{ANE}} = \frac{TN.\sin\widehat{NMR}}{TR.\sin\widehat{ANE}} \\ \frac{BS}{BF} = \frac{UN.\sin\widehat{UMR}}{US.\sin BNF} \end{cases}$

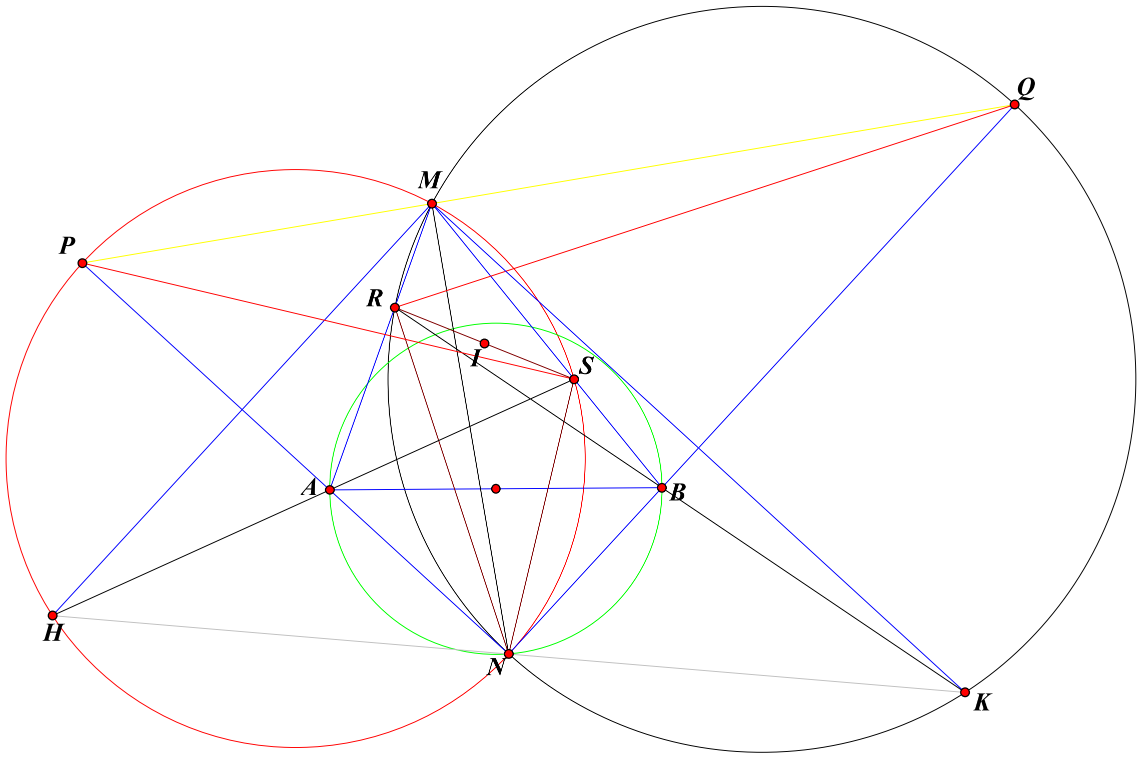
=> $\frac{AR}{AE} : \frac{BS}{BF} = \frac{TN}{TR}.\frac{US}{UN}.\frac{\sin\widehat{BNF}}{\sin\widehat{ANE}} = \frac{QR}{PS}.\frac{\cos\widehat{MNQ}}{\cos\widehat{MNP}} = \frac{QN}{PN}.\frac{PN}{QN} = 1$

=> $\frac{AR}{AE} = \frac{BS}{BF}$.

Xét 2 bộ điểm thẳng hàng (A, R, E) và (B, S, F) thỏa $\frac{AR}{AE} = \frac{BS}{BF}$

Theo bổ đề ERIQ: Đường trung tuyến ứng với đỉnh N của ▲NRS qua trung điểm AB, là điểm cố định

Lời giải 2 (Bùi Nhựt Minh)



Gọi H, K lần lượt là điểm đối xứng của M qua NP, NQ. Khi đó: $H \in (NP), K \in (NQ)$.

Do NH=NM=NK, và $\widehat{HNM} + \widehat{KNM} = 2\left(\widehat{PNM} + \widehat{QNM}\right) = 2.90° = 180° \Rightarrow \overline{H, N, K}$

Nên N là trung điểm HK ()

Ta sẽ chứng minh bài toán qua các bước sau:

Bước 1: H,A,S thẳng hàng và K,B,R thẳng hàng:

Ta có $\widehat{NHS} = \widehat{NMS} = \widehat{NMA} = \widehat{NHA}$

=> H,A,S thẳng hàng

Tương tự ta cũng có. K,B,R thẳng hàng

Bước 2:

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{\overline{AS}}{\overline{AH}} = -\dfrac{S_{NSP}}{S_{NHP}} \\ \dfrac{\overline{BR}}{\overline{BK}} = -\dfrac{S_{NRQ}}{S_{NKQ}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AS}}{\overline{AH}} : \frac{\overline{BR}}{\overline{BK}} = \frac{S_{NSP}}{S_{NHP}} : \frac{S_{NRQ}}{S_{NKQ}}$$

Lại có:

$$\begin{cases} \widehat{NPS} = \widehat{NMS} = \widehat{NMR} = \widehat{NQR} \Rightarrow \Delta NSP \sim \Delta NRQ(g.g) \Rightarrow \dfrac{S_{NSP}}{S_{NRQ}} = \dfrac{NP^2}{NQ^2} \\ \dfrac{S_{NKQ}}{S_{NHP}} = \dfrac{S_{NMQ}}{S_{NMP}} = \dfrac{NP^2}{NQ^2} \left(\Delta NKQ = \Delta NMQ; \Delta NHP = \Delta NMP; \Delta NMQ \sim \Delta PMN(g.g)\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AS}}{\overline{AH}} : \frac{\overline{BR}}{\overline{BK}} = 1$$

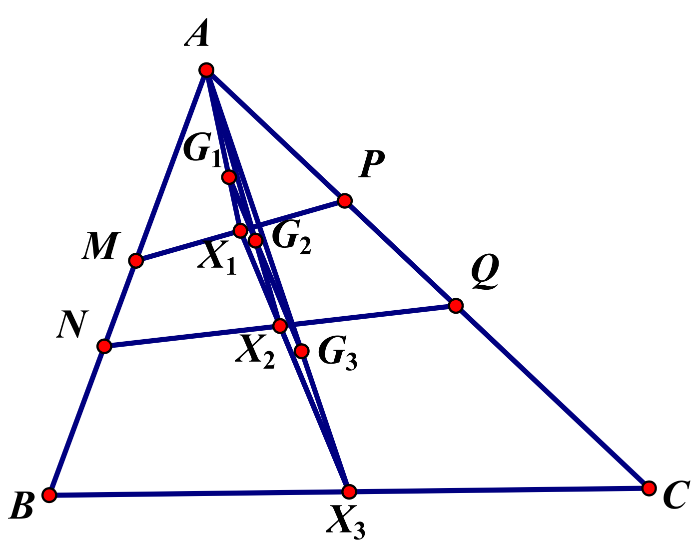
$$\Rightarrow \frac{\overline{AS}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{BR}}{\overline{BK}}$$

Xét 2 bộ điểm thẳng hàng (A, S, H) và (B, R, K) thỏa $\dfrac{\overline{AS}}{\overline{AH}} = \dfrac{\overline{BR}}{\overline{BK}}$

Theo bổ đề ERIQ: Đường trung tuyến ứng với đỉnh N của ▲NRS qua trung điểm AB, là điểm cố định

AD10: Cho tam giác ABC. (M, N), (P,Q) lần lượt là hai điểm trên AB, AC thỏa $\dfrac{\overline{BM}}{\overline{BN}} = \dfrac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} = k$ Cmr: Các trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm và tâm đường tròn Euler của ▲AMP, ▲ANQ, ▲ABC là các bộ điểm thẳng hàng

Ta chứng minh bài toán qua các bước sau:
Bước 1: Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm ▲ AMP, ▲ANQ, ▲ABC. Chứng minh G_1, G_2, G_3 thẳng hàng và $\dfrac{\overline{G_3G_1}}{\overline{G_3G_2}} = k$



Gọi X_1, X_2, X_3 lần lượt là trung điểm PM, NQ, BC

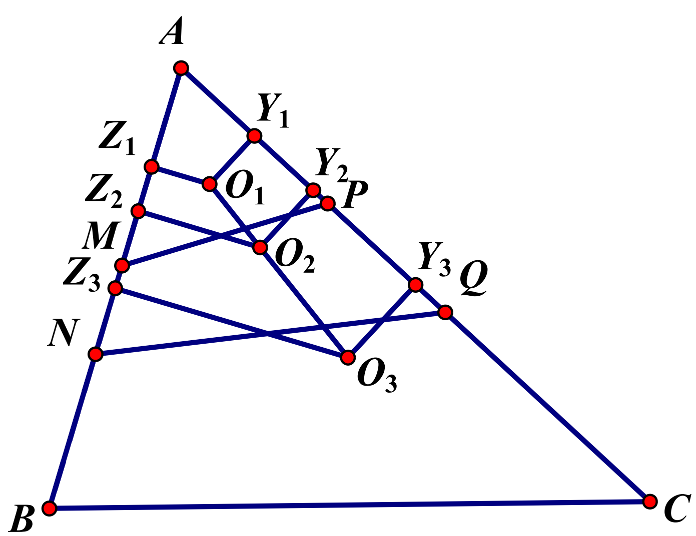
Xét 2 bộ điểm thẳng hàng (B,M,N) và (C,P,Q) thỏa $\frac{\overline{BM}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}}$

Theo bổ đề ERIQ: X_1, X_2, X_3 thẳng hàng và $\frac{\overline{X_3X_1}}{\overline{X_3X_2}} = k$

H(A; $\frac{2}{3}$): X_1 -> G_1, X_2 -> G_2, X_3 -> G_3 => G_1, G_2, G_3 thẳng hàng và $\frac{\overline{G_3G_1}}{\overline{G_3G_2}} = k$

Bước 2: Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp ▲AMP, ▲ANQ, ▲ABC.

Cmr: O_1, O_2, O_3 thẳng hàng và $\frac{\overline{O_3O_1}}{\overline{O_3O_2}} = k$



Ta có: $\frac{\overline{Z_3Z_1}}{\overline{Z_3Z_2}} = \frac{\overline{AZ_1} - \overline{AZ_3}}{\overline{AZ_2} - \overline{AZ_3}} = \frac{\overline{AM} - \overline{AB}}{\overline{AN} - \overline{AB}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{Y_3Y_1}}{\overline{Y_3Y_2}}$

=> O_1, O_2, O_3 thẳng hàng và $\frac{\overline{O_3O_1}}{\overline{O_3O_2}} = k$

Bước 3: Gọi (H_1, H_2, H_3), (N_1, N_2, N_3) lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn Euler của ▲AMP, ▲ANQ, ▲ABC. Chứng minh H_1, H_2, H_3 thẳng hàng và N_1, N_2, N_3 thẳng hàng

Từ kết quả đường thẳng Euler, ta được: $\begin{cases} \frac{\overline{H_1G_1}}{\overline{H_1O_1}} = \frac{\overline{H_2G_2}}{\overline{H_2O_2}} = \frac{\overline{H_3G_3}}{\overline{H_3O_3}} \\ \frac{\overline{N_1G_1}}{\overline{N_1O_1}} = \frac{\overline{N_2G_2}}{\overline{N_2O_2}} = \frac{\overline{N_3G_3}}{\overline{N_3O_3}} \end{cases}$

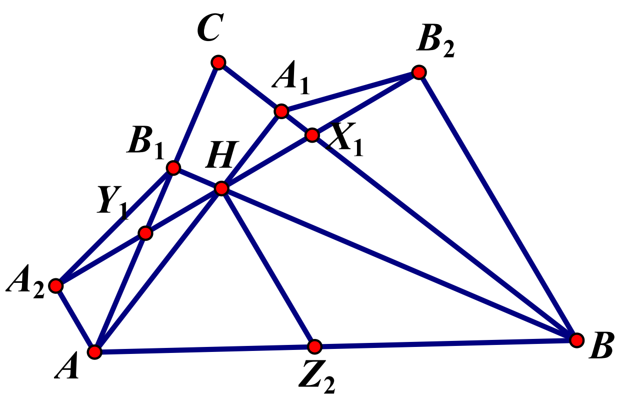
Xét 2 bộ điểm thẳng hàng (O_3, O_1, O_2) và (G_3, G_1, G_2) thỏa: $\frac{\overline{G_3G_1}}{\overline{G_3G_2}} = \frac{\overline{O_3O_1}}{\overline{O_3O_2}} = k$

Theo bổ đề ERIQ: H_1, H_2, H_3 thẳng hàng và N_1, N_2, N_3 thẳng hàng

AD11 (Định lý Froz -Farny mở rộng): Cho hai đường thẳng $\Delta_1 \perp \Delta_2$ tại trực tâm ▲ABC. $\Delta_1 \cap$ BC, CA, AB = $\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\Delta_2 \cap$ BC, CA, AB = $\{X_2, Y_2, Z_2\}$. Cmr: Các điểm chia X_1X_2, Y_1Y_2, Z_1Z_2 cùng một tỉ số thì thẳng hàng

Ta chứng minh bài toán qua các bước sau:

Bước 1: Chứng minh $\begin{cases} \dfrac{\overline{HY_1}}{\overline{HX_1}} = \dfrac{\overline{Z_2A}}{\overline{Z_2B}} \\ \dfrac{\overline{HZ_1}}{\overline{HX_1}} = \dfrac{\overline{Y_2A}}{\overline{Y_2C}} \end{cases}$



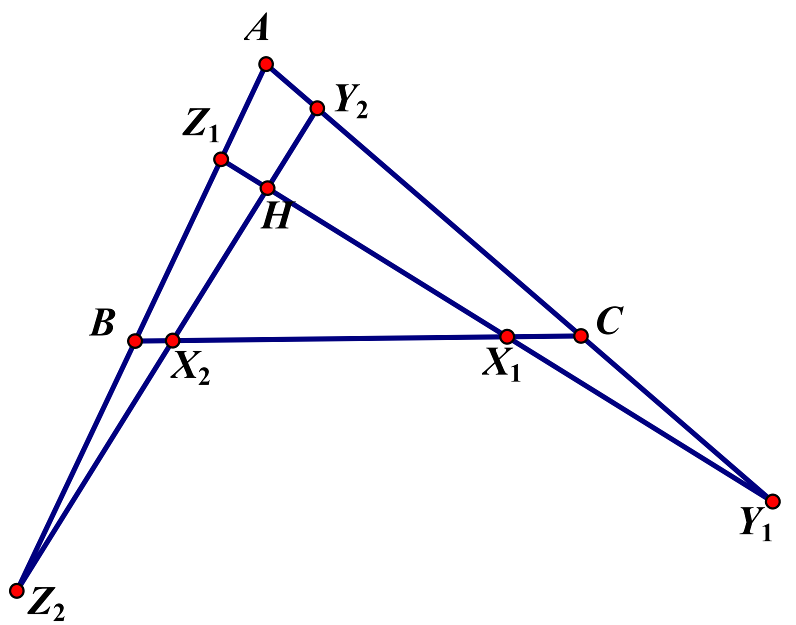
Gọi A_1, A_2, B_1, B_2 lần lượt hình chiếu A, B lên CB, CA và Δ_1

Dễ thấy ▲HAY_1 ~ ▲HB_2A_1, ▲HBX_1 ~ ▲HB_1A_2 , ▲HAB_1 ~ ▲HBA_1

Ta có $\dfrac{\overline{HY_1}}{\overline{HX_1}} = \dfrac{\overline{HY_1}}{\overline{HA}} \cdot \dfrac{\overline{HA}}{\overline{HB}} \cdot \dfrac{\overline{HB}}{\overline{HX_1}} = \dfrac{\overline{HA_1}}{\overline{HB_2}} \cdot \dfrac{\overline{HB_1}}{\overline{HA_1}} \cdot \dfrac{\overline{HA_2}}{\overline{HB_1}} = \dfrac{\overline{HA_2}}{\overline{HB_2}} = \dfrac{\overline{Z_2A}}{\overline{Z_2B}}$

Tương tự ta có: $\dfrac{\overline{HZ_1}}{\overline{HX_1}} = \dfrac{\overline{Y_2A}}{\overline{Y_2C}}$

Bước 2: Chứng minh $\dfrac{\overline{Z_2B}}{\overline{Y_2C}} = \dfrac{\overline{Z_1B}}{\overline{Z_1C}}$



Lấy K, L sao cho HK // AB, HL // AC

Ta có $HZ_1 \perp HY_2, HZ_2 \perp HY_1, HB \perp HL, HK \perp HC$

=> $\dfrac{\overline{BZ_1}}{\overline{BZ_2}} = H(BKZ_1Z_2) = H(LCY_2Y_1) = \dfrac{\overline{CY_1}}{\overline{CY_2}}$

=> $\dfrac{\overline{Z_2B}}{\overline{Y_2C}} = \dfrac{\overline{Z_1B}}{\overline{Z_1C}}$

Bước 3: Chứng minh các điểm chia X_1X_2, Y_1Y_2, Z_1Z_2 cùng một tỉ số thì thẳng hàng

Ta có:

$$\frac{\overline{X_1Y_1}}{\overline{X_1Z_1}} = \frac{HY_1 - HX_1}{HZ_1 - HX_1} = \frac{\dfrac{\overline{HY_1}}{\overline{HX_1}} - 1}{\dfrac{\overline{HZ_1}}{\overline{HX_1}} - 1} = \frac{\dfrac{\overline{Z_2A}}{\overline{Z_2B}} - 1}{\dfrac{\overline{Y_2A}}{\overline{Y_2C}} - 1} = \frac{\overline{Z_2A} - \overline{Z_2B}}{\overline{Y_2A} - \overline{Y_2C}} \cdot \frac{\overline{Y_2C}}{\overline{Z_2B}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}} \cdot \frac{\overline{Y_2C}}{\overline{Z_2B}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}} \cdot \frac{\overline{Y_1C}}{\overline{Z_1B}} = \ldots = \frac{\overline{X_2Y_2}}{\overline{X_2Z_2}}$$

Xét 2 bộ điểm thẳng hàng (X_1, Y_1, Z_1) và (X_2, Y_2, Z_2) thỏa $\dfrac{\overline{X_1Y_1}}{\overline{X_1Z_1}} = \dfrac{\overline{X_2Y_2}}{\overline{X_2Z_2}}$

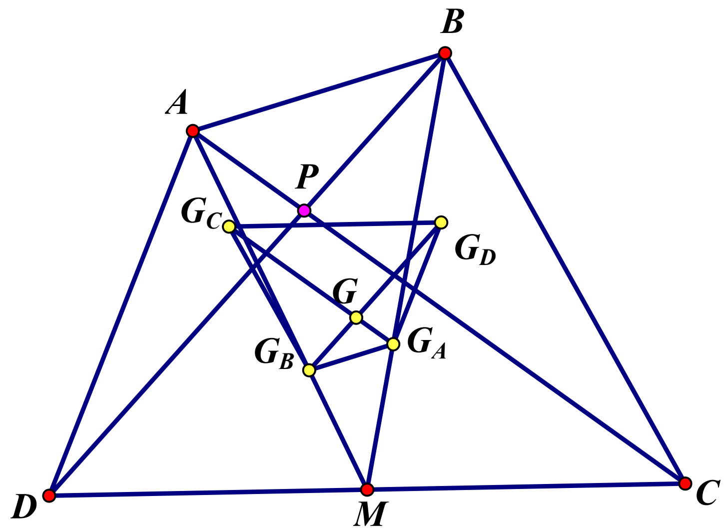
Theo bổ đề ERIQ: các điểm chia X_1X_2, Y_1Y_2, Z_1Z_2 cùng một tỉ số thì thẳng hàng

AD12: Cho tứ giác ABCD. (G_A,G_B, G_C, G_D), (O_A,O_B, O_C, O_D), (H_A,H_B, H_C, H_D), (N_A,N_B, N_C, N_D) lần lượt là trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm, tâm đường tròn Euler của ▲BCD, ▲CDA, ▲DAB, ▲ABC. Chứng minh rằng giao điểm hai đường chéo của các tứ giác $G_AG_BG_CG_D$, $O_AO_BO_CO_D$, $H_AH_BH_CH_D$, $N_AN_BN_CN_D$ thẳng hàng và chúng lập thành một hàng điểm điều hòa

Sau đây là các bước chứng minh, lời giải chi tiết xin dành cho bạn đọc

Ta chứng minh bài toán qua các bước sau:

Bước 1: Gọi P, G là giao điểm 2 đường chéo của ABCD, $G_AG_BG_CG_D$ Chứng minh $\frac{GG_A}{GG_C} = \frac{PA}{PC}$ và $\frac{GG_B}{GG_D} = \frac{PB}{PD}$



Gọi M là trung điểm CD

Ta có: $\frac{MG_A}{MB} = \frac{MG_B}{MA} = \frac{1}{3}$ => G_AG_B // AB

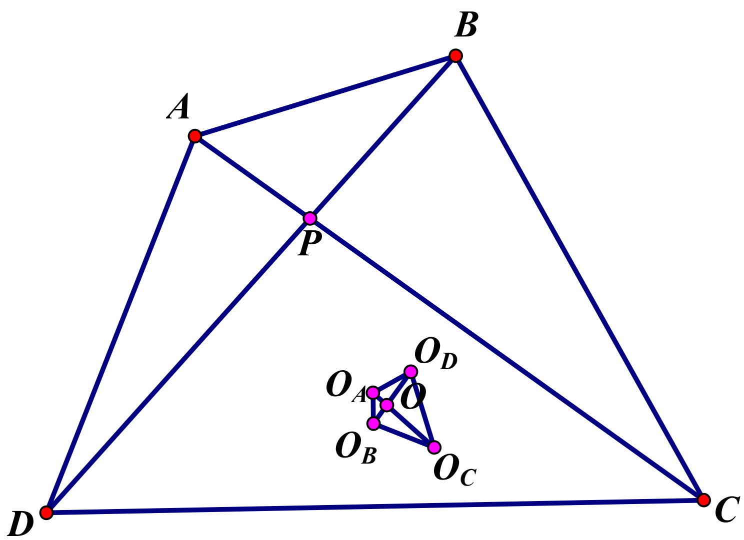
Tương tự ta có G_BG_C // BC, G_CG_D // CD, G_DG_A // DA.

Vậy tứ giác ABCD, $G_AG_BG_CG_D$ đồng dạng với nhau

=> $\frac{GG_A}{GG_C} = \frac{PA}{PC}$ và $\frac{GG_B}{GG_D} = \frac{PB}{PD}$

Bước 2: Gọi O là giao điểm 2 đường chéo của $O_AO_BO_CO_D$. Chứng minh $\frac{OO_A}{OO_C} = \frac{PA}{PC}$ và

$\frac{OO_B}{OO_D} = \frac{PB}{PD}$



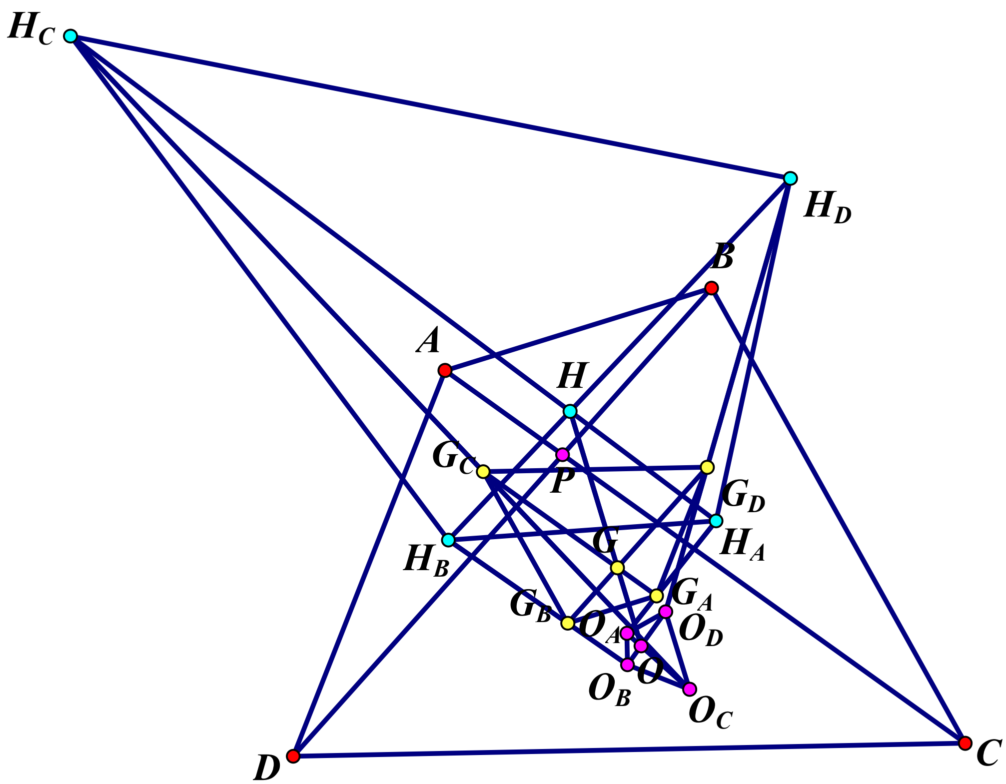
Ta có: ▲OO_AO_D ~ ▲PBC, ▲OO_CO_D ~ ▲PAB

=> $\frac{OO_A}{OO_C} = \frac{OO_A}{PB} \cdot \frac{PB}{OO_C} = \frac{OO_D}{PC} \cdot \frac{PA}{OO_D} = \frac{PA}{PC}$

Tương tự ta có $\frac{OO_B}{OO_D} = \frac{PB}{PD}$

Như vậy $\frac{GG_A}{GG_C} = \frac{OO_A}{OO_C} = \frac{PA}{PB}$ và $\frac{GG_B}{GG_D} = \frac{OO_B}{OO_D} = \frac{PB}{PD}$

Bước 3: Gọi H, N là giao điểm 2 đường chéo của $H_AH_BH_CH_D$, $N_AN_BN_CN_D$. Chứng minh, O, G, N, H thẳng hàng và chúng lập thành hàng điểm điều hòa



Theo định lý Euler: G_X, O_X, H_X thẳng thẳng hàng, với $X \in \{A, B, C, D\}$

$OG \cap H_AH_C, H_BH_D = \{H_1, H_2\}$

Xét 2 bộ điểm thẳng hàng (G_A, O_A, H_A) và (G_C, O_C, H_C) thỏa $\frac{G_AO_A}{G_AH_A} = \frac{G_CO_C}{G_CH_C} = \frac{1}{2}$

Theo bổ đề ERIQ: $\frac{GO}{GH_1} = \frac{1}{2}$

Tương tự ta có: $\frac{GO}{GH_2} = \frac{1}{2}$

=> $H_1 \equiv H_2 \equiv H$

Vậy G, H, O thẳng hàng

Tương tự, ta có: G, O, N thẳng hàng

Và do $(G_XH_XO_XN_X) = -1$ nên $(GHON) = -1$

Qua 12 bài toán áp dụng bổ đề ERIQ, hẳn các bạn phần nào thấy được ứng dụng rộng rãi của nó trong các bài toán hình học: từ chứng minh các điểm thẳng hàng đến các bài tính toán tỉ số … Bài viết không tránh khỏi những thiếu sót, mong các bạn bỏ qua !