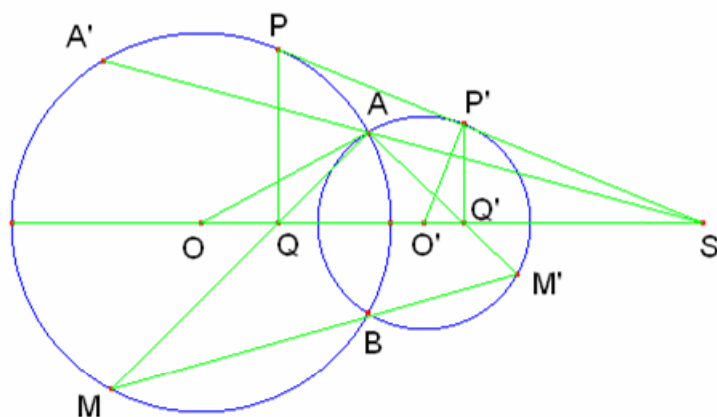


Cho 2 đường tròn (O) và (O') có bán kính khác nhau cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng tiếp xúc với (O) tại P, tiếp xúc (O') tại P'. Gọi Q, Q' lần lượt là chân đường thẳng AQ, AQ' cắt lần thứ hai 2 đường tròn tại M và M'. CMR M, M', B thẳng hàng.

Hướng dẫn học sinh:

- * Xét phép vị tự $V_S^{\frac{R_1}{R_2}}$ (S là tâm vị tự ngoài của 2 đường tròn)
- * Chứng minh tứ giác AQOA' nội tiếp
- * Chứng minh: Tổng 2 góc bằng $180^\circ \Rightarrow B, M, M'$ thẳng hàng

Lời giải:



2 đường tròn cắt nhau, $R \neq R'$, Gọi S là tâm vị tự ngoài của 2 đường tròn

$$V_S^{\frac{R_2}{R_1}} : \left. \begin{array}{l} O \rightarrow O' \\ P' \rightarrow P \\ A \rightarrow A' \\ Q' \rightarrow Q \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Góc } A_2 = \text{Góc } OA'Q$$

Ta lại có: $SP^2 = \overline{SQ} \cdot \overline{SO}$; $SP^2 = \overline{SA} \cdot \overline{SA'}$

$\Rightarrow \overline{SQ} \cdot \overline{SO} = \overline{SA} \cdot \overline{SA'} \Rightarrow$ Tứ giác AQOA' nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow$ Góc $A_1 =$ góc $OA'Q$ (chắn góc QO). Vậy góc $A_1 =$ góc A_2

Do ΔMOA cân và $\Delta M'O'A'$ cân $\Rightarrow$ Góc $MOA =$ góc AOM'

Có Góc $B_1 = 1/2 (360^\circ - \text{góc } MO'A)$

Góc $B_2 = 1/2$ góc $M'O'A'$

$\Rightarrow$ Góc $B_1 +$ góc $B_2 \Rightarrow M, B, M'$ thẳng hàng

HU

Bài tập 4: Cho 2 đường tròn (O) và (O') tiếp xúc với nhau tại A, (O') nằm trong (O) BC là 1 dây cung của (O) tiếp xúc (O'). Tìm tập hợp tâm đường tròn nội tiếp ΔABC khi dây BC thay đổi.

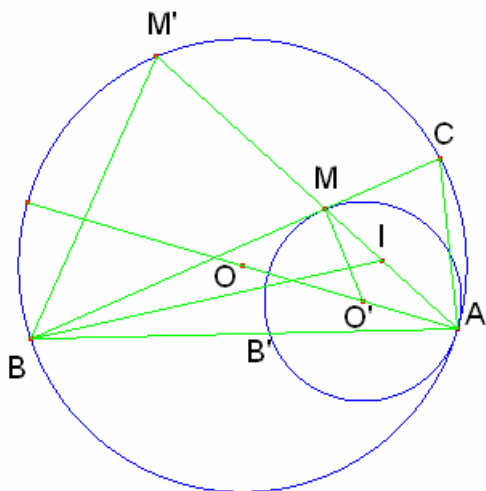
Hướng dẫn học sinh

- Xét phép vị tự $V_A^{\frac{R}{R'}}$: $O' \rightarrow O$ (M là tiếp điểm của BC và (O'))
 $M \rightarrow M'$

$$B \rightarrow B'$$

- Từ đó xác định phép vị tự $M \rightarrow I$

Do M chạy trên đường tròn (O') $\Rightarrow$ I chạy trên đường tròn là ảnh của (O') qua phép vị tự trên.



Lời giải:

$$\begin{aligned} V_A^{\frac{R}{R'}} &: O \rightarrow O' \\ M &\rightarrow M' \\ \overrightarrow{AO} &= \frac{R}{R'} \overrightarrow{AO'}; M; \in \text{đường tròn (O)} \end{aligned}$$

Ta thấy AM là tia phân giác của góc BAC

Vì Góc A = góc C; Góc A₁ = góc B₁

$$\left. \begin{array}{l} O'M \parallel NM' \\ OM \text{ vuông góc BC} \end{array} \right\} \Rightarrow OM' \text{ vuông góc BC}$$

$\Rightarrow OM'$ là đường kính chứa đôi dây BC

$\Rightarrow \Delta M'BC$ cân $\Rightarrow$ Góc C₁ = góc B₁ $\Rightarrow$ Góc A₁ = góc A₂

$\Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC thuộc MA

Theo tính chất phân giác

$$\frac{MI}{IA} = \frac{BM}{AB} \Leftrightarrow \frac{AB}{IA} = \frac{BM}{MI} \Leftrightarrow \frac{AB}{BM} = \frac{AI}{IM}$$

$$PB/(O') = BM^2 = BB' \cdot BA$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BM} = \frac{AI}{IM} = \frac{AB}{\sqrt{BB' \cdot BA}}$$

$$V_A^{\frac{R'}{R}}: B' \rightarrow B$$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{R}{R'} \overrightarrow{AB} \rightarrow AB' = \frac{R'}{R} \cdot AB$$

$$\rightarrow AB = k AB' (k = \frac{R}{R'} > 1)$$

$$\rightarrow \frac{AB'}{AB} = k \rightarrow \frac{AB - AB'}{AB} = \frac{1 - k}{1}$$

$$BB' = (1 - k) AB \rightarrow \frac{AB}{\sqrt{BA \cdot BB'}} = \frac{AB}{\sqrt{(1 - k) AB^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - k}}$$

Ta có:

$$\frac{AI}{IM} = \frac{1}{\sqrt{1 - k}} = q \rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{q}{1 + q} \overrightarrow{AM}$$

$$\rightarrow V_{A^{1+q}}^q : M \rightarrow I$$

Vậy I thuộc đường tròn là ảnh (O') qua $V_{A^{1+q}}^q$

Bài tập rèn kỹ năng

Bài 1: Cho ΔABC , I là tâm đường tròn nội tiếp tiếp xúc BC tại M. Gọi N là điểm đối xứng với M qua I, K là giao điểm AN và BC. Ta kí hiệu H là điểm đối xứng với tiếp điểm (I) trên AC qua trung điểm cạnh AC. L là điểm đối xứng với tiếp điểm của (I) trên AB qua trung điểm cạnh AB, G là trọng tâm ΔABC . P là giao HB và CL. Chứng minh rằng P, G, I thẳng hàng.

*** Hướng dẫn học sinh:**

* Gọi A' là trung điểm BC

Phải chứng minh A' là trung điểm MK

$$\text{Phép } V_A^{\frac{I_2}{I_1}} : \quad N \rightarrow K_1 \\ I \rightarrow I_1$$

Chứng minh $K \equiv K_1$

* Chứng minh $\exists$ phép tự vị: $V_G^{-2} : I \rightarrow P$

Vậy chứng tỏ G, I, P thẳng hàng

Bài tập 2: Cho 2 đường tròn (C_1) , (C_2) cùng tiếp xúc trong với đường tròn (C) tại M với tâm (C_1) nằm trên (C_2) Dây chung của (C_1) ; (C_2) cắt (C) tại A, B. MA, MB cắt (C_2) tại C và D.

CMR: (C_1) tiếp xúc CD

Hướng dẫn học sinh:

* Chứng minh bài toán phụ: Cho đường tròn (O_1) tiếp xúc trong (O) tại A, tiếp tuyến của (O_1) tại M cắt (O) ở B và C. AM cắt (O) ở D. Khi đó AD là phân giác góc BAC và $AM \cdot DP = DB^2$.

* Chứng minh B' thuộc trục đẳng phương (C_1) và (C_2)

B thuộc trục đẳng phương (C_1) và (C_2)

Từ đó $\Rightarrow B \equiv B'$; $D \equiv D'$

• Chứng minh: $O_1E = O_1I = R_1$

Bài tập 3: Cho đường tròn (J) tiếp xúc trong với 2 đường tròn ngoại tiếp ΔABC cân ở A đồng thời tiếp xúc với 2 cạnh AB, AC tại M và N. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn MN là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC .

Hướng dẫn học sinh

* Xét phép vị tự

$$V_A^k: H \rightarrow K$$

$$A \rightarrow A \quad \text{Với } k = AK/AH$$

$$B \rightarrow D$$

$$C \rightarrow E$$

Chứng minh J là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ADE$

D. PHÉP NGHỊCH ĐẢO

I. Định nghĩa: O cho trước $k \neq 0$.

Mỗi $M \neq O$ dựng 1 điểm $M' \in$ đường thẳng OM sao cho $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$.

Đây là phép nghịch đảo tâm O, hệ số k biến $M \rightarrow M'$ Kí hiệu: $I(0, k): M \rightarrow M'$

II. Tính chất

Cho phép nghịch đảo $I(0, k)$ $k \neq 0$

1. Tính chất 1: Phép $I(0, k)$ là phép biến đổi 1-1

2. Tính chất 2: là phép đồng nhất

Tích $I(0, k) \cdot I(0, k)$

3. Tính chất 3: $I(0, k): A \rightarrow A'$

$$B \rightarrow B'$$

$$\text{Thì } A'B' = \lambda AB \text{ với } \lambda = \frac{|k|}{OA \cdot OB}$$

4. Tính chất 4: ảnh đường thẳng d đi qua tâm nghịch đảo là chính (d).

5. Tính chất 5: ảnh 1 đường thẳng d đi qua tâm nghịch đảo của đường tròn đi qua tâm nghịch đảo.

6. Tính chất 6: ảnh của 1 đường tròn (C) đi qua tâm nghịch đảo O là 1 đường thẳng (d) không đi qua O và đường thẳng đó song song với tiếp tuyến tại O.

7. Tính chất 7: ảnh của 1 đường tròn (C) không đi qua tâm nghịch đảo O là 1 đường tròn (C'). Đường tròn (C') cũng là ảnh của đường tròn phép vị tự tâm O. Tỷ số $\alpha = k/p$ (với p là $P_o/(C)$).

Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho 2 đường tròn (O, R) ; (O', R') có khoảng cách giữa tâm bằng α ($\alpha > 0$). Gọi (O_1, R_1) là ảnh của (O, R) trong phép nghịch đảo $I(O', R'^2)$, (O_2, R_2) là ảnh của (O', R') trong phép nghịch đảo $I(O, R^2)$. Tính R_1, R_2 theo R và R', α .

Hướng dẫn học sinh:

* Sử dụng tính chất 7

Lời giải:

$$I(O', R'^2): C(O, R) \rightarrow C(O_1, R_1)$$

$$I(O, R^2): C(O', R') \rightarrow C(O_2, R_2)$$

$$\Rightarrow V_{O', \lambda'}: C(O, R) \rightarrow C(O_1, R_1)$$

$$\lambda_1 = \frac{R^2}{|a^2 - R^2|}$$

$$\text{Vậy } R_1 = |\lambda_1| R$$

$$R_1 = \frac{R^2}{|a^2 - R^2|} \cdot R$$

$$R_2 = \frac{R^2 \cdot R'}{|a^2 - R'^2|}$$

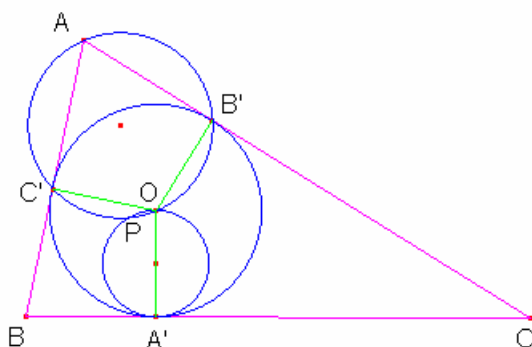
Bài tập 2: Cho ΔABC không cân và đường tròn tâm O nội tiếp, tiếp xúc với các cạnh BC , CA , AB tương ứng tại các điểm A' , B' , C' . Gọi P là giao điểm thứ hai của 2 đường tròn mà các đường kính là OA và OA' ; Q là giao điểm thứ hai của 2 đường tròn mà các đường kính là OB và OB' ; K là giao điểm thứ hai của 2 đường tròn mà các đường kính là OC và OC' . CMR: P , Q , K , O cùng nằm trên 1 đường tròn.

Hướng dẫn học sinh:

* Xét phép $I(O, R^2)$

* Phép nghịch đảo trên biến đường tròn qua tâm nghịch đảo thành 1 đường thẳng.

Lời giải:



Xét $I(O, R^2)$: $A' \rightarrow A$ vì $OA' \cdot OA = R^2$

$BC \rightarrow$ đường tròn đường kính C [OA'] và ngược lại

$I(O, R^2)$: $C \rightarrow C'$

$B \rightarrow B'$

đường thẳng $B'C' \rightarrow C$ [OA'] và ngược lại

$\Rightarrow I(O, R^2)$ $O \rightarrow \infty$

$P \rightarrow P'$

$\Rightarrow P'$ là giao BC và $B'C'$

Q' là giao AC và $A'C'$

K' là giao AB và $A'B'$

$Q \rightarrow Q'$

$K \rightarrow K'$

Chứng minh P' , Q' , K' thẳng hàng theo định lý Menelaus

$\Rightarrow O, Q, P, K$ cùng thuộc đường tròn

Bài tập 3: Cho đường tròn (O, r) nội tiếp trong tứ giác $ABCD$ tiếp xúc với AB , BC , CD , AD tại M , N , P , Q . Biết tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn bán kính R và khoảng cách giữa tâm 2 đường tròn bằng a . Tính $MP^2 + NQ^2$ theo r , R .

Hướng dẫn học sinh:

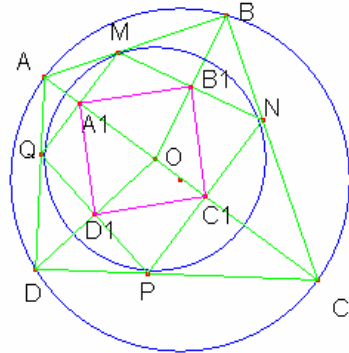
* Xét phép nghịch đảo $I(O, r^2)$

* Tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là hình chữ nhật. Gọi x là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ tính $x = \frac{r^2 \cdot R_1}{R^2 - a^2}$

* Chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$

* Thiết lập phương trình ẩn a (bậc 2)

Lời giải:



$I(0, R^2):$

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A_1 \\ B &\rightarrow B_1 \\ C &\rightarrow C_1 \\ D &\rightarrow D_1 \end{aligned}$$

A_1, B_1, C_1, D_1 là trung điểm MQ, MN, NP và PQ .

$\Rightarrow$ Tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là hình bình hành

Do $A_1B_1 \parallel NQ; \quad B_1C_1 \parallel MP$

$C_1D_1 \parallel NP; \quad A_1D_1 \parallel MP$

Nếu A, B, C, D cùng thuộc 1 đường tròn thì $A_1B_1C_1D_1$ cũng nằm trên 1 đường tròn $\Rightarrow$ tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là hình chữ nhật.

Gọi x là tâm đường tròn ngoại tiếp $A_1B_1C_1D_1$

$$\Rightarrow NQ^2 + MP^2 = 4b^2 + 4a^2 = 4(b^2 + a^2) = 16x^2$$

Gọi đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ là (O_1, R_1)

Gọi đường tròn ngoại tiếp tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là (O_2, R_2)

$$V_o^\lambda: O_1 \rightarrow O_2$$

$$\varphi(O_1) \rightarrow C(O_2)$$

$$R_1 \rightarrow R_2 \Rightarrow R_2 = \lambda R_1$$

$$\lambda = \frac{r^2}{P}; P_o/(O_1) = R^2 - a^2 \quad (O \text{ trong } (O_1))$$

$$\lambda = \frac{r^2}{R^2 - a^2} \Rightarrow x = \frac{r^2 R_1}{R^2 - a^2}$$

Gọi A', C' là giao OA, OC và đường tròn ngoại tiếp tứ giác

$$OA \cdot OA' = OC \cdot OC' = R^2 - a^2$$

$$OA = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}; OC = \frac{r}{\sin \frac{C}{2}}; \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1$$

Do góc $A + \text{góc } C = 180^\circ$

$$\frac{1}{OA^2} = \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{r^2}; \quad \frac{1}{OC^2} = \frac{\sin^2 \frac{C}{2}}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{r^2}$$

Xét $\Delta A'OC'$ gọi I là trung điểm $A'C'$

* Chứng minh I là tâm, đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD

Vì S_d góc $BA' = S_d$ góc DA' ; S_d góc $= S_d$ $C'D$

$\Rightarrow S_d$ góc $A'B'C' = S_d$ góc $A'DC'$

$$\begin{aligned} \text{Có } OA' + OC' &= 2OI^2 + 2R^2 \\ &= 2(a^2 + R^2) \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác: } OA = \frac{R^2 - a^2}{OA'}; \quad OC = \frac{R^2 - a^2}{OC'}$$

$\Rightarrow$ Phương trình bậc 2 ẩn a

Bài tập rèn kỹ năng

Bài 1: Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC không cân. Giả sử đường tròn này tiếp xúc với BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1 ...CMR tâm các đường tròn ngoại tiếp $\Delta AIA_1; BIB_1, CIC_1$ thẳng hàng.

Hướng dẫn học sinh:

Xét I (I, r^2): $A_1 \rightarrow A_1$

$A \rightarrow A_0$

C $IAA_1 \rightarrow$ đường thẳng A_1A_0

C $IBB_1 \rightarrow$ đường thẳng B_1B_0

C $ICC_1 \rightarrow C_1C_0$

Mà A_1A_0, B_1B_0, C_1C_0 đồng quy $\Rightarrow$ đpcm

Bài 2: Cho (O, R) và điểm cố định M không trùng với tâm O và không nằm trên đường tròn (O, R) . Một đường thẳng d đi qua M cắt đường tròn đã cho tại 2 điểm. Gọi C là giao điểm các tiếp tuyến của đường tròn tại A và B. Tìm tập hợp điểm C khi d biến thiên.

Hướng dẫn học sinh:

I (O, R^2) : $H \rightarrow C$

* ảnh C $[OM]$ là đường thẳng (Δ) qua C qua I (O, R^2)

* Chứng minh: $P_c/(O) = P_c/[OM] \Rightarrow \Delta \equiv H_1H_2C$

Phần III: KẾT LUẬN

Trên đây là một hệ thống bài tập khi dạy về phép biến hình trong mặt phẳng. Với lượng kiến thức nói trên còn phải bổ sung rất nhiều, nhưng phần nào cũng hình thành được những kỹ năng cơ bản trong việc sử dụng phép biến hình vào việc giải toán trong hình học phẳng. Bài viết còn rất nhiều thiếu sót, rất mong được sự đóng góp của các thầy cô giáo.

NHÌN “ĐỆ QUI” QUA LĂNG KÍNH “SONG ÁNH”

Bùi Tuấn Ngọc
THPT Chuyên Trần Phú - Hải Phòng

Xây dựng song ánh để thiết lập công thức truy hồi (đệ qui) từ đó đưa ra kết luận. Đó là phương pháp giải cho một số bài toán tổ hợp sau đây.

Bài 1: Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Hỏi có tất cả bao nhiêu tập con khác rỗng của tập hợp gồm n số nguyên dương đầu tiên mà mỗi tập không chứa hai số nguyên liên tiếp nào.

Lời giải :

Đặt $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$

$S_n = \{M \subset A_n \mid M \text{ không chứa hai số nguyên liên tiếp nào}\}$

$P_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \{0, 1\} \forall i = 1, 2, \dots, n, (a_i, a_{i+1}) \neq (1, 1) \forall i = 1, 2, \dots, n-1\}$

+ Xét ánh xạ $f: S_n \rightarrow P_n$

$$M \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_n) \in P_n \text{ sao cho } \begin{cases} a_i = 1 & \text{khí } i \in M \\ a_i = 0 & \text{khí } i \notin M \end{cases}$$

Vì f là song ánh nên : $|S_n| = |P_n| \forall n \geq 1$

+ Xét ánh xạ $g: P_n \rightarrow P_{n-1} \cup P_{n-2} \quad \forall n \geq 3$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto \begin{cases} (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in P_{n-1} & \text{khí } a_n = 0 \\ (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}) \in P_{n-2} & \text{khí } a_n = 1 \end{cases}$$

Vì g là song ánh nên : $|P_n| = |P_{n-1}| + |P_{n-2}| \forall n \geq 3 \Rightarrow |S_n| = |S_{n-1}| + |S_{n-2}| \forall n \geq 3$

Dễ thấy : $|S_2| = 3; |S_1| = 2$. Do đó : $|S_n| = |F_{n+1}| \forall n \geq 1$, ($\{F_n\}$ là dãy Fibônaxi)

$$\Rightarrow |S_n| = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right) \quad \text{mà } \emptyset \subset S_n \text{ nên số tập con thoả mãn giả thiết là:}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right) - 1$$

Bài 2: Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, kí hiệu H_n là tập tất cả các hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ của n số nguyên dương đầu tiên. Xét các tập hợp:

$$S_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in H_n : a_i \geq i - 1 \forall i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$T_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in S_n : a_i \leq i + 1 \forall i = 1, 2, \dots, n\}$$

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho: $\frac{|T_n|}{|S_n|} > \frac{1}{3}$

Lời giải:

$$\text{Đặt } P_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in S_n \mid a_1 = 1\}$$

$$Q_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in S_n \mid a_1 \neq 1\}$$

$$\text{Dễ có: } P_n \cap Q_n = \emptyset, P_n \cup Q_n = S_n$$

+ Xét ánh xạ $f: P_n \rightarrow Q_n$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto (a_2, a_1, \dots, a_n)$$

Vì f là song ánh nên: $|P_n| = |Q_n| = \frac{1}{2}|S_n|$

+ Xét ánh xạ $g: P_n \rightarrow S_{n-1}$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto (a_2 - 1, a_3 - 1, \dots, a_n - 1)$$

Vì g là song ánh nên: $|P_n| = |S_{n-1}|$

$$\text{Vậy: } |S_n| = 2|S_{n-1}| \forall n \geq 2$$

$$\text{Mà } |S_2| = 2; |S_1| = 1 \Rightarrow |S_n| = 2^{n-1}$$

+ Xét ánh xạ $h: T_n \rightarrow T_{n-1} \cup T_{n-2}$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto \begin{cases} (a_2 - 1, a_3 - 1, \dots, a_n - 1) \in T_{n-1} & \text{khí } a_1 = 1 \\ (a_3 - 2, a_4 - 2, \dots, a_n - 2) \in T_{n-2} & \text{khí } a_1 = 2 \end{cases}$$

Vì h là song ánh nên $|T_n| = |T_{n-1}| + |T_{n-2}|$

$$\text{mà } |T_2| = 2; |T_1| = 1 \Rightarrow |T_n| = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

$$\text{Vậy: } \frac{|T_n|}{|S_n|} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)}{2^{n-1}} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow n \leq 6.$$

Bài 3: (IMO 1987)

Gọi $P_n(k)$ là số các hoán vị của tập $A = \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) có đúng k điểm cố định ($0 \leq k \leq n$).

Chứng minh rằng: $\sum_{k=0}^n k \cdot P_n(k) = n!$

Lời giải:

Đặt: $M = \{(f, i) \mid f \text{ là hoán vị của } A \text{ giữ nguyên } k \text{ phần tử, } i \in A \text{ sao cho } f(i) = i\}$

Ta có: $|M| = k \cdot P_n(k)$

Với mỗi $1 \leq i \leq n$: đặt N_i là tập tất cả các hoán vị giữ nguyên $k-1$ phần tử của tập hợp $B = A \setminus \{i\}$ thì $|N_i| = P_{n-1}(k-1)$

+ Xét ánh xạ $g: M \rightarrow \bigcup_{i=1}^n N_i$

$$(f, i) \mapsto \bar{f} \quad (\bar{f}(m) = f(m) \forall m = 1, \dots, n; m \neq i)$$

$$\text{Vì } g \text{ là song ánh nên } |M| = \left| \bigcup_{i=1}^n N_i \right| = \sum_{i=1}^n |N_i| \Rightarrow k.P_n(k) = n.P_{n-1}(k-1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n k.P_n(k) = n \cdot \sum_{k=1}^n P_{n-1}(k-1) \Rightarrow \sum_{k=0}^n k.P_n(k) = n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} P_{n-1}(j) = n \cdot (n-1)! = n!$$

Bài 4: (VMO 2002)

Cho tập S gồm tất cả các số nguyên $\in [1; n] (n \in \mathbb{N}^*)$. T là tập tất cả các tập con khác rỗng của S. Với mỗi $A \in T$, kí hiệu $m(A)$ là trung bình cộng của tất cả các phần tử thuộc A. Tính:

$$m = \frac{\sum_{X \in T} m(X)}{|T|}$$

Lời giải:

+ Xét song ánh $f: T \rightarrow T$

$$X \mapsto f(X) = \{n+1-x \mid x \in X\}$$

Vì f là song ánh nên

$$\begin{cases} m(X) + m(f(X)) = n+1, \forall X \in T \\ \sum_{X \in T} m(X) = \sum_{X \in T} m(f(X)) \end{cases} \Rightarrow \sum_{X \in T} [m(X) + m(f(X))] = |T|(n+1) \Rightarrow 2 \sum_{X \in T} m(X) = |T|(n+1)$$

$$\text{Vậy: } m = \frac{\sum_{X \in T} m(X)}{|T|} = \frac{n+1}{2}$$

Bài 5: (VMO 1996)

Cho $n, k, m \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện $1 < k \leq n, m > 1$. Hỏi có bao nhiêu chỉnh hợp chập k: $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ của n số nguyên dương đầu tiên mà mỗi chỉnh hợp đó đều thỏa mãn ít nhất một trong hai điều kiện sau:

- $\exists i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ sao cho $i < j$ và $a_i > a_j$
- $\exists i \in \{1, 2, \dots, k\}$ sao cho $a_i - i$ không chia hết cho m

Lời giải:

Đặt $A = \{\text{tập các chỉnh hợp chập k của } (1, 2, \dots, n)\}$

$A^* = \{\text{tập các chỉnh hợp thỏa mãn giả thiết}\}$

$B = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A \mid a_1 < a_2 < \dots < a_k \text{ và } a_i - i : m \forall i = 1, 2, \dots, k\}$

Dễ thấy $A^* = A \setminus B$

+ Xét ánh xạ $f: B \rightarrow B'$

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) \mapsto (a_1 - 1 + m, a_2 - 2 + 2m, \dots, a_k - k + km)$$

Khi đó f là song ánh từ B đến B'

với $B' = \{(b_1, b_2, \dots, b_k) \mid b_1 < b_2 < \dots < b_k, b_i \in \{1, 2, \dots, n - k + km\}, b_i : m \forall i = 1, \dots, k\}$

$$\text{Do đó } |B| = |B'| = C_{\left[\frac{n-k}{m}\right] + k}^k$$

$$\text{Vậy } |A^*| = |A| - |B| = A_n^k - C_{\left[\frac{n-k}{m}\right] + k}^k$$

***Một số bài luyện tập:**

Bài 6: Tìm tất cả các bộ số nguyên $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ($n > 1$) sao cho

$$\begin{cases} |a_i| \leq 1, \forall i = 1, 2, \dots, n \\ |a_i - a_{i+1}| \leq 1, \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

Bài 7: Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có:

a. $C_{2n}^n = \sum_{i=0}^n (C_n^i)^2$

b. $\sum_{k=0}^n 2^k \cdot C_n^k \cdot C_{n-k}^{\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor} = C_{2n+1}^n$

c. $\sum_{k=0}^m C_{n+k}^k \cdot 2^{m-k} + \sum_{k=0}^n C_{m+k}^k \cdot 2^{n-k} = 2^{m+n+1}$

Bài 8: (IMO 1996)

Cho bảng ô vuông $n \times n$ ($n > 1$). Hỏi có bao nhiêu cách đánh dấu các ô vuông trong bảng sao cho trong mỗi hình vuông 2×2 có đúng 2 ô vuông được đánh dấu.

Bài 9: (VMO 2003)

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, gọi S_n là số các hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ của n số nguyên dương đầu tiên sao cho $1 \leq |a_i - i| \leq 2, \forall i = 1, 2, \dots, n$

Chứng minh rằng: $1,75S_{n-1} < S_n < 2S_{n-1}, \forall n > 6$

Bài 10: Giả sử F_k là tập tất cả các bộ $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ trong đó $A_i, i = 1, 2, \dots, k$ là một tập con của tập

hợp $\{1, 2, \dots, n\}$. Tính: $S_n = \sum_{(A_1, A_2, \dots, A_k) \in F_k} \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right|$

Bài 11: Trong các xâu nhị phân có độ dài n , gọi a_n là số các xâu không chứa ba số liên tiếp 0,1,0. b_n là số các xâu không chứa 4 số liên tiếp 0,0,1,1 hoặc 1,1,0,0. Chứng minh rằng: $b_{n+1} = 2a_n$.

Bài 12: Cho $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ và $2n$ điểm nằm cách đều trên một đường tròn cho trước. Hỏi có tất cả bao nhiêu bộ n đoạn thẳng mà mỗi bộ đều thỏa mãn đồng thời:

- Mỗi đoạn thẳng thuộc bộ đều có đầu mút là 2 trong $2n$ điểm đã cho
- Tất cả các đoạn thẳng thuộc bộ đôi một không có điểm chung.

Trong bài viết này, tôi sẽ trình bày các kiến thức cơ bản và cần thiết về phép vị tự – quay và việc áp dụng phép vị tự – quay vào giải toán hình học phẳng.

I. Các kiến thức cơ bản và cần thiết:

1. Định nghĩa:

Phép vị tự – quay là tích giao hoán của một phép vị tự và một phép quay có cùng tâm.

Nhận xét:

+ Thứ tự thực hiện các phép biến hình ở đây không quan trọng, vì $Q_O^\alpha \cdot V_O^k = V_O^k \cdot Q_O^\alpha$

+ Tỷ số của phép vị tự – quay có thể coi là một số dương vì $Q_O^{180^\circ} \cdot V_O^k = V_O^{-k}$

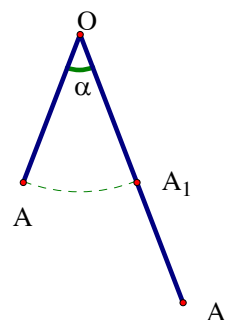
2. Cách xác định ảnh của một điểm qua phép vị tự – quay:

Cho phép quay Q_O^φ và phép vị tự V_O^k (với $k > 0$)

$$\text{Ta có: } Q_O^\alpha : A \mapsto A_1 \Leftrightarrow \begin{cases} OA_1 = OA \\ (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OA_1}) = \alpha \end{cases} \quad (1)$$

$$V_O^k : A_1 \mapsto A' \Leftrightarrow \begin{cases} OA' = kOA_1 \\ (\overrightarrow{OA_1}; \overrightarrow{OA'}) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) cho ta: } \begin{cases} \frac{OA'}{OA} = k \\ (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OA'}) = \alpha \end{cases} \quad (3)$$



Như vậy $V_O^k \cdot Q_O^\alpha$ là phép đồng dạng thuận $Z(O; \alpha; k)$ biến A thành A' xác định bởi (3). Khi đó O được gọi là tâm; α gọi là góc quay; k là tỷ số của phép vị tự – quay

3. Tính chất:

$$\text{Định lí: } Z(O; \alpha; k): A \mapsto A'; B \mapsto B' \text{ thì } \begin{cases} A'B' = kAB \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}) = \alpha \end{cases}$$

Hệ quả:

1) Phép vị tự – quay biến một đường thẳng thành một đường thẳng và góc giữa hai đường thẳng ấy bằng góc đồng dạng

2) Phép vị tự – quay biến một đường tròn thành một đường tròn, trong đó tâm biến thành tâm và tỷ số hai bán kính bằng tỷ số đồng dạng.

4. Cách xác định tâm của phép vị tự – quay:

Cho phép vị tự - quay $Z(O; \alpha; k)$. Hãy xác định tâm O khi biết:

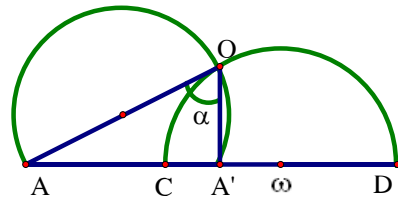
Trường hợp 1: Một cặp điểm tương ứng $(A; A')$; α và k

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{OA'}{OA} = k & (1) \\ \left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OA'} \right) = \alpha & (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow O$ thuộc đường tròn Apôlônius (ω) đường kính CD (C, D chia AA' theo tỉ số k)

(2) $\Leftrightarrow O$ thuộc cung (C) chứa góc định hướng $(\text{mod } 2\pi)$ nhận AA' làm dây.

Vậy O là giao điểm của (ω) và (C)

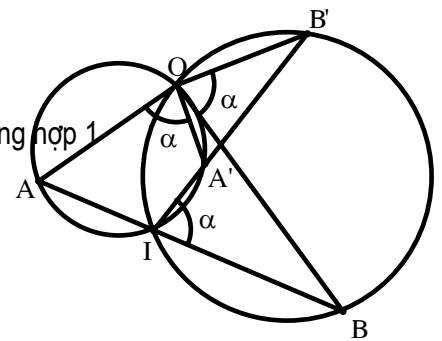


Trường hợp 2: Hai cặp điểm tương ứng $(A; A')$ và $(B; B')$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} A'B' = kAB \\ \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'} \right) = \alpha \end{cases} \text{ . Từ đó ta biết được } k \text{ và } \alpha \text{ và quay về trường hợp 1}$$

Cách khác: Gọi I là giao điểm của AB và $A'B'$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OA'} \right) = \left(\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{IA'} \right) = \alpha & (1) \\ \left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OB'} \right) = \left(\overrightarrow{IB}; \overrightarrow{IB'} \right) = \alpha & (2) \end{cases}$$



(1) $\Leftrightarrow O$ thuộc đường tròn (IAA')

(2) $\Leftrightarrow O$ thuộc đường tròn (IBB')

Vậy O là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp $\triangle IAA'$ và $\triangle IBB'$

5. Một kết quả quan trọng:

Định lý: Mọi phép vị tự - quay trong mặt phẳng đều có một điểm bất động duy nhất O và O chính là tâm của phép vị tự - quay đó.

Từ tính chất này, cho phép ta chứng minh các đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, trong đó A cố định còn B, C di động nhưng luôn là cặp điểm tương ứng của một phép vị tự - quay có góc quay α (không đổi) và tỉ số k (không đổi) luôn đi qua một điểm cố định là tâm O của phép vị tự - quay đó.

II. ứng dụng của phép vị tự – quay vào việc giải toán hình học.

1. Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Một cát tuyến di động MAN ($M \in (O)$; $N \in (O')$). Tìm quỹ tích trực tâm H của $\triangle BMN$?

Hướng dẫn giải:

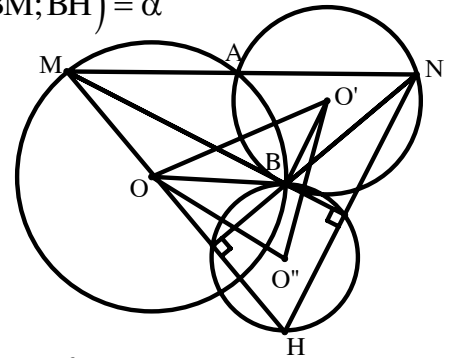
+ Dễ chứng minh được $\triangle BMN$ đồng dạng với $\triangle BOO'$ (1) và cùng hướng hay $\triangle BMN$ tự đồng dạng và giữ nguyên hướng. Kẻ trục tâm H của $\triangle BMN$ và đặt $k = \frac{BH}{BM}$ và $(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BH}) = \alpha$

+ Do $\triangle BMN$ tự đồng dạng nên k, α không đổi và phép vị tự – quay: $Z(B, \alpha, k) = V_B^k \cdot Q_B^\alpha : M \mapsto H$ (2)

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm H là đường tròn (O'') là ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự - quay $Z(B, \alpha, k)$ nói trên.

+ Từ (1) ta có O'' là trục tâm $\triangle BOO'$ và từ (2) ta có $B \in (O)$ và B là điểm bất động nên $B \in (O'')$ và bán kính của đường tròn ảnh bằng $O''B$.

Vậy tập hợp điểm H là đường tròn ($O''; O''B$)



Ví dụ 2: (Đề thi chọn đội tuyển HSG tỉnh Hưng Yên năm 2007 – 2008)

Trên hai đường thẳng a và b cắt nhau tại một điểm C có hai động tử chuyển động thẳng đều với vận tốc khác nhau: A trên a với vận tốc v_1 , B trên b với vận tốc v_2 , $v_1 \neq v_2$, chúng không gặp nhau ở C.

a) Chứng minh rằng ở bất kì thời điểm nào, đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ cũng luôn đi qua một điểm cố định O nào đó khác C

b) Tìm quỹ đạo chuyển động của động tử M luôn ở vị trí trung điểm của đoạn AB.

Hướng dẫn giải:

a) Giả sử A_0, B_0 là 2 vị trí xuất phát ứng với thời điểm t_0

A_1, B_1 là 2 vị trí của 2 động tử ở thời điểm $t_1 > t_0$

Khi đó $\frac{B_0B_1}{A_0A_1} = \frac{v_2(t_1 - t_0)}{v_1(t_1 - t_0)} = \frac{v_2}{v_1} = k$ ($0 < k$ không đổi)

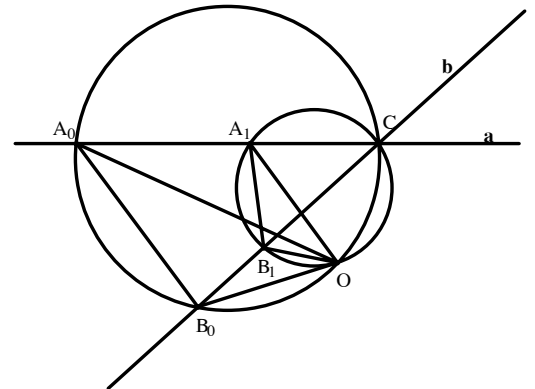
Gọi O là giao điểm thứ 2 của hai đường tròn

(A_0B_0C) và (A_1B_1C)

Dễ dàng chứng minh được: $\triangle OA_0A_1$ đồng dạng

với $\triangle OB_0B_1$. Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} \widehat{A_1OB_1} = \widehat{A_0OB_0} = \alpha \\ \frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_0}{OA_0} = \frac{B_0B_1}{A_0A_1} = \frac{v_2}{v_1} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{OA_1}; \overrightarrow{OB_1}) = (\overrightarrow{CA_1}; \overrightarrow{CB_1}) = \alpha & (1) \\ \frac{OB_1}{OA_1} = \frac{v_2}{v_1} & (2) \end{cases}$$

(1) chứng tỏ O thuộc cung chứa góc định hướng $\alpha \pmod{2\pi}$ dựng trên A_1B_1 cố định (3)

(2) chứng tỏ O thuộc đường tròn Apôlônius đường kính CD cố định (C, D chia đoạn A_1B_1 theo tỉ số không đổi $\frac{v_2}{v_1}$) (4)

Từ (3) và (4) suy ra O là điểm cố định.

b) Kí hiệu $A_0 = A$ (khi $t = 0$); $B_0 = B$ (khi $t = 0$); M_0 là trung điểm của đoạn A_0B_0 . $\vec{v}_1; \vec{v}_2$ là hai véc tơ vận tốc của A và B.

Quỹ tích của M là đường thẳng M_0m đi qua M_0 và có véc tơ chỉ phương là $\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ (suy ra từ $2\overrightarrow{M_0M} = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)t$)

Nhận xét:

1) Nếu không dùng góc định hướng thì phải xét hai trường hợp.

2) O chính là tâm của phép vị tự - quay tỉ số $k = \frac{v_2}{v_1}$; góc quay $(\overrightarrow{CA_1}; \overrightarrow{CB_1}) = \alpha$ biến a thành b,

trong đó A_1 biến thành B_1 . Vì a, b cố định, k, α không đổi nên O cố định

3) Để chứng minh đường tròn (ABC) luôn đi qua một điểm cố định, trong đó A, B là hai động tử chuyển động, ta cố định hoá hai vị trí nào đó của A, B và xét hai vị trí bất kì $A_1; B_1$ của hai động tử đó. Sau đó chứng minh giao điểm của (ABC) và (A_1B_1C) là hai giao điểm cố định bằng cách chỉ ra các tính chất đặc trưng (1) và (2) của nó mà ta có thể dựng được.

Ví dụ 3: (Đề dự tuyển IMO năm 1999)

Các điểm A, B, C chia đường tròn Ω ngoại tiếp $\triangle ABC$ thành ba cung. Gọi X là một điểm thay đổi trên cung tròn AB và $O_1; O_2$ tương ứng là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác CAX và CBX. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp $\triangle XO_1O_2$ cắt Ω tại một điểm cố định.

Hướng dẫn giải:

+ Gọi $T = (XO_1O_2) \cap (ABC)$

$M = XO_1 \cap (ABC); N = XO_2 \cap (ABC)$

+ Trên (ABO) ta có: $\widehat{XNT} = \widehat{XMT}$

Trên (XO_1O_2) ta có: $\widehat{XO_1T} = \widehat{XO_2T}$

$\Rightarrow \widehat{TO_1N} = \widehat{TO_2M} \Rightarrow \triangle TO_1N$ đồng dạng với $\triangle TO_2M$

$$\Rightarrow \frac{TN}{TM} = \frac{O_1N}{O_2M} = \frac{AN}{BM} = k \text{ (không đổi) (1)}$$

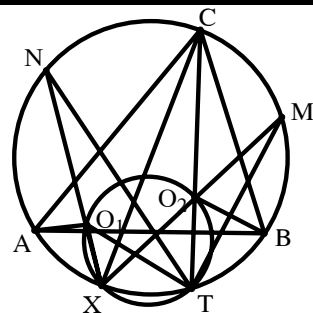
(để chứng minh được $\triangle NAO_1$ và $\triangle MO_2B$ cân tại N, M)

+ Dễ thấy $(\overrightarrow{TN}; \overrightarrow{TM}) = (\overrightarrow{TO_1}; \overrightarrow{TO_2}) = (\overrightarrow{XN}; \overrightarrow{XM}) = \alpha \pmod{2\pi}$
(không đổi) (2)

Từ (1) suy ra T thuộc đường tròn Apôlônius đường kính

E, F (E, F chia MN theo tỉ số k) (3)

Từ (2) suy ra T thuộc cung chứa góc $\alpha \pmod{2\pi}$ dựng trên đoạn MN cố định (4)



Từ (3) và (4) và do cung (α) đi qua 1 điểm nằm trong và 1 điểm nằm ngoài đường tròn Apôlônius nên chúng cắt nhau tại một điểm cố định T (khác C)

$\Rightarrow$ đpcm

Nhận xét: T chính là tâm của phép vị tự - quay góc α , tỉ số k biến M thành N

Ví dụ 4: Dựng ra phía ngoài một $\triangle ABC$ ba tam giác bất kì BCM; CAN; và ABP sao cho $\widehat{MBC} = \widehat{CAN} = 45^\circ$; $\widehat{BCM} = \widehat{NCA} = 30^\circ$; $\widehat{ABP} = \widehat{PAB} = 15^\circ$. Chứng minh rằng $\triangle MNP$ vuông cân đỉnh P.

Hướng dẫn giải:

+ Xét tích của hai phép vị tự - quay $Z_2 \circ Z_1$

trong đó $Z_1 = Z(B, \frac{\pi}{4}, k_1)$ và $Z_2 = Z(A, \frac{\pi}{4}, k_2)$

với $k_1 = \frac{BC}{BM} = \frac{AC}{AN} = \frac{1}{k_2}$ (vì $\triangle CAN$ đồng dạng với $\triangle CBM$)

+ Ta có $\triangle BMC$ cố định, $\widehat{MBC} = \frac{\pi}{4}$ nên $\begin{cases} \frac{BC}{BM} = k_1 \\ (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

do đó $Z_1 = Z(B, \frac{\pi}{4}, k_1)$: $M \mapsto C$ và $P \mapsto P_1$ ($\triangle BPP_1$ đồng dạng với $\triangle BMC$)

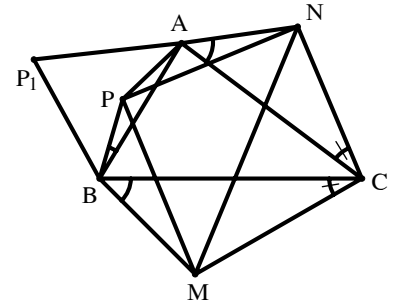
+ Lại có $\triangle CAN$ cố định, $\widehat{CAN} = \frac{\pi}{4}$ nên $\begin{cases} \frac{AN}{AC} = k_2 \\ (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AN}) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

do đó $Z_2 = Z(A, \frac{\pi}{4}, k_2)$: $C \mapsto N$ và $P_1 \mapsto P$

suy ra $Z = Z_2 \circ Z_1$: $M \mapsto N$.

Tích hai phép đồng dạng trên có tỉ số đồng dạng $k = k_2 \cdot k_1 = 1$ và $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ nên Z là phép dời hình có một điểm cố định duy nhất P.

Cụ thể là $Q_P^{\frac{\pi}{2}}$: $M \mapsto N$ nên ta có $\begin{cases} PM = PN \\ (\overrightarrow{PM}; \overrightarrow{PN}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Vậy $\triangle PMN$ là tam giác vuông cân đỉnh P.



Ví dụ 5: Dựng một tứ giác (lồi) nội tiếp ABCD biết độ dài các cạnh: $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $DA = d$, trong đó a, b, c, d là những độ dài cho trước.

Hướng dẫn giải

Phân tích: Giả sử tứ giác ABCD đã dựng được.

- 1) Chứng minh rằng I và J là các điểm cố định
- 2) Tìm quỹ tích hình chiếu vuông góc M, N của I, J trên BC. Có nhận xét gì về quỹ tích đó.

Bài 3:

Dựng một tứ giác lồi ABCD biết tổng độ lớn hai góc đối diện $\widehat{A} + \widehat{C} = \theta$ và độ dài các cạnh $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $DA = d$

Bài 4:

Cho đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ cắt nhau ở A và B. Hai động tử M_1 và M_2 xuất phát từ A lần lượt chuyển động tròn đều trên (O_1) và (O_2) theo cùng 1 hướng, sau một vòng trở lại A cùng một lúc.

- 1) Chứng minh rằng trong mặt phẳng có một điểm P duy nhất luôn cách đều M_1 và M_2 ở mọi thời điểm. (đề thi IPQ, London 1979)
- 2) Tìm quỹ tích trọng tâm G, trực tâm H của $\triangle AM_1M_2$

Bài 5: (Bài toán Napoléon)

Lấy các cạnh của $\triangle ABC$ bất kì làm đáy, dựng ra phía ngoài $\triangle ABC$ ba tam giác đều BCA' ; CAB' và ABC' . Chứng minh rằng các tâm A_0 ; B_0 ; C_0 của ba tam giác đều vừa dựng là các đỉnh của một tam giác đều.