

$$CD = l_c = \frac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b} = \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{C}{2}. \text{ Trong đó } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ là nửa chu vi.}$$

- Tam giác CAB xác định, một điểm M xác định trên đường thẳng (AB) ta luôn tính được độ dài CM theo cách tương tự.

- Điều này khiến ta liên hệ với kết quả quen thuộc trong đường tròn:

Cho một đường tròn (C) tâm O bán kính R khi đó ta có:

M ở trong đường tròn khi chỉ khi $MI - R < 0$;

M ở trên đường tròn khi chỉ khi $MI - R = 0$;

M ở ngoài đường tròn khi chỉ khi $MI - R > 0$.

Như vậy nếu một đường tròn (C) có phương trình: $f(x, y) = 0$ và một điểm $M(x_m, y_m)$.

$f(x_m, y_m) = MI^2 - R^2 = PM / (c)$ là phương tích của điểm M đối với đường tròn (C)

Trong đó I là tâm đường tròn và R là bán kính của nó; thế thì ta có:

$f(x_m, y_m) < 0$ tương ứng ta có điểm $M(x_m, y_m)$ nằm trong đường tròn.

$f(x_m, y_m) > 0$ tương ứng ta có điểm $M(x_m, y_m)$ nằm ngoài đường tròn.

$f(x_m, y_m) = 0$ tương ứng ta có điểm $M(x_m, y_m)$ nằm trên đường tròn.

Đặc biệt với hai đường tròn: $(C_1): f_1(x, y) = 0; (C_2): f_2(x, y) = 0$; không đồng tâm thì đường thẳng:

$(\Delta): f_1(x, y) = f_2(x, y)$ Chính là trục đẳng phương của hai đường tròn đó.

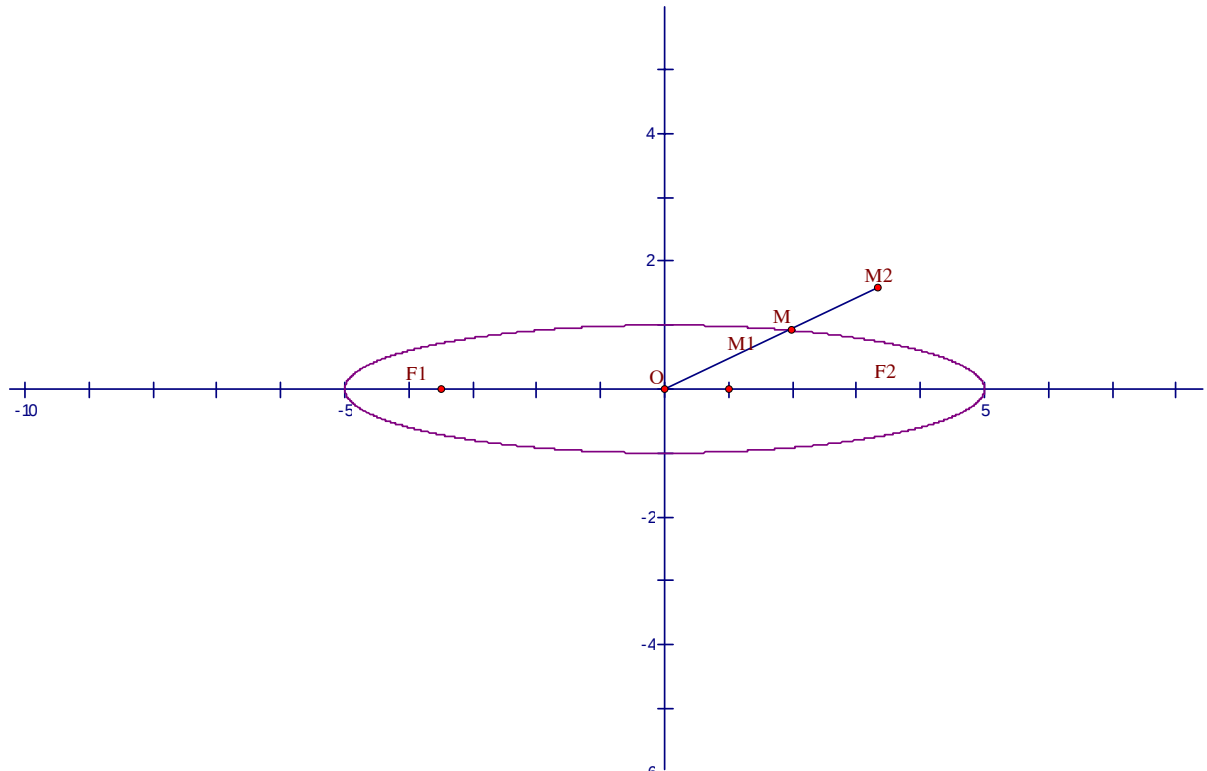
- Đối với các đường Conic ta cũng có kết quả tương tự:

Nếu gọi phương trình Elip là: $f(x, y) = 0$ và điểm $M(x_m, y_m)$ thì:

$f(x_m, y_m) < 0$ tương ứng ta có điểm $M(x_m, y_m)$ nằm trong miền chứa tiêu điểm.

$f(x_m, y_m) > 0$ tương ứng ta có điểm $M(x_m, y_m)$ nằm trong miền không chứa tiêu điểm.

$f(x_m, y_m) = 0$ tương ứng ta có điểm $M(x_m, y_m)$ nằm trên Conic.



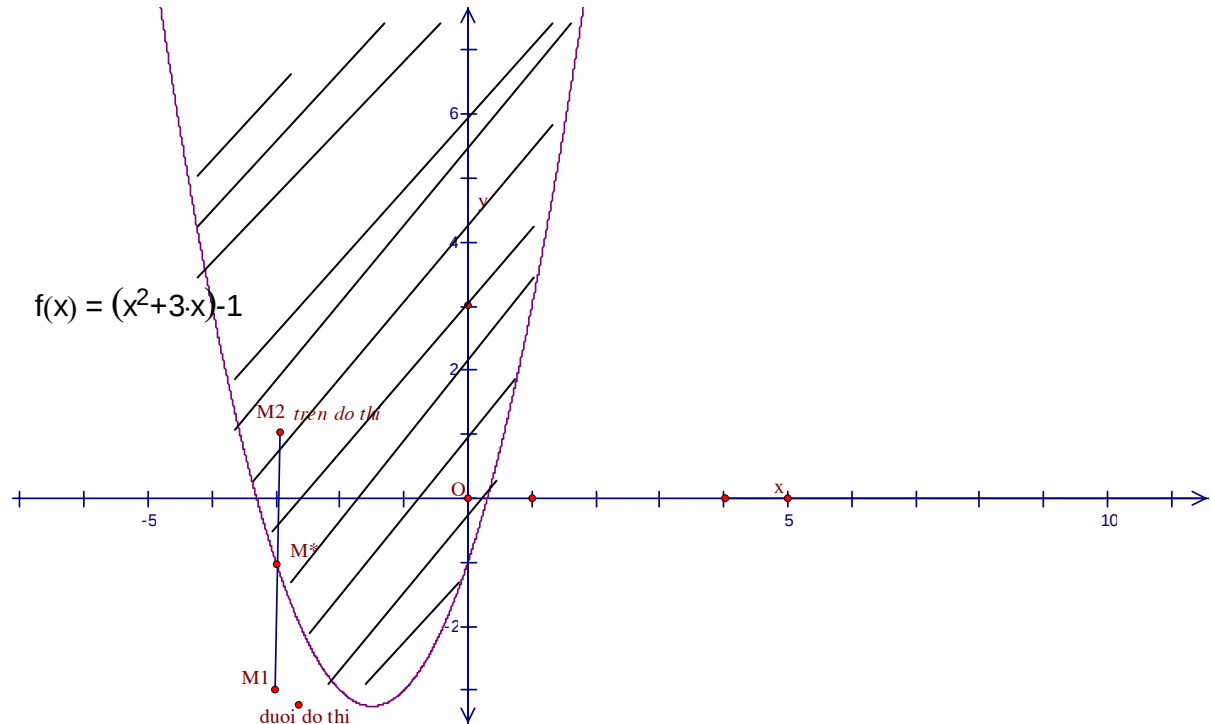
- Đối với các đồ thị hàm số cũng vậy (xem hình vẽ sau):

Gọi (C) là đồ thị hàm số: $y = f(x)$. khi đó trên mặt phẳng toạ độ tập hợp các điểm $M(x_m, y_m)$

thoả mãn: i) $y_m - f(x_m) > 0$ là miền trên đồ thị —miền gạch (ví dụ M2)

ii) $y_m - f(x_m) < 0$ là miền dưới đồ thị —miền không gạch (ví dụ M*)

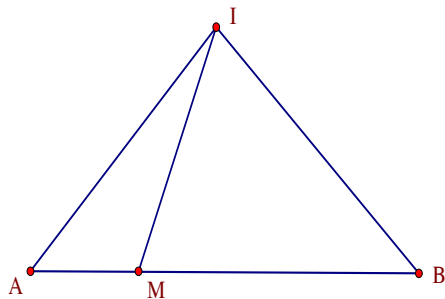
iii) $y_m - f(x_m) = 0$ là đồ thị (C) (ví dụ M1)



Ví dụ I.3:

- Trên một đoạn thẳng AB ta lấy một điểm M bất kỳ khi đó với mọi I trong không gian ta có:

$$IM \leq \text{Max}\{IA, IB\}$$



Thật vậy do tồn tại cặp $(p, q) \in \mathbb{R}^2; p + q = 1; p, q \in [0, 1]$

sao cho:

$$\overrightarrow{IM} = p\overrightarrow{IA} + q\overrightarrow{IB} \text{ nên: } IM = |\overrightarrow{IM}| \leq pIA + qIB \leq (p + q)\text{Max}\{IA, IB\} = \text{Max}\{IA, IB\}.$$

Điều này dẫn đến bài toán cực trị trên đa giác lồi:

Chẳng hạn:

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy có tam giác ABC xác định bởi giao các đường thẳng:

$$(d_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0; (d_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0; (d_3): A_3x + B_3y + C_3 = 0.$$

Điểm $M(x_m, y_m)$ thuộc miền trong tam giác ABC khi chỉ khi đồng thời có:

$$f_1(A)f_1(M) > 0; f_2(B)f_2(M) > 0; f_3(C)f_3(M) > 0. \text{ ở đây ta ký hiệu:}$$

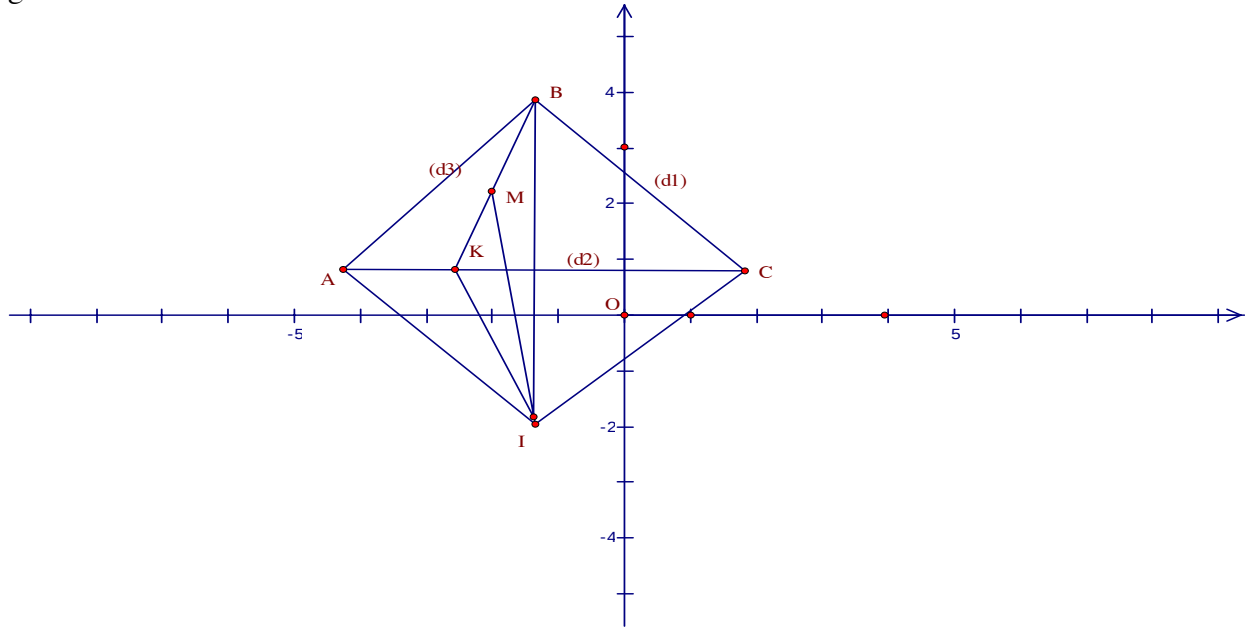
$$f_i(M) = f_i(x_m, y_m) = A_ix_m + B_iy_m + C_i.$$

Theo trên với mọi điểm I trong mặt phẳng Oxy (kể cả trong không gian):

$$IM \leq \text{Max}\{IA, IB, IC\}.$$

- Kết quả này còn có thể mở rộng cho n-giác bất kỳ (tam giác chỉ là một ví dụ).

- Kết quả này cũng có thể dùng tốt cho việc phân biệt đường phân giác ứng với góc nhọn hay tù của các góc do hai đường thẳng cắt nhau mà thành, cũng như việc phân biệt phân giác trong hay ngoài của tam giác.



- Sau đây để làm rõ vấn đề được đề cập ta xét một số bài toán cụ thể:

Bài toán 1:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y$.

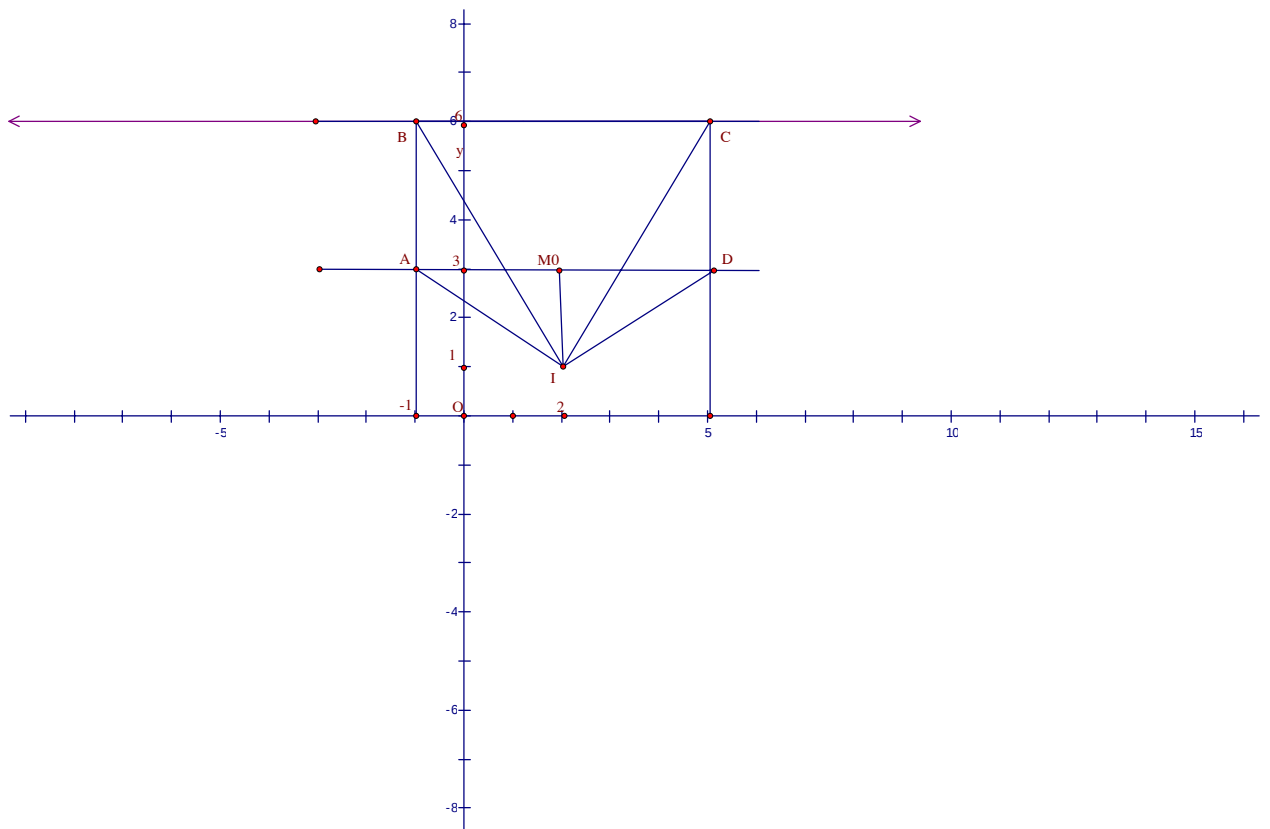
Xét trên miền: $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 5; 3 \leq y \leq 6\}$.

Lời giải:

Xét bài toán trên mặt phẳng có hệ trục Oxy, khi đó miền ràng buộc là miền hình chữ nhật có các đỉnh $A(-1, 3); B(-1, 6); C(5, 6); D(5, 3)$. Viết $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 - 5$

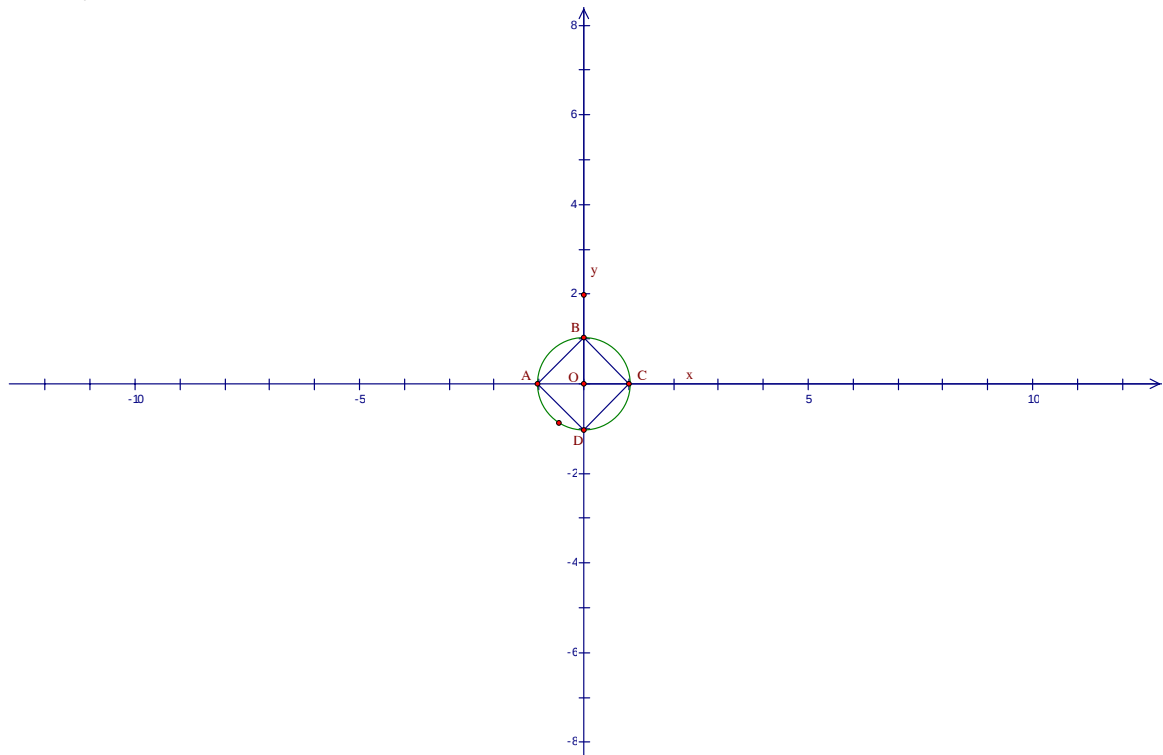
Nếu đặt $M(x, y)$ và $I(2, 1)$ thì $f(x, y) = IM^2 - 5$. Do đó

$$\min_D f(x, y) = \min_D IM^2 - 5 = -1; \max_D f(x, y) = \max\{IA^2, IB^2, IC^2, ID^2\} - 5 = 34 - 5 = 29$$



Bài toán 2:

Tìm a để mọi nghiệm bất phương trình: $|x| + |y| \leq 1$. (1) cũng là nghiệm bất phương trình: $x^2 + y^2 \leq a$ (2).



Mỗi cặp số thực (x, y) thỏa mãn bất phương trình (1) tương ứng duy nhất với một điểm $M(x, y)$ nằm trong hình vuông ABCD. Rõ ràng cần có $a > 0$ và trong điều kiện này Mỗi cặp số thực (x, y) thỏa mãn bất phương trình (2) tương ứng duy nhất với một điểm $M(x, y)$ nằm trong miền hình tròn tâm O bán kính $R = \sqrt{a}$. Do vậy a cần tìm là: $\sqrt{a} \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 1$.

Bài toán3:

Tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất:

$$P = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 + 2x + 10}.$$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } P = \sqrt{(x-1)^2 + 4} + \sqrt{(x+1)^2 + 9}$$

Trên mặt phẳng tọa độ ta xét các điểm: $M(x, 0); A(1, 2); B(-1, -3)$. Thì giá trị $P = AM + BM$.

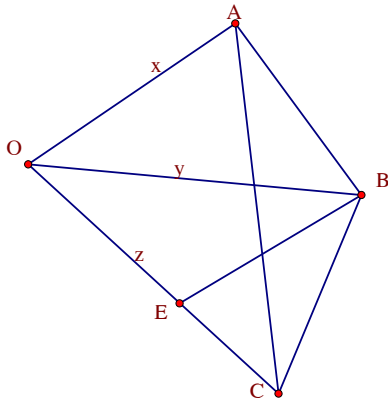
Khi x thay đổi thì điểm M chạy trên trục hoành; hai điểm $A; B$ cố định, khác phía so với trục

hoành nên: $\min P = AM^* + BM^*; M^* \equiv (AB) \cap x'Ox$ tức phải chọn $x = x^* = \frac{9}{5}$.

Bài toán4:

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$\sqrt{x^2 - xy + y^2} + \sqrt{y^2 - yz + z^2} = \sqrt{x^2 + xz + z^2}; x + y + z \leq 11..$$



Lời giải:

Đặt $OA=x; OB=y; OC=z$ và $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = 60^\circ$.

Khi đó theo định lý Cosin trong tam giác ta có:

$$AB = \sqrt{x^2 - xy + y^2}; BC = \sqrt{y^2 - yz + z^2}; AC = \sqrt{x^2 + xz + z^2}.$$

Theo hình học ta luôn có: $AB + BC \geq AC$, dấu bằng chỉ có khi chỉ khi A, B, C thẳng hàng. kẻ

$$BE \parallel OA \text{ thì: } \frac{BE}{OA} = \frac{CE}{OC} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{z-y}{z} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}, \text{ lưu ý từ giả thiết}$$

$x + y + z \leq 11; x, y, z \in N^*$ bằng phương pháp liệt kê dễ dàng có các nghiệm là:

$(2, 1, 2); (4, 2, 4); (3, 2, 6); (6, 2, 3)$.

Bài toán 5:

Cho $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ là các số thực tùy ý.

$$\text{Chứng minh rằng: } \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \geq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^2}. \quad (1)$$

Lời giải:

Xét các véc tơ: $\vec{x}_i = (a_i, b_i); i = 1, 2, \dots, n$. Khi đó: $\sum_{i=1}^n \vec{x}_i = \left(\sum_{i=1}^n a_i, \sum_{i=1}^n b_i\right)$ hiển nhiên có:

$$\sum |\vec{x}_i| \geq \left| \sum \vec{x}_i \right| \Leftrightarrow (1) \quad \text{Đpcm. Dấu bằng xảy ra khi chỉ khi các véc tơ được xét cùng phương cùng}$$

chiều, tức tồn tại $t \in \mathbb{R} : a_i = ta_1; b_i = tb_1; t \geq 0 \forall i = 2, 3, \dots, n$.

- Bằng cách này ta cũng nhận được dạng hình học của bất đẳng thức Bunhiacôpki

- Có thể thấy ngay lời giải các bài toán sau:

1. Cho các số thực thoả mãn $a + b + c = 2; ax + by + cz = 6$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{16a^2 + a^2x^2} + \sqrt{16b^2 + b^2y^2} + \sqrt{16c^2 + c^2z^2} \geq 10.$$

2. Chứng minh rằng với mọi α, β ta có:

$$\sqrt{\cos^4\alpha + \cos^4\beta} + \sin^2\alpha + \sin^2\beta \geq \sqrt{2}.$$

3. Cho các số thực bất kỳ: $a_1, a_2, \dots, a_n$ Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + (1 - a_{i+1})^2} \geq \frac{n\sqrt{2}}{2}; a_{n+1} \equiv a_1.$$

Bài toán 6: (Đề thi HSG Duyên hải Bắc bộ lần thứ nhất)

Cho một 2008 $\square$ giác có tính chất: tất cả các đỉnh có tọa độ nguyên và độ dài của tất cả các cạnh là những số nguyên. Chứng minh rằng: chu vi của đa giác là một số chẵn.

Lời giải:

Giả sử $\overrightarrow{A_i A_{i+1}} = (a_i; b_i)$ với $i = \overline{1; 2008}$ (Quy ước $A_{2009} = A_1$), trong đó $a_i; b_i$ là các số nguyên và $\sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ cũng là số nguyên với mọi $i = \overline{1; 2008}$. Ta có: Giả sử $\overrightarrow{A_i A_{i+1}} = (a_i; b_i)$ với $i = \overline{1; 2008}$ (Quy ước $A_{2009} = A_1$), trong đó $a_i; b_i$ là các số nguyên và $\sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ cũng là số nguyên với mọi $i = \overline{1; 2008}$.

Ta có:

$$\sum_{i=1}^{2008} \overrightarrow{A_i A_{i+1}} = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{2008} a_i = \sum_{i=1}^{2008} b_i = 0.$$

Do

đó

$$\sum_{i=1}^{2008} a_i^2 = -2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2008} a_i a_j; \sum_{i=1}^{2008} b_i^2 = -2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2008} b_i b_j, \text{ tức là } \sum_{i=1}^{2008} a_i^2; \sum_{i=1}^{2008} b_i^2 \text{ là các số chẵn.}$$

Kí hiệu N là chu vi tam giác, ta có N là một số nguyên dương và:

$$N^2 = \left(\sum_{i=1}^{2008} \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \right)^2 = \sum_{i=1}^{2008} (a_i^2 + b_i^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2008} \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \sqrt{a_j^2 + b_j^2}$$

Tức là N^2 là số chẵn và do đó N cũng là số chẵn.

Bài toán 7 (Đề do Hưng Yên đề nghị — kỳ thi HSG Duyên hải Bắc bộ lần thứ nhất)

Cho tam giác ABC cố định. MNPQ là hình chữ nhật thay đổi sao cho M, N thuộc đường thẳng BC. P thuộc cạnh AC, Q thuộc cạnh AB. Tìm tập hợp tâm của hình chữ nhật.

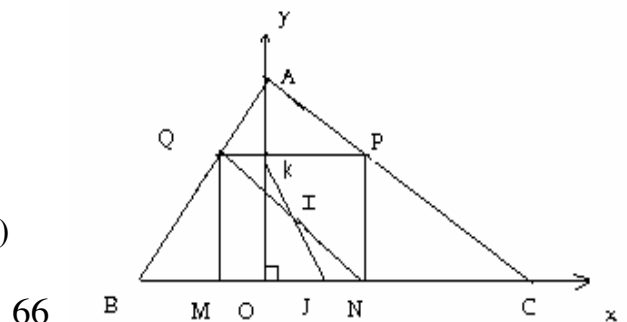
Lời giải:

Chọn hệ Oxy sao cho O là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC, $A \in Oy$. B, C thuộc trục hoành, chiều dương của trục hoành từ B đến C.

Giả sử $A(0; a)$ $a > 0$, $B(b; 0)$, $C(c; 0)$.

$$\bullet \frac{AQ}{AB} = \frac{AP}{AC} = p \quad 0 < p < 1.$$

$$\overrightarrow{AQ} = p \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AQ}(pb; -pa) \Rightarrow Q(pb; a - pa)$$



$$\bullet \frac{CN}{CO} = \frac{CP}{CA} = 1 - p \Rightarrow \overrightarrow{CN} = (1 - p)\overrightarrow{CO}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CN}(cp - c; 0) \Rightarrow N(cp; 0)$$

$$I \text{ là trung điểm } QN \Rightarrow I\left(\frac{p(b+c)}{2}; \frac{(1-p)a}{2}\right) \quad (1) \quad \text{Do } p \in (0; 1) \Rightarrow y_I = \frac{(1-p)a}{2} \in \left(0; \frac{a}{2}\right).$$

• Nếu tam giác ABC cân tại A $\Rightarrow I\left(0; \frac{(1-p)a}{2}\right); I \in [KO]$ với K là trung điểm OA; $I \neq K; I \neq O$.

• Nếu tam giác ABC không cân tại A. Từ (1) ta có I thuộc đường thẳng Δ có phương trình:

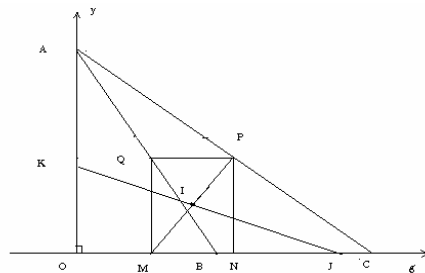
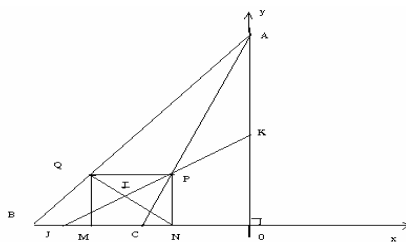
$$\frac{x}{b+c} + \frac{y}{a} = \frac{1}{2}. \Delta \text{ cắt trục tung tại } K\left(0; \frac{a}{2}\right) \text{ (K là trung điểm OA), } \Delta \text{ cắt trục hoành tại } J\left(\frac{b+c}{2}; 0\right).$$

$$I \in [KO] \text{ với } I \neq K; I \neq J.$$

KL: Tập hợp tâm I của hình chữ nhật MNPQ là đoạn KJ bỏ đi hai đầu mút, với K là trung điểm AO, J thuộc BC được xác định cụ thể như sau:

+) Nếu $C \geq 90^\circ$; J nằm giữa O, B: $OJ = \frac{OB + OC}{2}$; Nếu $B \geq 90^\circ$; J nằm giữa O; C: $OJ = \frac{OB + OC}{2}$;

+) Nếu $B < C < 90^\circ$; J nằm giữa O, B: $OJ = \frac{OB - OC}{2}$; Nếu $C < B < 90^\circ$; J nằm giữa O; C: $OJ = \frac{OC - OB}{2}$.



- Các kết quả nêu trên giúp ích rất lớn trong các bài toán cực trị đại số hay hình học kể cả trong mặt phẳng hay trong không gian, xử lý các bài toán biện luận định tính trong vấn đề phương trình, bất phương trình, hệ phương trình, hệ bất phương trình, dài hơn là các bài toán cực trị và tối ưu.
- Sau đây chúng ta xét một số tìm tòi trong lĩnh vực rất được quan tâm: Bất đẳng thức.

Bài toán 8 (Đề do Quảng ninh đề nghị thi HSG Duyên hải Bắc bộ lần thứ nhất)

Cho nửa đường tròn tâm O bán kính bằng 1. Trên nửa đường tròn này người ta lấy n điểm:

$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, n là một số tự nhiên lẻ không nhỏ hơn 1.

Chứng minh rằng: $|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + \dots + \overrightarrow{OP_n}| \geq 1$.

Lời giải:

+) Đặt $n=2k-1$. Chọn trục OP_k và véc tơ $\overrightarrow{OP_k}$ là véc tơ đơn vị của trục. $\overrightarrow{OP_k} = 1$.

+) Chiều các véc tơ $\overrightarrow{OP_i}; i = 1, 2, \dots, n$ lên trục ta nhận được các hình chiếu là $\overline{OP_i}$ và chú ý rằng hình chiếu của véc tơ tổng $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OP_i}$ chính là $\overline{OP} = \sum_{i=1}^n \overline{OP_i}$.

Gọi AB là đường kính của nửa đường tròn, A_1, B_1 là các hình chiếu của A, B trên trục.

+) Ta có $\overline{OP_i} \geq \overline{OA_1}; \forall i = 1, 2, \dots, k-1$. Và: $\overline{OP_j} \geq \overline{OB_1}; \forall j = k+1, k+2, \dots, 2k-1$.

Hơn nữa $\overline{OA_1} < 0 < \overline{OB_1}; \overline{OA_1} + \overline{OB_1} = 0$.

+) Từ $|\vec{v}| \geq |\overline{OP}| = \left| \sum_{i=1}^{2k-1} \overline{OP_i} \right| \geq (k-1)(\overline{OA_1} + \overline{OB_1}) + \overline{OP_k} = 1$. (Đpcm).

Bài toán 9

Cho n là một số tự nhiên không nhỏ hơn 3. chứng minh tồn tại một tập hợp gồm n điểm thoả mãn đồng thời các điều kiện:

- Ba điểm bất kỳ trong chúng không thẳng hàng;
- Khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trong chúng là một số vô tỷ;
- Diện tích của tam giác bất kỳ thành lập từ ba điểm bất kỳ trong chúng là một số vô tỷ.

Lời giải:

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy xét các điểm $A_i(i, i^2); i = 1, 2, \dots, n$. Ta sẽ chứng minh đây là bộ điểm thoả mãn yêu cầu đặt ra.

i) Giả sử có ba điểm thẳng hàng $A_k, A_l, A_m; k < l < m$ khi đó ta có:

$\overrightarrow{A_k A_l} = (l-k, l^2-k^2); \overrightarrow{A_l A_m} = (m-l, m^2-l^2)$; do tính thẳng hàng ta có:

$$\frac{m-l}{l-k} = \frac{m^2-l^2}{l^2-k^2} \Leftrightarrow m = k \text{ điều này vô lý vì } k < m.$$

ii) Ta có $A_k A_l = \sqrt{(k-l)^2 + (k^2-l^2)^2}$ giả sử khoảng cách này là một số hữu tỷ thì sẽ tồn tại

$$\frac{p}{q} \text{ tối giản sao cho: } A_k A_l = \sqrt{(k-l)^2 + (k^2-l^2)^2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = (k-l)^2 (1 + (k+l)^2);$$

để ý là $p^2 : q^2; (p, q) = 1 \Rightarrow q = 1$ và p là số nguyên dương, bằng cách phân tích tiêu chuẩn ra các thừa số nguyên tố ta suy ra:

$\exists a \in \mathbb{N}^*: a^2 = 1 + (l+k)^2 \Rightarrow 1 = (a-k-l)(a+k+l) > 0$ nên $a+k+l \geq 4 \Rightarrow 1 \geq 4$ vô lý!

iii) Xét một tam giác bất kỳ có các đỉnh lấy từ các điểm đó:

$A(a, a^2); B(b, b^2); C(c, c^2); a < b < c; a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Gọi

$E(a, c^2); F(b, a^2); K(c, c^2)$; Khi đó ta có:

$[ABC] = [AKCE] - [AEC] - [ABF] - [FBCK]$ ta ký hiệu $[\Omega]$ là diện tích miền Ω .

iv) Vậy ta có:

$$[ABC] =$$

$$= (c-a)(c^2-a^2) - \frac{1}{2}(c-a)(c^2-a^2) - \frac{1}{2}(b-a)(b^2-a^2) - \frac{1}{2}(c-b)(c^2+b^2-2a^2)$$

$= s \in \mathbb{Q}$ do a, b, c đều là các số nguyên dương.

Sau đây tôi nêu lên một số ví dụ áp dụng hai hàm số trên (kể cả trường hợp suy biến) để giải toán.

I) Ta chú ý đến một số kết quả sau:

1. Hàm số $f(x)$ luôn đồng biến, hoặc luôn nghịch biến, hoặc không đổi trên $[\alpha, \beta]$ thì:

$$\text{Max}_{[\alpha, \beta]} |f(x)| = \text{Max} \{|f(\alpha)|, |f(\beta)|\}$$

$$[\alpha, \beta]$$

2. $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

$$\text{Max}_{[\alpha, \beta]} |f(x)| = \begin{cases} \text{Max} \{|f(\alpha)|, |f(\beta)|\} & \text{Khi } \frac{-b}{2a} \notin (\alpha, \beta) \\ \text{Max} \{|f(\alpha)|, |f(\beta)|, |f(\frac{-b}{2a})|\} & \text{Khi } \frac{-b}{2a} \in (\alpha, \beta) \end{cases}$$

3. $\text{Max}_{X_i \in D_i} |f(x_1, x_2, \dots, x_n)| \geq \text{Max}(\text{Max}_{x_1 \in D_1} \dots (\text{Max}_{x_n \in D_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \dots)$

$$X_i \in D_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad x_1 \in D_1 \quad x_2 \in D_2 \quad x_n \in D_n$$

II) Các bài toán được chia làm 3 loại

A- Các bài toán ứng dụng hàm bậc nhất và suy biến

B- Các bài toán ứng dụng hàm bậc hai và suy biến

C- Các bài toán ứng dụng phối hợp hai hàm số trên.

A Các bài toán ứng dụng hàm $y = ax + b$

Bài toán 1 (đề thi vô địch KIEP)

Chứng minh rằng với bất cứ a, b nào cũng tìm được $x, y \in [0, 1]$ để

$$|xy - ax - by| \geq \frac{1}{3}$$

Giải: Bài này đã có nhiều sách đưa lời giải nhưng các lời giải đều mang tính chất áp đặt. Với cách giải như vậy là không cho ta cách mở rộng được bài toán, đồng thời cũng không cho ta cách tìm thấy số $\frac{1}{3}$. Sau đây tôi đưa ra cách giải sử dụng tính chất hàm $y = ax + b$, và qua đó cho ta ra thêm

hàng loạt các bài toán dạng này.

$$\text{Max}_{x, y \in [0, 1]} |xy - ax - by| \geq \text{Max} \{|a|, |b|, |a+b-1|\} \geq \frac{1}{3} |a+b-a-b+1| = \frac{1}{3}$$

Bài toán 2: Cho số thực α, β, b ($\alpha < \beta$) Tìm a để

$\text{Max}_{x \in [\alpha, \beta]} |ax + b|$ Có giá trị bé nhất

$$x \in [\alpha, \beta]$$

Giải: $\text{Max}_{x \in [\alpha, \beta]} |ax + b| = \text{Max} \{|a\alpha + b|, |a\beta + b|\} \geq$

$$x \in [\alpha, \beta]$$

$$\geq \frac{|a\alpha\beta + b\beta| + |a\alpha\beta + b\alpha|}{|\alpha| + |\beta|} \geq \frac{|b| |\beta - \alpha|}{|\alpha| + |\beta|}$$

$$\text{Cú } \square\square \text{ ng th } \square \text{c} \quad \left\{ \begin{array}{l} |a\alpha + b| = |a\beta + b| \quad (1) \\ \alpha\beta (a\alpha + b) (-a\beta - b) \geq 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

*) Nếu $\alpha\beta \geq 0$ (2) $\Leftrightarrow (a\alpha + b)(-a\beta - b) \geq 0$ khi đó

$$(1) \Rightarrow a\alpha + b = -a\beta - b \Leftrightarrow a = \frac{-2b}{\alpha + \beta}$$

*) Nếu $\alpha\beta \leq 0$ (2) $\Leftrightarrow (a\alpha + b)(-a\beta - b) \leq 0$ Khi đó

$$(1) \Rightarrow a\alpha + b = a\beta + b \Leftrightarrow a = 0$$

Vậy Max $|ax + b|$ bé nhất bằng $\frac{|b| |\beta - \alpha|}{|\alpha| + |\beta|} \left[\begin{array}{l} \text{Khi } \alpha\beta \geq 0 \text{ và } a = \frac{-b}{\alpha + \beta} \\ \text{khi } \alpha\beta \leq 0 \text{ và } a = 0 \end{array} \right.$

Max $|ax + b|$ bé nhất bằng $\frac{|b| |\beta - \alpha|}{|\alpha| + |\beta|}$

$[\alpha, \beta]$

Bài toán 3: Cho hai số α và β xét các hàm số

$$f(x) = a^2x + \alpha a + \beta$$

Xác định a để Max $|f(x)|$ nhỏ nhất

$$x \in [-1, 1]$$

Giải:

trường hợp 1: $\beta \geq 0$

A) Nếu $\alpha^2 - 2\beta > 0$ ta chọn $k > 0$ sao cho

$$\frac{\alpha(1-k)}{2(1+k)} = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow k = \frac{\alpha^2 + 2\beta}{\alpha^2 - 2\beta} > 0$$

$$\text{Max } |f(x)| = \text{Max } \{|a^2 + \alpha a + \beta|; |a^2 - \alpha a - \beta|\} \geq$$

$$x \in [-1, 1]$$

$$\geq \frac{1}{k+1} |ka^2 + k\alpha a + k\beta + a^2 - \alpha a - \beta| =$$

$$= |a^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}a + 2\frac{\beta^2}{\alpha^2}| = (a + \frac{\beta}{\alpha})^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \geq \frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

$$\text{có đẳng thức} \Leftrightarrow a = -\frac{\beta}{\alpha}$$

B) nếu $\alpha^2 - 2\beta \leq 0$

$$\Rightarrow \text{Max } |f(x)| = \text{Max } \{|a^2 + \alpha a + \beta|, |a^2 - \alpha a - \beta|\}$$

$[\alpha, \beta]$

Ta chứng minh Max $|f(x)|$ bé nhất là $\beta - \frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow a = -\frac{\alpha}{2}$

$$\begin{aligned}\text{Thật vậy với } a = -\frac{\alpha}{2} &\Rightarrow \text{Max} \{|a^2 + \alpha a + \beta|, |a^2 - \alpha a - \beta|\} \\ &= \text{Max} \left\{ \beta - \frac{\alpha^2}{4}; \left| \frac{3\alpha^2}{4} - \beta \right| \right\} = \beta - \frac{\alpha^2}{4}\end{aligned}$$

$$\text{do } \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4} \right) - \left| \frac{3\alpha^2}{4} - \beta \right| = \begin{cases} 2\beta - \alpha^2 \geq 0 \\ \frac{\alpha^2}{2} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{Mặt khác } \text{Max} \{|a^2 + \alpha a + \beta|, |a^2 - \alpha a - \beta|\} &\geq |a^2 + \alpha a + \beta| = \\ &= \left| \left(a + \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4} \right| \geq \beta - \frac{\alpha^2}{4} \text{ có } \Leftrightarrow a = -\frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \beta \geq 0 \text{ thì } \text{Max} |f(x)| \text{ bé nhất} = \begin{cases} \frac{\beta^2}{\alpha^2} \text{ khi } \alpha^2 - 2\beta \geq 0, \beta \geq 0 & \text{Và } a = -\frac{\beta}{\alpha} \\ \beta - \frac{\alpha^2}{4} \text{ khi } \alpha^2 - 2\beta \leq 0, \beta \geq 0 & \text{Và } a = -\frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

trường hợp 2: $\beta < 0$

$$\beta < 0 \text{ do } \text{Max}|f(x)| = \text{Max}|a(-x) + (-\alpha)a + (-\beta)|$$

$$\text{Áp dụng kết quả của trường hợp 1 với } \begin{cases} \alpha \text{ là } -\alpha \\ \beta \text{ là } -\beta > 0 \end{cases}$$

Vậy ta có kết luận chung

$$\text{Max}|f(x)| \text{ bé nhất} = \begin{cases} \frac{\beta^2}{\alpha^2} \text{ khi } \alpha^2 - 2|\beta| > 0 \text{ và } a = -\frac{\alpha}{\beta} \\ |\beta| - \frac{\alpha^2}{4} \text{ khi } \alpha^2 - 2|\beta| \leq 0 \text{ và } a = -\frac{|\beta|}{2\beta}\alpha \end{cases}$$

Bây giờ ta lại xét bài toán 2 ở trên với điều kiện

$$\alpha^2 - 2\beta > 0, \beta > 0 \text{ nhưng } a = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ (vô nghiệm) (xét bài 4)}$$

$$\text{Hoặc } \alpha^2 - 2\beta \leq 0, \beta > 0 \text{ và phương trình } a = 0 \text{ vô nghiệm (xét bài 5)}$$

Bài toán 4: Cho $0 < \alpha < \beta$ và $\alpha + \beta < \frac{25}{8}$

$$\text{Xét các hàm số } f(x) = \left(a^2 + 2a + \frac{9}{25} \right)x + 1$$

Tìm a để $\text{Max} |f(x)|$ nhỏ nhất

$$[\alpha, \beta]$$

Giải: Đề ý rằng với điều kiện $0 < \alpha < \beta$ và $\alpha + \beta < \frac{25}{8}$ thì

$$\text{Phương trình } a^2 + 2a + \frac{9}{25} = \frac{-2}{\alpha + \beta} \text{ (vô nghiệm ẩn a)}$$

Nên kết quả bài 2 không thỏa mãn

$$*) \text{ Nếu } a^2 + 2a + \frac{9}{25} = 0 \Leftrightarrow a \in \left\{-\frac{1}{5}, -\frac{9}{5}\right\} \Rightarrow f(x) = 1$$

$$*) \text{ Nếu } a^2 + 2a + \frac{9}{25} > 0 \Rightarrow f(x) > 1$$

$$*) \text{ với } a^2 + 2a + \frac{9}{25} < 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{5} < a < -\frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} +) f(\alpha) &= (a^2 + 2a + \frac{9}{25})\alpha + 1 > (a^2 + 2a + \frac{9}{25})\frac{25}{16} + 1 = \\ &= [(a+1)^2 - \frac{16}{25}]\frac{25}{16} + 1 \geq 0 \text{ do } \alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{25}{16} \\ &\Rightarrow |f(\alpha)| = f(\alpha) = [(a+1)^2 - \frac{16}{25}]\alpha + 1 \geq 1 - \frac{16}{25}\alpha \end{aligned}$$

Có đẳng thức $\Leftrightarrow a = -1$

$$+) \text{ nếu } \beta \leq \frac{25}{16} \Rightarrow f(\beta) \geq f(\frac{25}{16}) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\alpha) > f(\beta) > 0 \Rightarrow \text{Max}_{[\alpha, \beta]} |f(x)| = f(\alpha) \geq 1 - \frac{16}{25}\alpha \\ \text{đạt} \Leftrightarrow a = -1 \end{aligned}$$

$$+) \text{ Nếu } f(\beta) \leq 0 \Rightarrow \beta \geq \frac{25}{16} \Rightarrow |f(\beta)| = -f(\beta) =$$

$$= -1 - [(a+1)^2 - \frac{16}{25}]\beta = f_1$$

$$\text{do } \frac{25}{16} \leq \beta < \frac{25}{8} - \alpha \Rightarrow f_1 \leq 1 - [(a+1)^2 - \frac{16}{25}](\frac{25}{8} - \alpha) =$$

$$= 1 - \frac{16}{25}\alpha - (a+1)^2(\frac{25}{8} - \alpha) \leq 1 - \frac{16}{25}\alpha \leq f(\alpha)$$

Vậy $\text{Max}_{[\alpha, \beta]} |f(x)| \geq 1 - \frac{16}{25}\alpha$ có đẳng thức $\Leftrightarrow a = -1$

$[\alpha, \beta]$

Bài toán 5: $f(x) = (a^2 + 1)x - 1$ cho $\alpha < 0 < \beta$

Tìm a để $\text{Max}_{[\alpha, \beta]} |f(x)|$ bé nhất

$[\alpha, \beta]$

Giải: Trường hợp này $a^2 + 1 = 0$ vô nghiệm nên giải như bài 2 không được

$$\begin{aligned} M = \text{Max}_{[\alpha, \beta]} |f(x)| &= \text{Max}\{|f(\alpha)|; |f(\beta)|\} = \text{Max}\{|(a^2 + 1)\alpha - 1|; |(a^2 + 1)\beta - 1|\} \\ &[\alpha, \beta] \end{aligned}$$

$$*) f(\alpha) = |(a^2 + 1)\alpha - 1| = 1 - \alpha(a^2 + 1) = 1 + (a^2 + 1)|\alpha| \geq 1 + |\alpha|$$

$$\text{Nếu } M = |f(\beta)| = |(a^2 + 1)\beta - 1| \Rightarrow M \geq 1 + |\alpha| \text{ nên}$$

$$M = |(a^2+1)\beta - 1| = (a^2+1)\beta - 1 \geq \beta - 1 \geq 1 + |\alpha| \Leftrightarrow \beta \geq 2 + |\alpha|$$

Vậy $\beta \geq 2 + |\alpha| \Rightarrow M$ bé nhất là $\beta - 1 \Leftrightarrow a = -1$

Còn $\beta < 2 + |\alpha| \Rightarrow M$ bé nhất là $|\alpha| + 1 \Leftrightarrow a = -1$

Vậy M bé nhất = $\text{Max} \{ \beta - 1; |\alpha| + 1 \} \Leftrightarrow a = -1$

Bài toán 6: Cho $0 < a_1 < a_2 < a_3$; $\frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_2} < \frac{b_3}{a_3}$

$$f(x) = \text{Max} \{ |a_1x - b_1|; |a_2x - b_2|; |a_3x - b_3| \}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

tìm $\text{Min } f(x)$

$$x \in \mathbb{R}$$

Giải:

$$*) \text{ Phương trình } -a_3x + b_3 = a_1x - b_1 \Leftrightarrow x = x_1 = \frac{b_1 + b_3}{a_1 + a_3} \quad (1)$$

$$*) \text{ Phương trình } -a_3x + b_3 = a_2x - b_2 \Leftrightarrow x = x_2 = \frac{b_2 + b_3}{a_2 + a_3} \quad (2)$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \frac{b_1}{a_1} < x_1 < \frac{b_3}{a_3} \text{ V } \text{ nó } \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} < \frac{b_3}{a_3} \\ \frac{b_2}{a_2} < x_2 < \frac{b_3}{a_3} \text{ V } \text{ nó } \Leftrightarrow \frac{b_2}{a_2} < \frac{b_3}{a_3} \end{cases} \quad (3)$$

Ta xét 2 trường hợp

I) $x_2 \geq x_1$ Ta chứng minh $\text{Min } f(x) = |a_1x_1 - b_1|$

$$x \in \mathbb{R}$$

a) Ta chứng minh $f(x_1) = |a_1x_1 - b_1|$

$$\text{Do (3)} \Rightarrow |a_1x_1 - b_1| = a_1x_1 - b_1 = -a_3x_1 + b_3 = |a_3x_1 - b_3|$$

$$\text{Ta chứng minh } |a_1x_1 - b_1| > |a_2x_1 - b_2|$$

$$*) a_1x_1 - b_1 \geq -a_2x_1 + b_2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{b_1 + b_3}{a_1 + a_3} > \frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2} \Leftrightarrow a_2b_1 + a_1b_3 > a_1b_2 + a_3b_1 + a_3b_2$$

$$\Leftrightarrow (a_1b_3 - a_3b_1 + a_2b_1 - a_1b_2) + (a_2b_3 - a_3b_2) > 0 \text{ đúng}$$

$$\text{Do } \frac{b_3}{a_3} - \frac{b_1}{a_1} > \frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1} \Leftrightarrow a_1b_3 - a_3b_1 > \frac{a_3}{a_2}(a_1b_2 - a_2b_1) > a_1b_2 - a_2b_1$$

$$*) |a_1x_1 - b_1| = a_1x_1 - b_1 = -a_3x_1 + b_3 \geq -a_3x_2 + b_3 = a_2x_2 - b_2 \geq a_2x_1 - b_2$$

$$\text{Vậy } f(x_1) = |a_1x_1 - b_1|$$

b) Ta chứng minh $f(x) \geq f(x_1) \forall x \in \mathbb{R}$

$$*) x < x_1 \Rightarrow -a_3x + b_3 > -a_3x_1 + b_3 = a_1x_1 - b_1 = f(x_1)$$

$$*) x > x_1 \Rightarrow a_1x - b_1 > a_1x_1 - b_1 = f(x_1)$$

$$\text{Vậy Min } f(x) = |a_1x_1 - b_1| = \left(\frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_1 + a_3} \right) \\ X \in \mathbb{R}$$

$$\text{II) } x_1 \geq x_2$$

$$\text{a) Ta chứng minh } f(x_2) = |ax_2 - b_2|$$

$$|a_2x_2 - b_2| = a_2x_2 - b_2 = -a_3x_2 + b_3 = |a_3x_2 - b_3|$$

$$|a_2x_2 - b_2| > |a_1x_2 - b_1| \text{ đúng do}$$

$$|a_2x_2 - b_2| = a_2x_2 - b_2 = -a_3x_2 + b_3 > -a_3x_1 + b_3 = a_1x_1 - b_1 > a_1x_2 - b_2 >$$

$$> a_1 \frac{b_1}{a_1} - b_2 > 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) = |ax_2 - b_2|$$

$$\text{b) Ta chứng minh } f(x) \geq f(x_2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Nếu } x \geq x_2 \Rightarrow f(x) \geq |a_2x - b_2| = a_2x - b_2 \geq |a_2x_2 - b_2|$$

$$x < x_2 \Rightarrow f(x) \geq |-a_3x + b_3| = -a_3x + b_3 > -a_3x_2 + b_3 = |a_2x_2 - b_2|$$

$$\text{Vậy Min } f(x) = \text{Max} \{f(x_1); f(x_2)\} = \text{Max} \left\{ \left| \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_1 + a_3} \right|, \left| \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_2 + a_3} \right| \right\} \\ X \in \mathbb{R}$$

Bài toán 7: $f(x, y) = x + y + xy^2 - ax - by$. Tìm a, b để Max $|f(x, y)|$ bé nhất
 $x, y \in [0, 1]$

Bài này có thể yêu cầu cao hơn các bài trên là phải tìm giá trị bé nhất của hàm số $|f(x, y)|$

$$\text{Max } |f(x, y)| \geq \text{Max} \{|a|; |b|; |2-a-b|\} \geq \frac{1}{3} |a+b+2-a-b| = \frac{2}{3} \\ x, y \in [0, 1]$$

$$\text{Với } a = b = \frac{2}{3} \Rightarrow |f(x, y)| = |(x+y)(xy - \frac{2}{3})|$$

$$\text{a) Nếu } xy \geq \frac{2}{3} \text{ do } x, y \in [0, 1] \text{ nên } |(x+y)(xy - \frac{2}{3})| = (x+y)(xy - \frac{2}{3}) \leq$$

$$\leq (1+1)(1 - \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$$

$$\text{b) Nếu } xy < \frac{2}{3} \Rightarrow (1-x)(1-y) \geq 0 \Leftrightarrow x+y \leq 1+xy$$

$$\Rightarrow 0 \geq (x+y)(xy - \frac{2}{3}) \geq (1+xy)(xy - \frac{2}{3})$$

$$\Rightarrow |(x+y)(xy - \frac{2}{3})| \leq |(1+xy)(xy - \frac{2}{3})| = (1+xy)(\frac{2}{3} - xy) =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}xy - (xy)^2 \leq \frac{2}{3} \Rightarrow \text{Max } |f(x,y)| \text{ bé nhất là } \frac{2}{3} \quad x,y \in [0,1]$$

SAU ĐÂY LÀ CÁC BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ

Bài toán 8: Chứng minh rằng với bất cứ a, b, c, d, p, q nào ta cũng tìm được x,y,z thuộc đoạn [0,1]

để $|xyz - axy - byz - czx - dx - py - qz| \geq \frac{1}{7}$

Bài toán 9: Chứng minh rằng với mỗi mười bốn số thực $a_1, a_2, \dots, a_{14}$ nào ta cũng tìm được x, y, z, t thuộc [0,1] để

$$|xyzt - a_1xyz - a_2xyt - a_3yzt - a_4ztx + a_5xy - a_6xz - a_7xy - a_8yz - a_9yt - a_{10}zt +$$

$$- a_{11}x - a_{12}y - a_{13}z - a_{14}t| \geq \frac{1}{15}$$

Bài toán 10: Cho $0 < a < b$, $m \geq 2$, $m \in \mathbb{Z}$

Các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ không âm và không thuộc khoảng (a, b) các số $b_1, b_2, \dots, b_k$ đều thuộc

đoạn $[a, b]$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^k b_j$

a) Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^n \sqrt[m]{a_i} \leq \sum_{j=1}^k \sqrt[m]{b_j}$

b) Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^n a_i^\alpha \geq \sum_{j=1}^k b_j^\alpha \quad (\alpha \geq 1)$

Bài toán 11: Cho $a_1 < a_2 < \dots < a_n$

$$f(x) = \text{Max } \{|x-a_1|, |x-a_2|, \dots, |x-a_n|\}$$

Tìm Min $f(x)$

$$x \in \mathbb{R}$$

Bài toán 12 cho $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$

$$\frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_2} < \dots < \frac{b_n}{a_n}$$

$$f(x) = \text{Max } \{|a_i x - b_i| \mid (i = 1, 2, \dots, n)\}$$

Tìm Min $f(x)$

$$x \in \mathbb{R}$$

Trên đây là một số bài toán áp dụng tính chất của hàm $y = ax + b$ để giải. Còn 2 phần nữa xin được trao đổi cùng các bạn ở chuyên đề sau.

Ninh Bình, Ngày 10 tháng 10 năm 2008

PHÉP BIẾN HÌNH TRONG HÌNH HỌC PHẪNG

TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ NAM

Phần I: Đặt vấn đề

Trong chuyên đề hình học phẳng sử dụng phép biến hình trong hình học phẳng là một phần kiến thức rất quan trọng. Sau đây là nội dung bài soạn của tôi khi dạy về các phép biến hình trong mặt phẳng.

Phần II: Nội dung

A. Phép đối xứng tâm, đối xứng trục, tịnh tiến.

I. Phép đối xứng tâm

1. Định nghĩa: $\mathcal{D}_O : M \rightarrow M'$

$$\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM'}$$

2. Tính chất:

- a. $\mathcal{D}_O$ biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng.
- b. $\mathcal{D}_O$ biến đường thẳng thành đường thẳng // hoặc trùng với đường thẳng ban đầu.
- c. Biến đoạn EF thành E'F': $EF = E'F'$
- d. Góc xSy thành góc x'S'y' và góc x'S'y' = góc x'S'y'.
- e. $\mathcal{D}_O$ là phép biến đổi 1 - 1
- h. Do: $A \rightarrow A'$

$$B \rightarrow B'$$

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$$

II. Phép đối xứng trục

1. Định nghĩa:

$$\mathcal{D}_d : M \rightarrow M'$$

$$MM' \perp d \text{ tại } H$$

$$\overrightarrow{MH} = -\overrightarrow{HM'}$$

2. Tính chất

Giống như phép đối xứng trục

III. Phép tịnh tiến:

1. Định nghĩa:

$$\text{Cho } \vec{v} \neq \vec{0}$$

$$T_{\vec{v}} : M \rightarrow M'$$

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$$

2. Tính chất:- Giống như phép đối xứng tâm, đối xứng trục

- Phép $T_{\vec{v}}$ không có điểm bất động.

IV. Bài tập áp dụng

Bài tập 1: Cho tam giác ABC và đường tròn O. Trên cạnh AB lấy 1 điểm E sao cho $BE = 2AE$ gọi F là trung điểm AC và I là đỉnh thứ 4 của hình bình hành AEIF. Với mỗi điểm P trên đường tròn (O) dựng Q sao cho $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = 6\overrightarrow{IQ}$. Tìm tập hợp Q khi P thay đổi.

*** Hướng dẫn học sinh**

+ Xác định điểm K cố định t/c: $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$

+ Chứng minh $K \equiv I$

+ Đ1: $P \rightarrow Q$ vậy Q thuộc đường tròn là ảnh (O)

*** Lời giải:**

Gọi K là điểm thoả mãn:

$$\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$$

$$6\overrightarrow{KA} = -(2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Ta có

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AI} \rightarrow I \equiv K$$

$$\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = 6\overrightarrow{IQ}$$

Từ

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = 6\overrightarrow{IQ}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{QI} = \vec{0} \rightarrow \text{là trung điểm PQ}$$

$\rightarrow$ Đ: $P \rightarrow Q$

OP thuộc đường tròn

$\rightarrow Q \in$ đường tròn là ảnh của (O) qua Đ1

Bài tập 2: Cho hình bình hành ABCD và đường tròn (γ) bàng tiếp của tam giác ABD tiếp xúc với phần kéo dài AB và AD tương ứng tại M, N. Đoạn thẳng MN cắt BC, DC tương ứng tại P và Q. Chứng minh đường tròn nội tiếp tam giác BCD tiếp xúc BC, DC tại P và Q.

*** Hướng dẫn học sinh:**

+ Chứng minh $BH = DK$

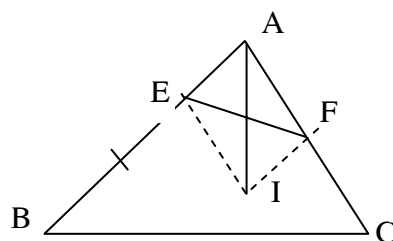
Có Đ1: $B \rightarrow D$

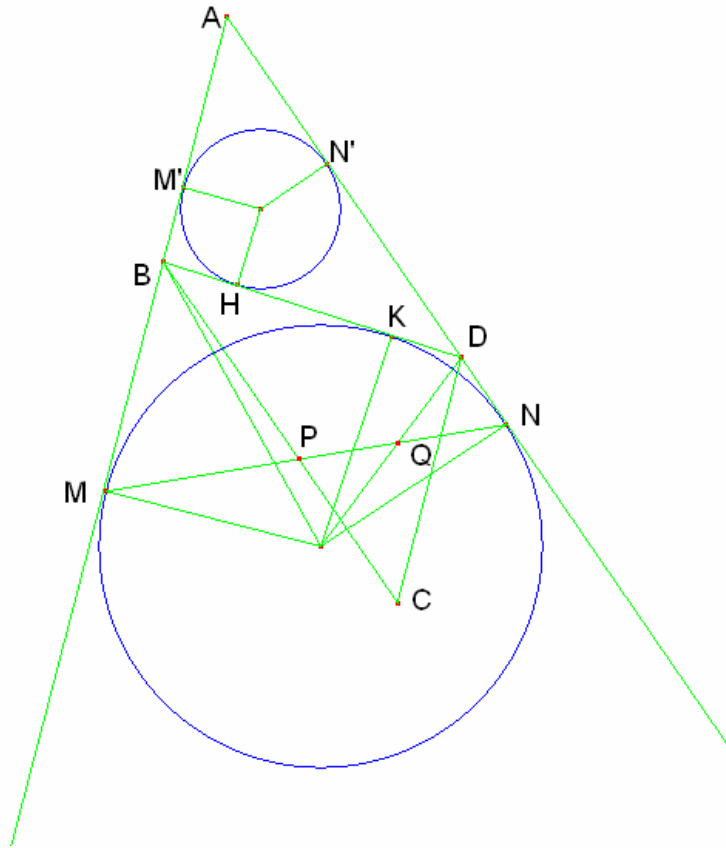
+ Chứng minh $DQ = DN = BH = BM$

$\rightarrow$ Đ1: $(C) \rightarrow (C1)$

Với (C) là đường tròn qua M', N', H ; (C1) là đường tròn qua D, Q, P

Lời giải:





Gọi K là tiếp điểm (γ) và BD

(C) là đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ tiếp xúc AB, AD, BD tại M' , N' , H

Do: $MM' = NN'$

$MM' = MB + DN' = BK + BH$

$NN' = ND + DN' = DH + DK$

$\Rightarrow BH + BK = DH + DK$

$\Rightarrow BH + BH + HK = DK + DK + HK$

$\Leftrightarrow BH = DK$

$\Rightarrow \exists$ Phép đối xứng tâm $\mathcal{D}_I$: $B \rightarrow D$

$H \rightarrow K$

$A \rightarrow C$

$\triangle AMN$ cân tại A $\Rightarrow$ góc $AMN =$ góc ANM

$DQ \parallel AM \Rightarrow$ góc $DQN =$ góc AMN

$\Rightarrow$ góc $DQN =$ góc ANM

$\Rightarrow \triangle DQN$ cân tại D $\Rightarrow DQ = DN = DK = BH = BM'$

Do $\mathcal{D}_I$: $B \rightarrow D$

$\Rightarrow \mathcal{D}_I$: $M' \rightarrow Q$

Tương tự $\triangle MBP$ cân

$\mathcal{D}_I$: $N' \rightarrow P$

$H \rightarrow K$

(C) $\rightarrow$ (C1)

(C) là đường tròn qua M' , N' , H và (C1) là đường tròn qua D, Q, P do M' , N' , H là điểm chung duy nhất của AB, AD, BC và (C)

Và khi đó K, Q, P là điểm chung duy nhất (C1) và BC, CD, CB

Bài tập 3:

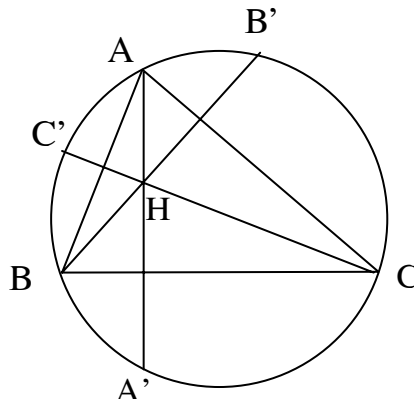
Cho đường tròn (O, R) $\triangle ABC$ có 3 góc đều nhọn nội tiếp trong đường tròn. Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm thứ hai của các đường cao kẻ từ A, B, C với đường tròn. Hãy xác định kích thước 3 cạnh $\triangle ABC$ theo R để diện tích lục giác $AB'CA'BC'$ lớn nhất.

*** Hướng dẫn giải**

CMình: $dt BHC = dt BCA'$
 $dt AHC = dt ACB'$
 $dt AHB = dt ABC'$

+ Từ đó $dt AB'C.A'BC'$ max khi S_{ABC} max

+ Dựa vào công thức hê rông tìm max S_{ABC}

*** Lời giải:**

$$D_{BC} : H \rightarrow A' \Rightarrow S_{BHC} = S_{BCA'}$$

$$D_{AC} : H \rightarrow B' \Rightarrow S_{AHC} = S_{ACB'}$$

$$D_{AB} : H \rightarrow C' \Rightarrow S_{AHB} = S_{ABC'}$$

$$\text{Đặt } S_{ABC} = S \Rightarrow S_{AB'CA'BC'} = 2S$$

Vậy max $S_{AB'CA'BC'}$ khi S đạt max

* Ta chứng minh kết quả quen thuộc

$$+) S \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}$$

$$+) a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2 \text{ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp } \triangle ABC)$$

Thật vậy:

$$S \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{48}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] \leq (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \text{ (BDT luôn đúng)}$$

$$\text{Chúng minh: } a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq 9/4 \text{ (dễ dàng chứng minh)}$$

$$\text{Vậy } S \leq \frac{9R^2}{4\sqrt{3}} \Leftrightarrow \max S = \frac{9R^2}{4\sqrt{3}}$$

$$\max S = \frac{9R^2}{4\sqrt{3}} \text{ khi } \Delta ABC \text{ đều}$$

Bài tập 4:

Cho lục giác lồi ABCDEF có $AB = BC = CD$; $DE = EF = FA$ Và GócBCD góc EFA = 60° . giả sử G và H là hai điểm nằm trong lục giác sao cho góc AGB = góc DHE = 120° . CMR

$$AG + GB + GH + DH + EF \geq CF$$

*** Hướng dẫn giải**

+) Đ_{BE} biến đ' nào:

A → D

C → C'

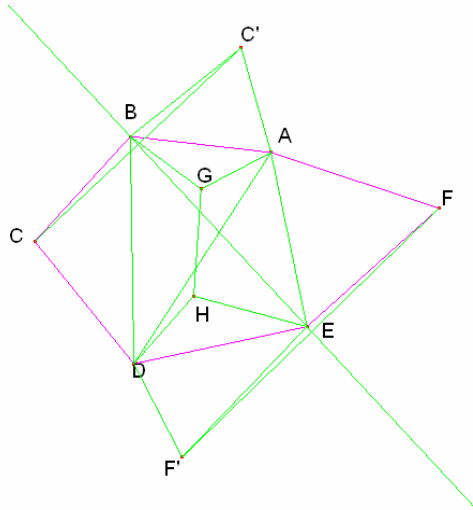
D → A

F → F'

+) CM: $GA + GB = GC'$

+) Vẽ thêm hình phụ cho bài toán để quan sát

*** Giải:**



Ta có: $BD = AB$

$AE = DF$

Đ_{BE}: A → D vì $(\angle DBE = \angle BAE$

$\Rightarrow$ Góc $B_1 =$ góc $B_2 \Rightarrow BE$ là phân giác và $BE \perp AD$)

C → C'

D → A

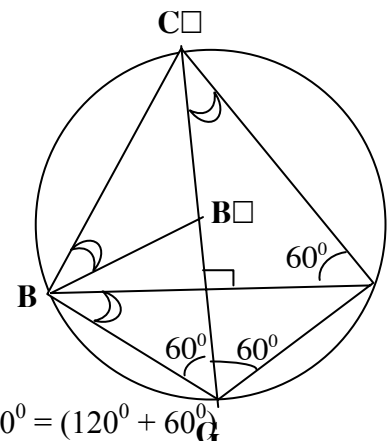
$\Rightarrow CD = C'A = AB \Rightarrow \Delta ABC'$ đều

E → F → ΔDEF đều

* ΔBCD ; ΔAEF dựng phía ngoài tứ giác ABDE

C', G khác phía với AB

H, F' khác phía với DF



$\Rightarrow$ Tứ giác AGBC' nội tiếp góc $BGA +$ góc $B'CA = 180^\circ = (120^\circ + 60^\circ)$

$$\Rightarrow BC'^2 = C'G^2 + BG^2 - 2BG \cdot C'G \cdot \frac{1}{2}$$

$$C'A^2 = C'G^2 + GA^2 - 2AG \cdot C'G \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow BG^2 - BG \cdot C'G = GA^2 - AG \cdot C'G$$

$$\Leftrightarrow (GA - GB)(GA + GB - GC') = 0$$

$$* \text{ Nếu } GA = GB \Rightarrow GC' \perp AB \Rightarrow C'K = \frac{a\sqrt{3}}{2}; GK = BK \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$GC' = \frac{4a\sqrt{3}}{6} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{GB} \rightarrow BG = \frac{a}{\sqrt{3}} \rightarrow GA + GB = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy có } GA + GB = GC'$$

$$\text{Trong cả 2 trường hợp } \rightarrow GA + GB = GC'$$

$$HE + HD = HF'$$

$$\text{Vậy có } C'G + GH + HF' \geq C'F'$$

$$\text{Mà } C'F' \text{ là ảnh CF qua phép BE } \rightarrow C'F'$$

$$\text{Vậy } GA + GB + GH + HE + HD \geq C'F'$$

$$\text{Dấu } = \text{ khi } G, H \text{ nằm trên } [C'F']$$

Bài tập 5: Cho $\triangle ABC$. Từ đỉnh A ta kẻ trung tuyến AM và phân giác trong AD. Phép đối

xứng qua đường thẳng AD biến đường thẳng AM thành AK ($K \in BC$): CMR: $\frac{BK}{CK} = \frac{AB^2}{AC^2}$

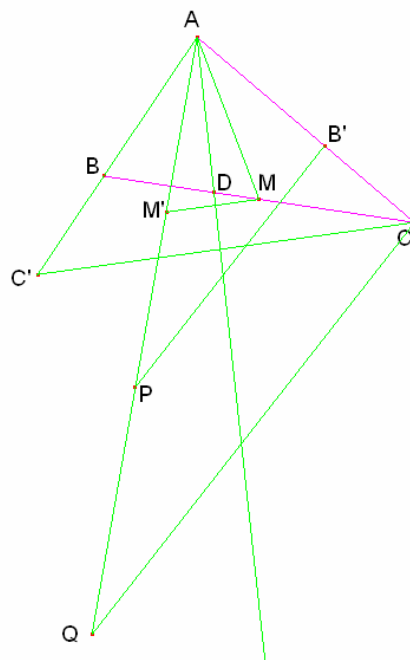
Hướng dẫn học sinh:

+ Gọi P là điểm đối xứng của A qua M'

+ Từ C kẻ đường thẳng // PB' cắt AK tại Q. Từ đó có tứ giác AC'PB' là hình bình hành.

+ áp dụng định lý talet ta có đpcm.

Lời giải:



$$\begin{aligned} \text{Đ}_{AD}: \quad B &\rightarrow B' \\ C &\rightarrow C' \end{aligned}$$

$$M \rightarrow M'$$

M' là trung điểm $B'C'$, $B' \in AC$, $C' \in AB$, $M' \in$ đường thẳng AK

Gọi P là điểm đối xứng của A qua M'

Từ C kẻ đường thẳng $\parallel PB'$ cắt AK tại Q

$$\left. \begin{array}{l} M'C' = M'B' \\ M'A = M'P \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Tứ giác } AC'PB' \text{ là hình bình hành}$$

$$\Rightarrow AB \parallel PB' \parallel QC$$

Theo định lý ta lét: $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{CQ}$ (1)

Ta có: $\frac{CQ}{PB'} = \frac{CQ}{C'A} = \frac{CQ}{AC} = \frac{PB'}{AB'} = \frac{AC'}{AB} = \frac{AC}{AB}$

Vậy $\frac{CQ}{AC} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{AC}{CQ} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{AB}{CQ} = \frac{AB^2}{AC^2}$ (2)

$\Rightarrow$ Từ (1) và (2) $\frac{BK}{CK} = \frac{AB^2}{AC^2}$

Bài tập 6: Cho hình bình hành $ABCD$. Từ B ta kẻ các đường thẳng BE vuông góc CD và BK vuông góc AD ($E \in CD$, $K \in AD$). Biết $KE = a$ và $BD = b$ ($b > a$). Tính khoảng cách từ B đến trực tâm ΔBEK .

Hướng dẫn giải

+ Xác định phép tịnh tiến

$T_{\vec{KD}}: K \rightarrow D$

$H \rightarrow E$ (H là trực tâm ΔBKE)

$B \rightarrow B'$

+ Chỉ ra $B'E = BH = \sqrt{b^2 - a^2}$

Lời giải:

Gọi H là trực tâm ΔBEK

Do EH vuông góc BK , EK vuông góc BH

$\Rightarrow \vec{DE} = \vec{KH}; \vec{EH} = \vec{KD}$

$T_{\vec{KD}}: K \rightarrow D$

$H \rightarrow E$

$B \rightarrow B'$

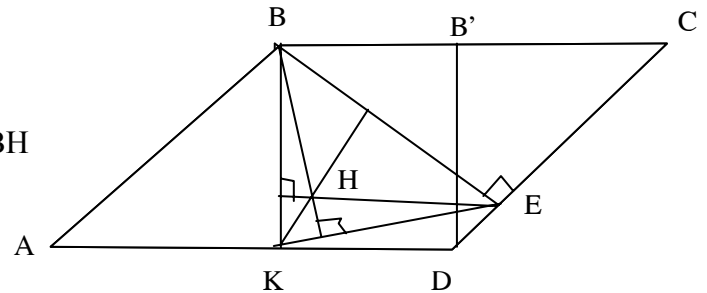
$BH \rightarrow B'E$

Vì BH vuông góc EK nên $B'E$ vuông góc KE

$\Delta B'EK$ vuông tại $E \Rightarrow B'E^2 = B'K^2 - KE^2$

Mặt khác $B'K = BD$ (do tứ giác $BB'DK$ là hình chữ nhật)

Do đó $B'K = b$ vậy $B'E - BH = \sqrt{b^2 - a^2}$



*** Các bài tập rèn luyện kỹ năng:**

Bài 1: Cho ΔABC và điểm O nằm trong tam giác. Tìm tập hợp điểm M và N thuộc các cạnh tam giác sao cho O là trung điểm của đoạn MN

Gợi ý học sinh:

+ Thực hiện phép đối xứng tâm O.

$$\mathbb{D}_O: M \rightarrow N$$

$$A \rightarrow A'$$

M là điểm chung AB và A'B' (A'B' là ảnh của AB qua $\mathbb{D}_O$)

N là điểm chung AC và A'C' (A'C' là ảnh của AB qua $\mathbb{D}_O$)

+ Từ đó suy ra các điểm M, N phải thuộc đoạn AB, AC có thể cả các đỉnh tam giác.

Bài 2: Cho hình bình hành ABCD. Với mỗi điểm M trên cạnh AB ta lấy điểm M_1 đối xứng với M qua đỉnh D, M_2 đối xứng với M_1 qua trung điểm cạnh CD và M_3 đối xứng với M_2 qua B. Tìm tập hợp các điểm M_3 khi M thay đổi trên cạnh AB.

Gợi ý học sinh:

$$\mathbb{D}_D: M \rightarrow M_1$$

$$\mathbb{D}_H: M_1 \rightarrow M_2 \text{ (H là trung điểm CD)}$$

$$\mathbb{D}_B: M_2 \rightarrow M_3$$

$$\mathbb{D}_K: M \rightarrow M_3 \text{ (K xác định HK = HD + HB)}$$

Từ đó suy ra tập hợp M_3 là đoạn AB.

Bài 3: Cho đường tròn (O) và hai đường tròn bằng nhau (O_1); (O_2) cùng tiếp xúc với (O) lần lượt tại các điểm A_1, A_2 . Trên đường tròn (O) ta lấy điểm M. Các đoạn MA_1, MA_2 cắt lần lượt thứ hai các đường tròn (O_1), (O_2) tương ứng tại điểm B_1, B_2 . Chứng minh $B_1B_2 \parallel A_1A_2$.

Gợi ý học sinh:

+ Gọi đường thẳng x là trung trực của $O_1O_2 \Rightarrow O \in x$

$$+ \mathbb{D}_x: O_1 \rightarrow O_2$$

+ Ta chứng minh dễ dàng:

$$\frac{A_1B_1}{A_1M} = \frac{O_1B_1}{OM} = \frac{A_2B_2}{OM} = \frac{A_2B_2}{A_2M}$$

Bài 4: Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp hình tam giác ABC không cân. Đường tròn ngoại tiếp ΔBIC cắt phần kéo dài của các cạnh AB, AC tương ứng tại B' và C' . Chứng minh $BB' = CC'$.

Gợi ý học sinh:

+ Ta chứng minh AI đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBIC vì vậy tâm của đường tròn đó cách đều hai dây cung BB' và CC' .

B) Phép quay

I. Định nghĩa: $Q_O^\alpha: M \rightarrow M'$

Sao cho $(OM, OM') = \alpha$

$$OM = OM'$$

O: tâm quay

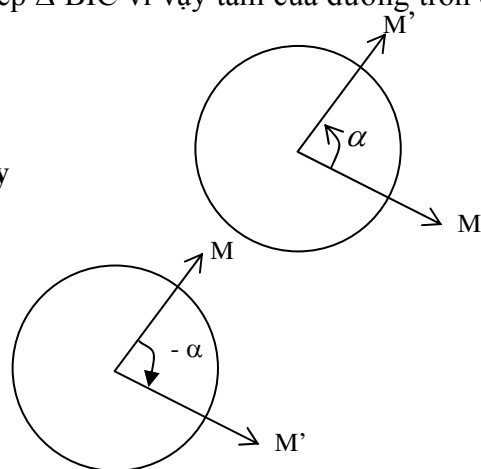
α : Góc quay

$$/\alpha/ \in [0^\circ, 180^\circ]$$

II. Tính chất

1. Q_O^α có một điểm bất động duy nhất

$$2. Q_O^\alpha: A \rightarrow A'$$



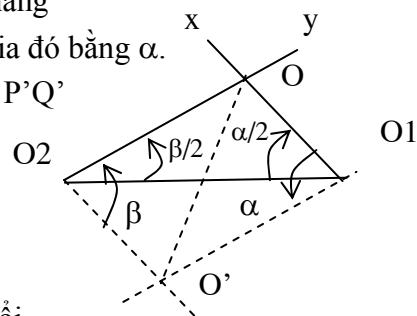
$$B \rightarrow B'$$

Thì $AB = A'B'$; $(AB, A'B') = \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 180^0$)

3. Phép quay biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng.

Hệ quả:

- + Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng
- + Biến tia S_x thành tia S'_x và góc tạo bởi hai tia đó bằng α .
- + Biến đoạn thẳng PQ thành đoạn $P'Q'$: $PQ = P'Q'$
- + Biến góc thành góc bằng nó
- + Biến đường tròn (I, R) thành (I', R)



III. Mở rộng phép quay tâm O góc quay α : $180^0 < \alpha \leq 360^0$:

1. Định nghĩa:

Cho trước điểm O và góc α với $180^0 < \alpha \leq 360^0$. Phép biến đổi

$Q = Q_0^{\alpha-180^0} \cdot Q_0^{180^0}$ là phép quay tâm O với góc quay α kí hiệu là Q_0^α .

2. Tính chất:

a. Tính chất 1: Q_0^α với $\alpha \in (180^0, 360^0)$

$Q^\alpha: M \rightarrow M'$ thì $Q_0^{\alpha-360^0}: M \rightarrow M'$ và $(OM, OM') = \alpha - 360^0$

b. Tính chất 2:

Cho 2 phép quay $Q_{O_1}^\alpha, Q_{O_2}^\beta$ với 2 tâm quay phân biệt ($O_1 \neq O_2$) và thỏa mãn điều kiện $0^0 < \alpha \leq 360^0$; $0^0 < \beta \leq 360^0$, $\frac{\alpha + \beta}{2} \neq 180^0$

Khí đó $Q = Q_{O_2}^\beta \cdot Q_{O_1}^\alpha$ là 1 phép quay với góc quay $\varphi = \alpha + \beta$ và tâm quay O được xác định: $Q_{O_1}^{\frac{-\alpha}{2}}: O_1O_2 \rightarrow x$

$Q_{O_2}^{\beta/2}: O_2O_1 \rightarrow y$ và x cắt y tại O

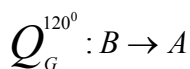
IV. Bài tập áp dụng

Bài tập 1: Cho ΔABC trên các cạnh AB, AC và về phía ngoài ta dựng các Δ đều ABC_1, ACB_1, ACB_1 . Gọi G là trọng tâm ΔABC_1 ; M là trung điểm BC, Chứng minh rằng ΔMGB_1 vuông và $MB_1 = MG \cdot \sqrt{3}$

Hướng dẫn học sinh

- Học sinh có thể chứng minh dựa vào tam giác đồng dạng
- Sử dụng tính chất trích hai phép quay

Lời giải:



$$Q_{b1}^{60^0} \cdot Q_G^{120^0} : B \rightarrow C$$

$$Q_M^{180^0} : B \rightarrow C \Rightarrow Q_{B1}^{60^0} . Q_G^{120^0}$$

$$\Rightarrow \text{Góc } (GM, GB_1) = 60^0; \text{ Góc } (B_1G, B_1M) = 30^0$$
$$\Rightarrow \text{Góc } \text{GMB}_1 = 90^0 \Rightarrow \text{MB}_1 = \text{MG} \sqrt{3}$$

Hướng dẫn học sinh:



+ Xét các tam giác bằng nhau.

Xét $Q_A^{60}: C \rightarrow C'$; B, C' nằm về 2 phía AC

Xét $\triangle MAC'$ và $\triangle ABC$ có $MA = BC$

$$AC = AC'$$

$$\text{Góc MAC}' = 60^0 + 20^0 = 80^0 = \text{Góc ACB}$$

$$\Rightarrow \Delta MAC' = \Delta ABC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow C'M = C'A = CC' \text{ (vì } \Delta ACC' \text{ đều)}$$

$\Rightarrow \Delta \text{MCC}'$ cân tại C'

Mà $C'M = C'A \Rightarrow \Delta AMC'$ cân tại C'

$$\Rightarrow \text{Góc AMC} = \text{góc MAC}' = 80^0 \Rightarrow \text{Góc AC'M} = 20^0$$

$$\Rightarrow \text{Góc } AC'C = 40^0$$

$$\text{Do } \Delta MC'C \text{ cân tại } C' \Rightarrow \text{Góc } CM'C = \text{góc } MCC' = \frac{180^0 - 40^0}{2} = 70^0$$

$$\Rightarrow \text{Góc } BMC = 180^0 - 70^0 - 80^0 = 30^0$$

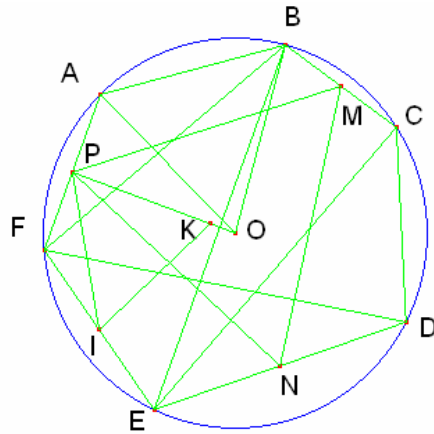
Bài 3: Cho lục giác lồi ABCDEF nội tiếp trong đường tròn (O) có AB, CD, EF bằng bán kính đường tròn. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, DF, AF. Chứng minh rằng ΔMNP đều.

Hướng dẫn học sinh

+ Xét Q_0^{60}

+ Có phép quay Q_P^{60} : $N \rightarrow M$ khi đó có ΔMNP đều:

Giải:



- Gọi P là trung điểm của AF

- K là trung điểm BE

I là trung điểm EF

Q_0^{60} : $B \rightarrow A$

$F \rightarrow E$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BF} \rightarrow \overrightarrow{BE} \Rightarrow (\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{AE}) = 60^0 \Rightarrow AE \text{ cắt } BF \text{ theo góc nhọn } 60^0$$

Do tứ giác ABEF là hình thang cân

$$\Rightarrow AE = BF \Rightarrow PI = IK \text{ theo tính chất đường trung bình}$$

$$\Rightarrow PI \text{ cắt } IK \text{ theo một góc nhọn } 60^0 \Rightarrow \Delta PIK \text{ đều}$$

Q_0^{60} : $F \rightarrow E$

$D \rightarrow C$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{EC}) = 60^0 \text{ mà } \overrightarrow{IN} \uparrow \uparrow \overrightarrow{FD} \\ \overrightarrow{KM} \uparrow \uparrow \overrightarrow{EC}$$

$$\Rightarrow \text{góc } (\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{KM}) = 60^0 \quad (1)$$

$$\text{Mà } IN = KM = \frac{1}{2} FD = \frac{1}{2} EC$$

$$\rightarrow Q_P^{60} : I \rightarrow K$$

$$N \rightarrow N'$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{KN}) = 60^0 \text{ từ (1) } \rightarrow (\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{KN}) = 60^0 \Rightarrow \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{KM} \Rightarrow M \equiv N'$$

$$\Rightarrow Q_P^{60} : N \rightarrow M \Rightarrow \Delta PMN \text{ đều}$$

Bài tập rèn kỹ năng

Bài 1: Cho hình vuông nội tiếp trong hình bình hành MNPQ, $A \in MN$, $B \in NP$, $C \in PQ$, $D \in QM$. Gọi M' là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AD, N' là chân đường vuông góc hạ từ N xuống AB, P' là chân đường vuông góc hạ từ P xuống BC, Q' là chân đường vuông góc hạ từ Q xuống CD. CMR tứ giác $M'N'P'Q'$ là hình vuông.

Gợi ý học sinh

$$\begin{aligned}
 &+ \text{ Xét phép quay } Q_o^{-90^\circ} : \quad \begin{array}{ll} A \rightarrow B & \text{Từ đó } \Rightarrow AQ_1 \text{ qua trực tâm H của } \Delta \\ M \rightarrow M_1 & \text{ABN} \\ D \rightarrow A \\ Q \rightarrow Q_1 \end{array} \\
 &Q_o^{-90^\circ} : \quad \begin{array}{ll} M \rightarrow H & \Rightarrow [MM'] \rightarrow [HN'] \\ AD \rightarrow AB & M' \rightarrow N' \end{array}
 \end{aligned}$$

Bài 2: Hai Δ vuông $ABC = \Delta$ vuông $A'B'C'$ (Góc $C = \text{góc } C' = 90^\circ$) được đặt trong mặt phẳng và các đỉnh của 2 tam giác được đánh số theo cùng chiều đường thẳng. Gọi D là giao điểm của các đường thẳng BC và $B'C'$; E là giao điểm các đường thẳng AC, $A'C'$. CMR 4 điểm C, D, M, E cùng thuộc một đường tròn.

Gợi ý học sinh

$$\begin{aligned}
 &\text{Ta thực hiện phép quay tâm M biến } C \rightarrow C' \\
 &\quad \quad \quad \begin{array}{l} A \rightarrow A' \\ B \rightarrow B' \end{array} \\
 &+ \text{ Chỉ ra góc } CMC' = \text{góc } CA'C' = \text{góc } CDC'
 \end{aligned}$$

C- PHÉP TỰ VỊ

I. Định nghĩa:

$$V_O^k: M \rightarrow M'$$

$$\overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{OM} \quad \text{với } k \neq 0$$

O: tâm tự vị

$k \neq 0$: tỷ số tự vị

$k > 0$: V_O^k phép tự vị dương

$k < 0$: V_O^k phép tự vị âm

Đặc biệt $k = 0 \Rightarrow$ ảnh thuộc điểm M đều là O

II. Tính chất

1. Phép V_O^k ($k \neq 1$) có 1 điểm bất động duy nhất là O

2. $V_O^k: M \rightarrow M' \Rightarrow O, M, M'$ thẳng hàng

$$\left. \begin{array}{l} 3. V_O^k \quad \begin{array}{l} A \rightarrow A' \\ B \rightarrow B' \end{array} \\ \quad \quad \quad (A \neq B) \end{array} \right\} \quad \overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{AB}$$

4. Phép tự vị biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng

Hệ quả: Phép V_O^k biến

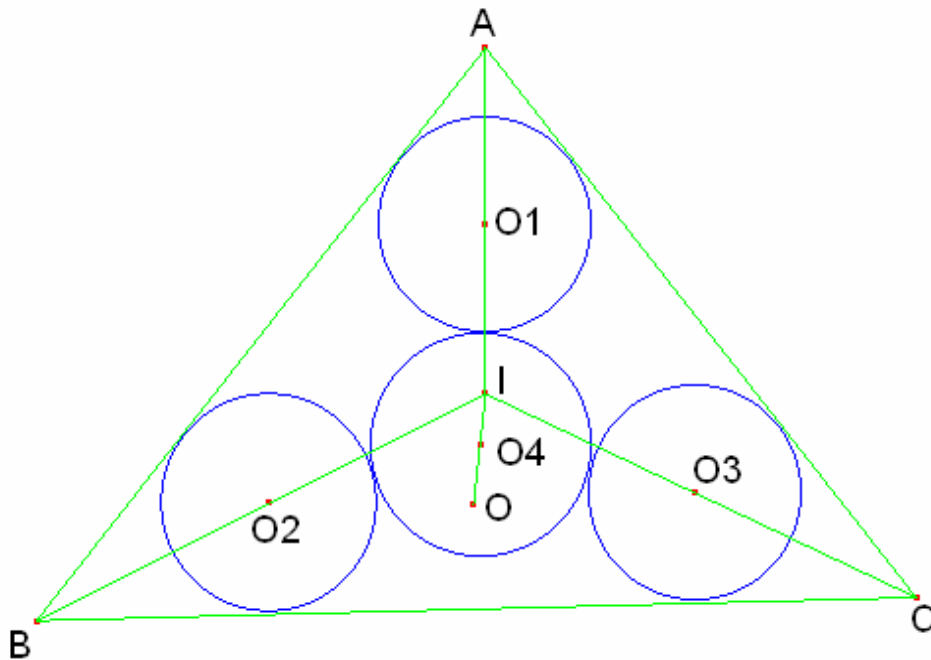
- * Biến đường thẳng (d) thành đường thẳng (d') và $d' \parallel d$ hoặc $d' \equiv d$
- * Tia Sx thành tia S'x' và hai tia đó hoặc trùng nhau
- * Đoạn PQ thành P'Q': $P'Q' = k/PQ$
- * ΔABC thành $\Delta A'B'C'$ và hai tam giác này đồng dạng tỷ số đồng dạng bằng k .
- * Góc xSy thành góc x'S'y': góc xsy = góc x's'y'
- * Biến đường tròn (I,R) thành đường tròn (I',R') và $R' = k/R$

Bài tập áp dụng

Bài 1: Cho ΔABC bên trong Δ dựng 4 đường tròn (O_1); (O_2); (O_3); (O_4) bằng nhau sao cho 3 đường tròn đầu tiên cùng tiếp xúc với 2 cạnh Δ . CMR tâm đường tròn nội ngoại tiếp ΔABC và tâm đường tròn (O_4) thẳng hàng.

Gợi ý học sinh

- * Xét phép vị tự tâm I tỷ số k
- * Dựa vào tính chất V_O^k : $M \rightarrow M'$ chứng tỏ O, M, M' thẳng hàng



Lời giải:

Ta có IA, IB, IC chứa O_1, O_2, O_3

$$\rightarrow O_1O_2 \parallel AB$$

$$O_2O_3 \parallel BC$$

$$O_3O_1 \parallel AC$$

$$\text{Đặt } \frac{IO_1}{IA} = \frac{IO_2}{IB} = \frac{IO_3}{IC} = \frac{1}{k}$$

$$V_I^k: O_1 \rightarrow A$$

$$O_2 \rightarrow B$$

$$O_3 \rightarrow C$$

Do O_4 là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta O_1O_2O_3$ (vì cách đều 3 điểm).

Tức là: $V_I^k: O_4 \rightarrow O \Rightarrow I, O_4, O$ thẳng hàng

Bài 2: (Đề thi HSGQG 2003).

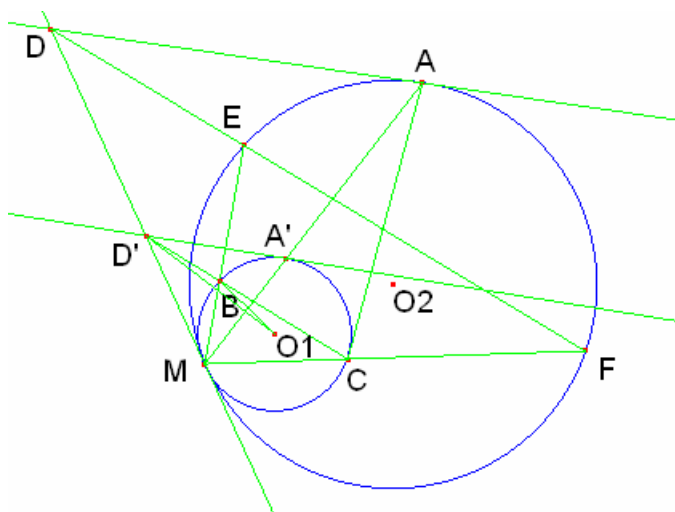
Cho 2 đường tròn cố định (O_1, R_1) ; (O_2, R_2) ; ($R_2 > R_1$) tiếp xúc nhau tại M.
Xét điểm A nằm trên (O_2, R_2) sao cho 3 điểm A, O_1 , O_2 không thẳng hàng. Từ A kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O_1, R_1) , (B, C là tiếp điểm). Các đường thẳng MB; MC cắt lần thứ hai đường tròn (O_2, R_2) tương ứng tại E, F. Gọi D là giao điểm EF và tiếp tuyến tại A của (O_1, R_2) . CMR điểm D di động trên 1 đường thẳng cố định khi A di động trên (O_2, R_2) sao cho A, O_2 , O_1 không thẳng hàng.

Hướng dẫn học sinh:

* Gọi D' là giao 2 tiếp tuyến tại M và A'

Chứng minh D' thuộc trục đẳng phương BC của 2 đường tròn (O_1) và (O_3) .

* Xét phép vị tự $V_M^{\frac{R_2}{R_1}}$: $(O_1, R_1) \rightarrow (O_2, R_2)$
 $B \rightarrow E$
 $C \rightarrow F$
 $BC \rightarrow EF$



Lời giải:

* Ta thấy tứ giác ABO_1C nội tiếp đường tròn (O_3)

* Gọi A' là giao điểm thứ hai của AM với (O_1, R_1)

* D' là giao 2 tiếp tuyến tại M và A'

- Chứng minh D' thuộc trục đẳng phương của BC của (O_1) và (O_3)

$\Leftrightarrow$ Chứng minh: $P_{D'/(O_1, R_1)} = P_{D'/(O_3)}$

Vậy D' di động trên tiếp tuyến của đường tròn (O_1, R_1) tại M

$\Rightarrow D' \in$ đường thẳng cố định

Xét $V_M^{\frac{R_2}{R_1}}$: $(O_1, R_1) \rightarrow (O_2, R_2)$

$B \rightarrow E$

$C \rightarrow F$

$BC \rightarrow EF$

Tiếp tuyến tại $A' \rightarrow$ tiếp tuyến tại A

$\Rightarrow D$ nằm trên đường thẳng MD' là tiếp tuyến với đường tròn (O_1, R_1) .

Bài 3: (Đề thi HSGQG năm 2000)