CỰC VÀ ĐỐI CỰC

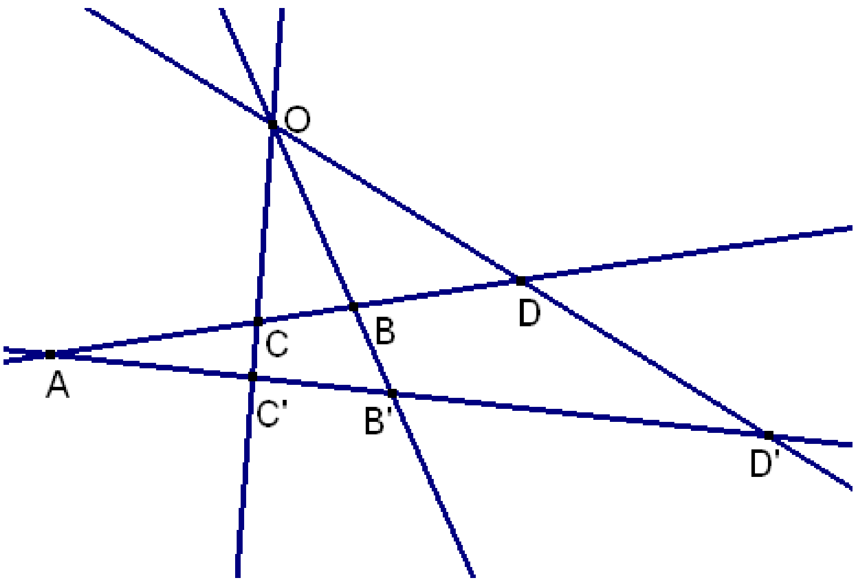
Dương Bửu Lộc-Trường THPT chuyên Trần Đại Nghĩa

A. Đường đối cực của một điểm đối với 2 đường thẳng

1. Định nghĩa: Hai điểm A, B gọi là liên hợp đối với 2 đường thẳng a, b khi chúng liên hợp với 2 điểm C, D là giao điểm của AB với a, b.

Ở đây khái niệm A, B liên hợp với C, D có nghĩa là A, B, C, D là hàng điểm điều hòa hay (ABCD) = -1

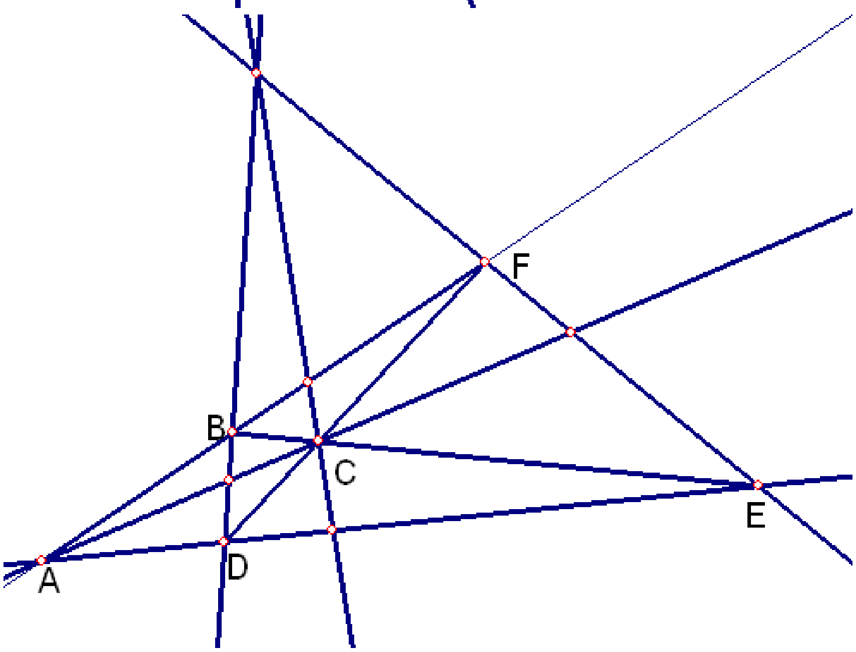
2. Bài toán: Cho 2 đường thẳng c, d và điểm A ở ngoài. Tìm quỹ tích những điểm B liên hợp của A đối với c, d.



Kẻ một cát tuyến AC'D'. Lấy một điểm B' liên hợp của A đối với C'D'.

Kẻ cát tuyến di động ACD. Nối OB' cắt ACD tại B. Ta có (O,AB'C'D') là một chùm điều hòa nên (O,ABCD) cũng là một chùm điều hòa. Do đó A, B liên hợp với đối với c, d. Vậy quỹ tích những điểm liên hợp của A đối với c, d là đường thẳng liên hợp của OA đối với c, d.

Đường thẳng này gọi là đường đối cực của A đối với c, d. Điểm A gọi là cực.



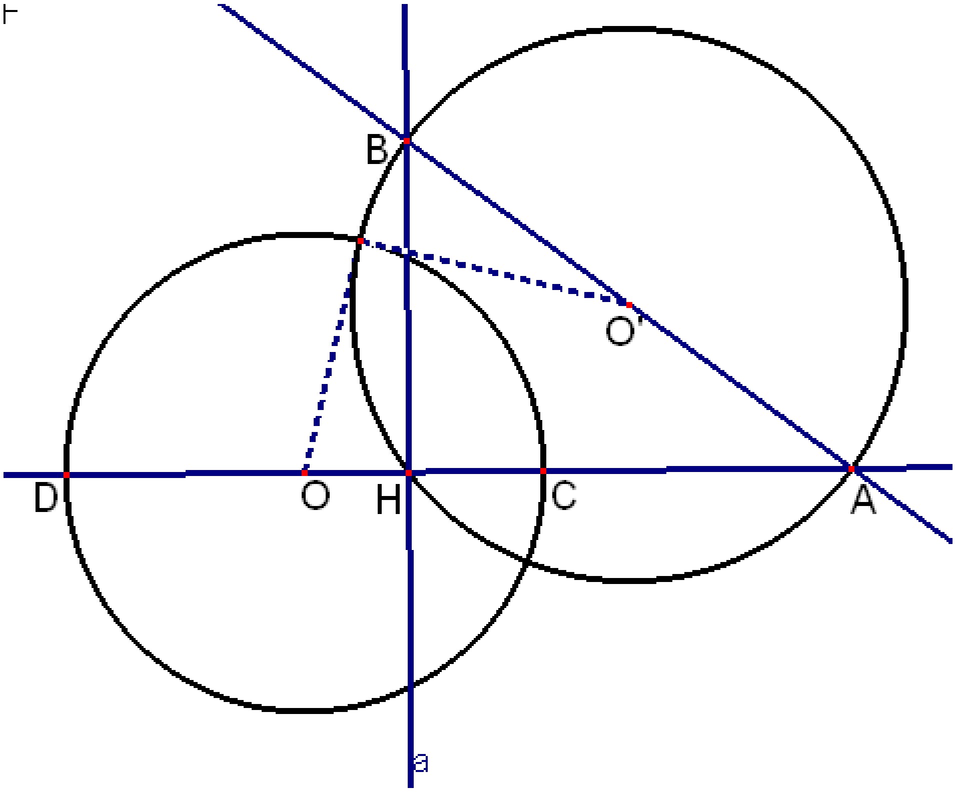
<u>Chú ý</u>

- khi c // d thì đường đối cực cũng song song với c,d.
- ***Trong một hình 4 cạnh đủ mỗi đường chéo được 2 đường chéo kia chia điều hòa đối với 2 đỉnh.***

B. Đường đối cực của điểm đối với một đường tròn

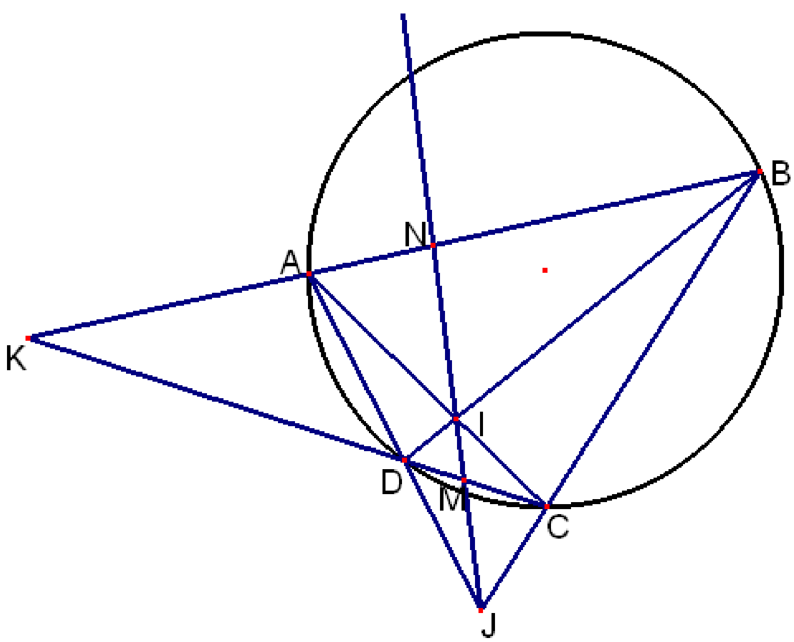
1. Định nghĩa: Hai điểm A, B gọi là liên hợp đối với đường tròn (O) khi đường tròn đường kính AB trực giao với (O).

Đường tròn (O;R) gọi là trực giao với đường tròn (O';R') khi và chỉ khi phương tích của O đối với (O') bằng R^2. Khi đó đường tròn (O') cũng trực giao với (O).



2. Bài toán: Tìm quỹ tích những điểm liên hợp của điểm A đối với đường tròn (O).
Lấy một điểm B bất kỳ liên hợp của A đối với đường tròn (O). Theo định nghĩa ta có đường tròn (O) trực giao với đường tròn đường kính AB. AO cắt đường tròn (O) tại C, D và đường tròn (O') tại H. Ta có $OC^2 = OD^2 = OH.OA \Rightarrow (AHCD) = -1$ hay H là liên hợp của A đối với C,D. Vì A, C, D cố định nên H cố định. Vậy quỹ tích những điểm liên hợp của A đối với đường tròn (O) là một đường thẳng a vuông góc với OA tại H với $\overline{OH}.\overline{OA} = R^2$.

Đường thẳng a gọi là đường đối cực của A đối với đường tròn (O) và A gọi là cực của a đối với (O).

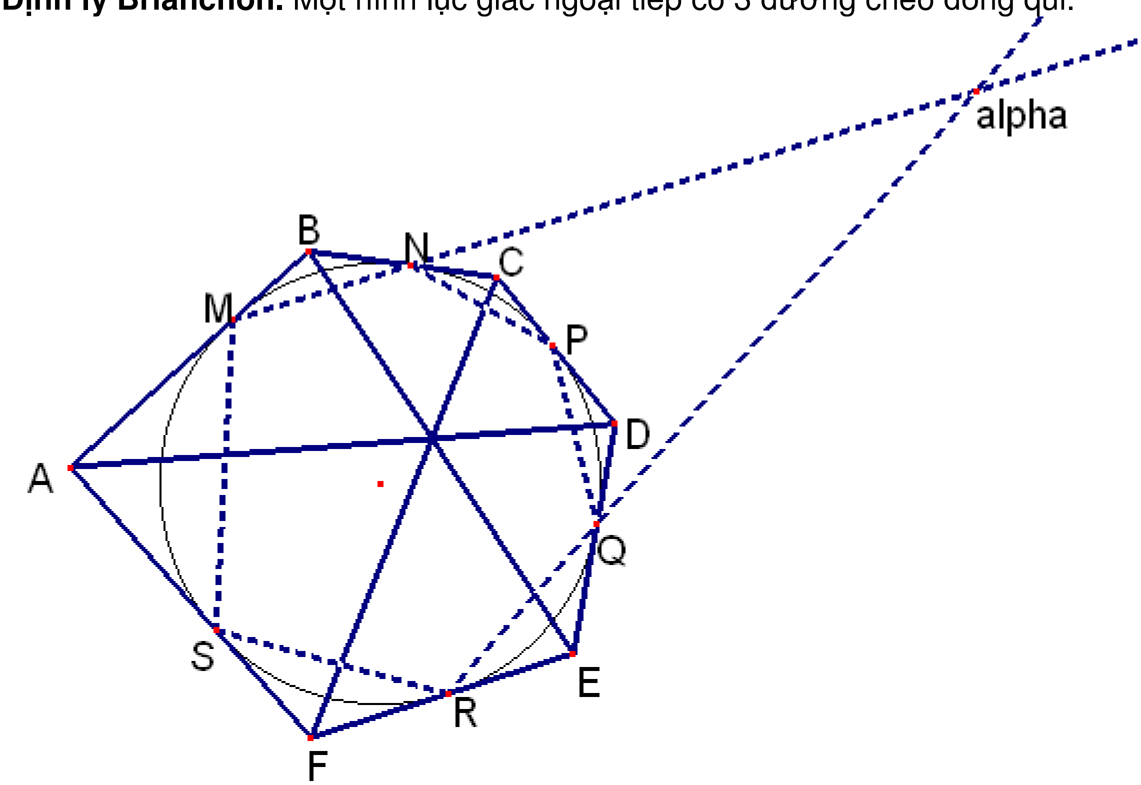


Chú ý:
Trong một tứ giác nội tiếp, giao điểm của 2 đường chéo sẽ liên hợp với 2 giao điểm của 2 cặp cạnh đối.

Giả sử IJ cắt CD, AB lần lượt tại M, N ta có M,K liên hợp với C,D và N, K liên hợp với B, A $\Rightarrow$ IJ là đường đối cực của K đối với đường tròn.
Tương tự IK là đường đối cực của J và KJ là đường đối cực của I.

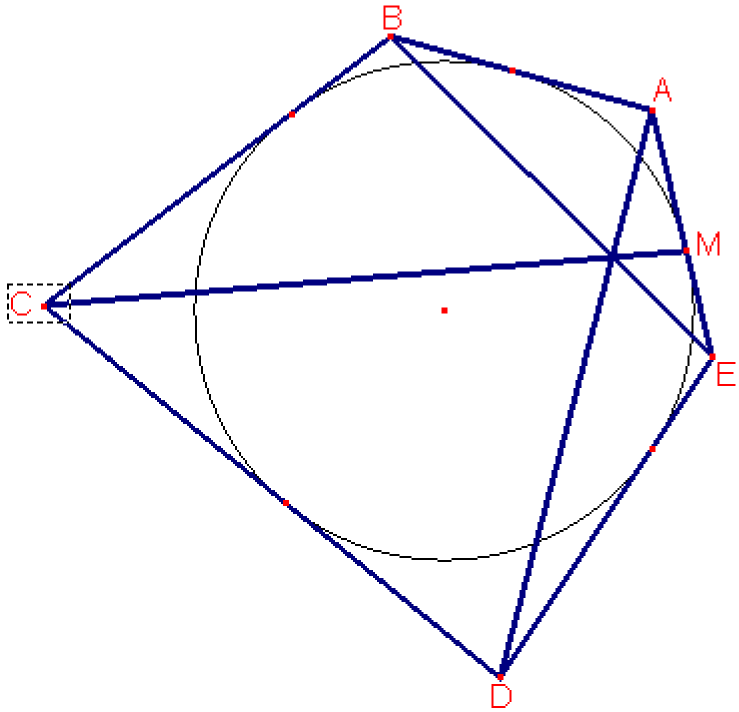
3. Tính chất của đường đối cực.
a) Đường đối cực của một điểm A (khác O) đối với đường tròn (O) là một đường thẳng hoàn toàn xác định vì $\overline{OH}.\overline{OA} = R^2$
b) Hai điểm A, B có 2 đường đối cực khác nhau đối với một đường tròn.
c) Nếu đường đối cực của A đi qua B thì đường đối cực của B sẽ đi qua A.
Thật vậy nếu đường đối cực của A đi qua B thì B là điểm liên hợp của A đối với (O) cho nên A cũng là điểm liên hợp của B đối với (O) ,vậy A nằm trên đường đối cực của B.
d) Nếu một điểm A chạy trên đường thẳng (d) thì đường đối cực của A luôn đi qua cực B của (d).
e) Nếu 4 điểm ABCD lập thành một hàng điểm điều hòa thì 4 đường đối cực của chúng lập thành một chùm điều hòa.
Giả sử A,B,C,D nằm trên Δ. Gọi I là cực của Δ đối với (O). Gọi d_1, d_2, d_3, d_4 lần lượt là các đường đối cực của A, B, C, D , chúng đồng qui tại I và lần lượt vuông góc với OA, OB, OC, OD. Vì chùm (O,ABCD) điều hòa nên chùm $I(d_1d_2d_3d_4)$ cũng là chùm điều hòa.

4. Định lý Brianchon. Một hình lục giác ngoại tiếp có 3 đường chéo đồng qui.

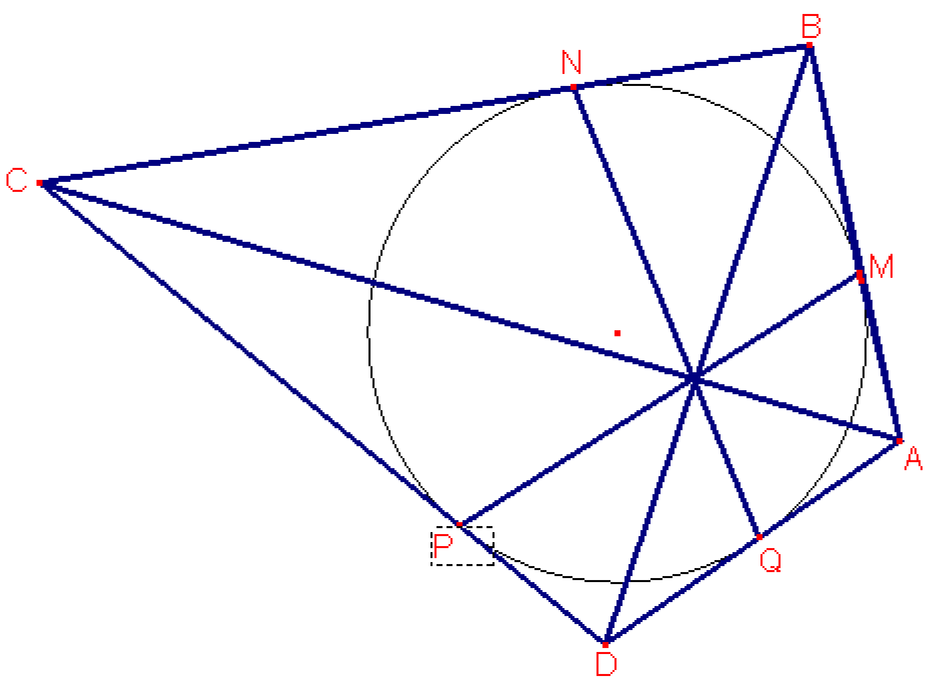


Các điểm A,B,C,D,E,F có các đường đối cực là SM,MN,NP,PQ,QR,RS. Gọi α,β,γ là giao điểm của các đường thẳng (MN,QR), (NP,RS), (PQ,SM). Gọi a, b, c là các đường đối cực của α,β,γ.
Vì MN qua α nên a qua B
Vì QR qua α nên a qua E
Vậy BE là đường đối cực của α.
Tương tự CF là đường đối cực của β, DA là đường đối cực của γ.
Theo định lý Pascal α,β,γ thẳng hàng nên BE, CF, DA đồng qui.

Đối với ngũ giác ngoại tiếp : AD, BE, CM đồng qui.

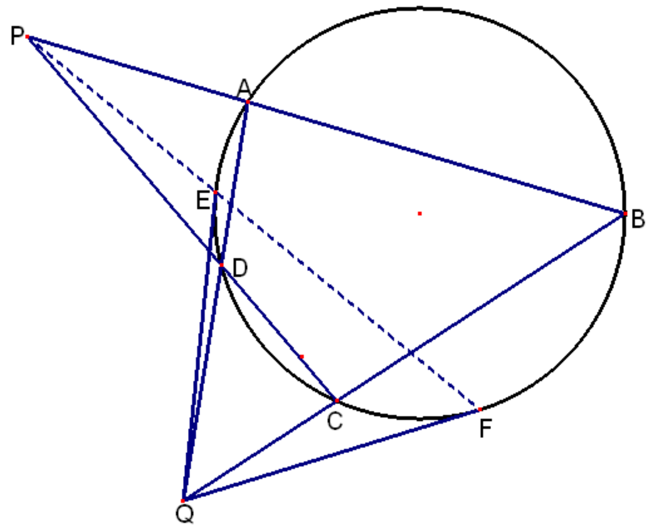


Đối với tứ giác ABCD ngoại tiếp: hai đường chéo AC, BD và hai đường thẳng nối các tiếp điểm các cạnh đối thì đồng qui.



C. Một số bài toán áp dụng:

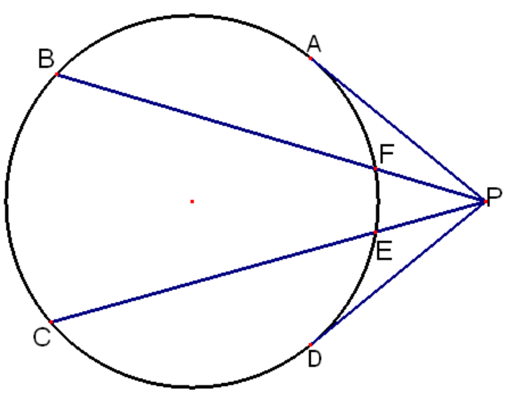
Bài 1. (Trung Quốc 97) Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn(O) . Gọi P là giao điểm của AD và BC, Q là giao điểm của AD và BC. Từ Q vẽ các tiếp tuyến QE, QF với (O). Chứng minh: P, E, F thẳng hàng



Giải

Tứ giác đầy đủ ABCDPQ cho ta P nằm trên đường đối cực của P mà EF là đường đối cực của P do đó P,E,F thẳng hàng.

Bài 2. (Úc-Balan 98) Cho các điểm phân biệt A, B, C, D, E, F nằm trên cùng một đường tròn theo thứ tự đó. Các tiếp tuyến tại A, D và các đường thẳng BF, CE đồng qui. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BC, EF hoặc cùng song song hoặc đồng qui.



Giải

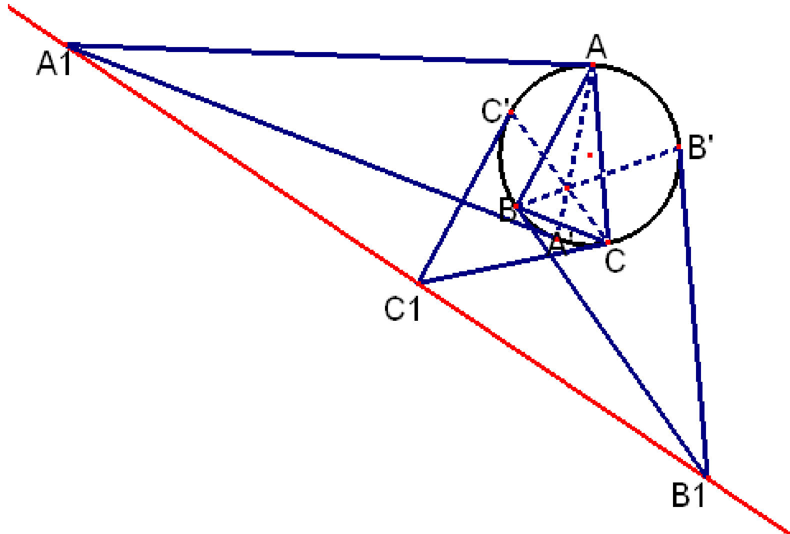
Nếu BC//EF thì do tính đối xứng ta có BC $\perp$ IO mà AD $\perp$ IO nên AD//BC.

Nếu BC cắt EF tại K thì K nằm trên đối cực của I mà AD là đối cực của I nên K thuộc AD. Vậy AD,BC,EF đồng qui tại K

Bài 3. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Ba đường phân giác của ΔABC cắt (O) lần lượt tại A', B', C'. Ba cặp tiếp tuyến với (O) tại A,A', B,B' và CC' cắt nhau tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

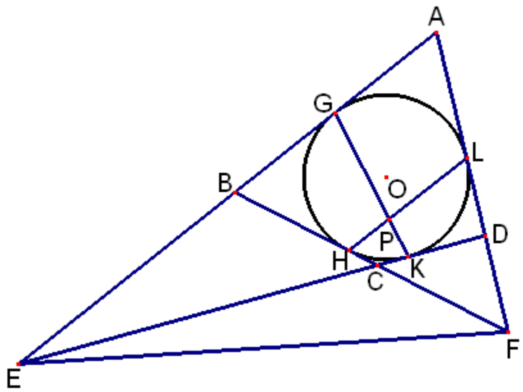
Giải

A_1, B_1, C_1 có các đường đối cực là AA', BB', CC' mà 3 đường này đồng qui tại tâm đường tròn nội tiếp ΔABC nên A_1, B_1, C_1 nằm trên đường đối cực của tâm đường tròn nội tiếp đối với (O).



Bài 4. Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O) có các cạnh AB, BC, CD, DA tiếp xúcvới (O) lần lượt tại G, H, K, L. Gọi E là giao điểm của AB và CD, F là giao điểm của AD và BC và P là giao điểm của GK và HL. Chứng minh: OP ⊥ EF

Giải



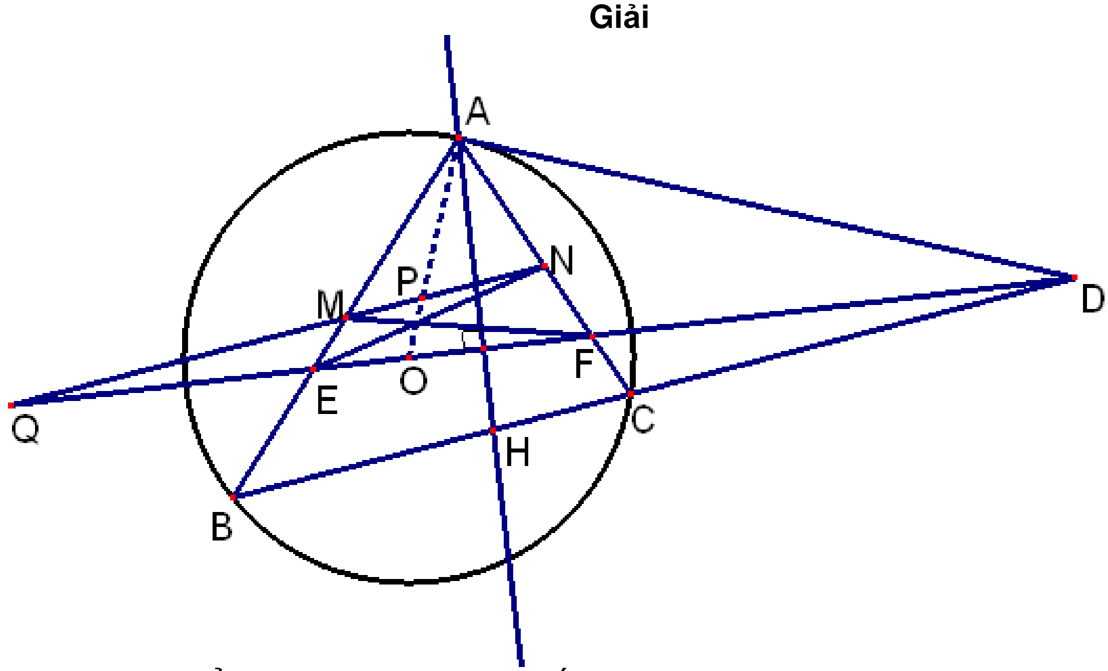
P ∈ HL là đối cực của F nên F nằm trên đối cực của P

Tương tự E cũng nằm trên đối cực của P

⇒ EF là đối cực của P ⇒ EF ⊥ OP

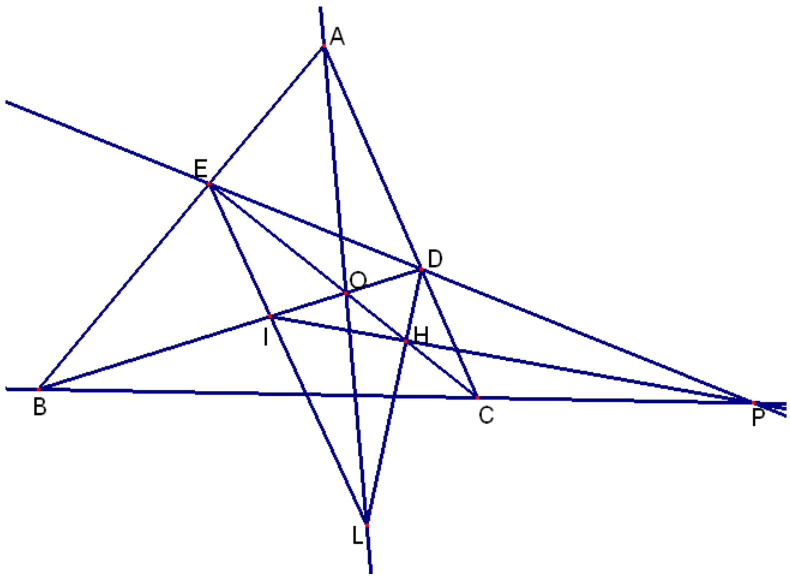
Bài 5. Cho ΔABC nội tiếpđường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại D. DO cắt AB, AC lần lượt tại E và F. Gọi M, N là trung điểm của AB và AC. Chứng minh: EN, FM và AO đồng qui.

Giải



Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với OD cắt BC tại H. Chùm (A, BCHD) là chùm điều hòa.
Mặt khác ta có OM ⊥ AB, ON ⊥ AC, OD ⊥ AH, OA ⊥ AD ⇒ (O, MNDA) là chùm điều hòa
⇒ cát tuyến MN của chùm ấy cho ta QPMN là hàng điểm điều hòa
⇒ APO là đường đối cực của Q đối với AB,AC ⇒ APO phải đi qua giao điểm của EN và MF.

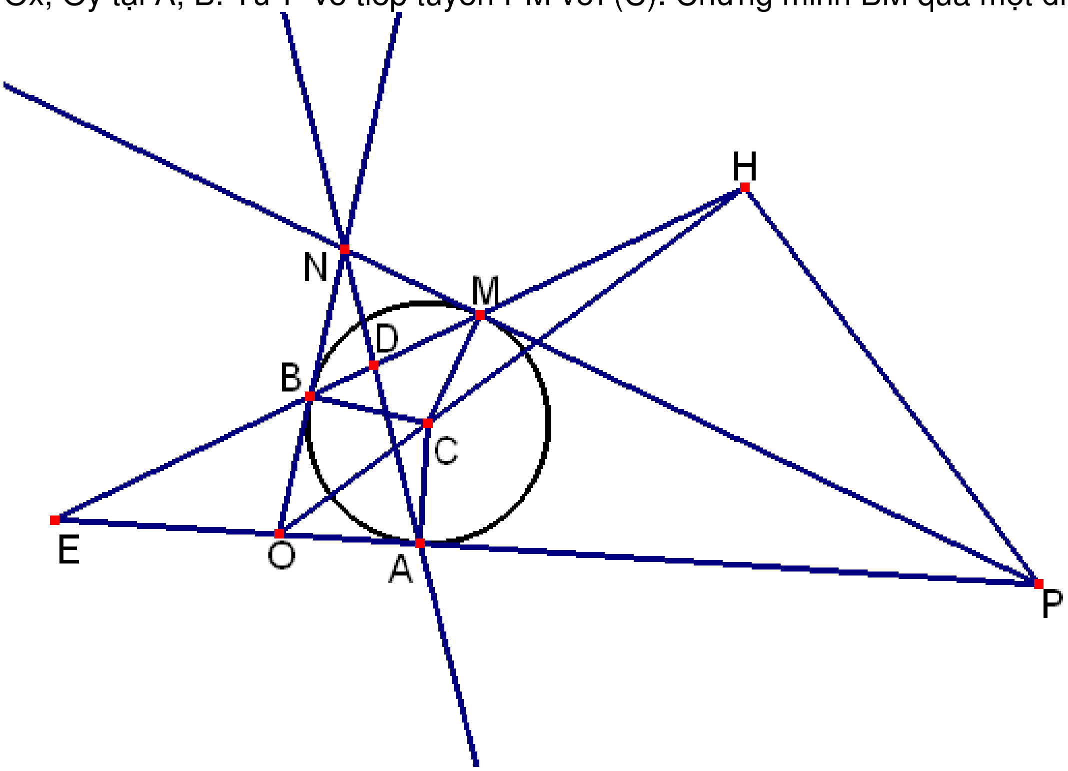
Bài 6. Cho ΔABC và một điểm D trên AC, một điểm E trên AB. BD và CE cắt nhau tại O. Trên AO lấy một điểm L bất kỳ. LD cắt CE tại H, LE cắt BD tại I. Chứng minh DE, HI và BC đồng qui.



Giải

Gọi P là giao điểm của ED và BC; P' là giao điểm của ED và IH.
Tứ giác hoàn toàn AEBOCD cho ta EDMP là hàng điểm điều hòa.
Tứ giác hoàn toàn LIEODH cho ta EDMP' là hàng điểm điều hòa.
Vậy P trùng P'.

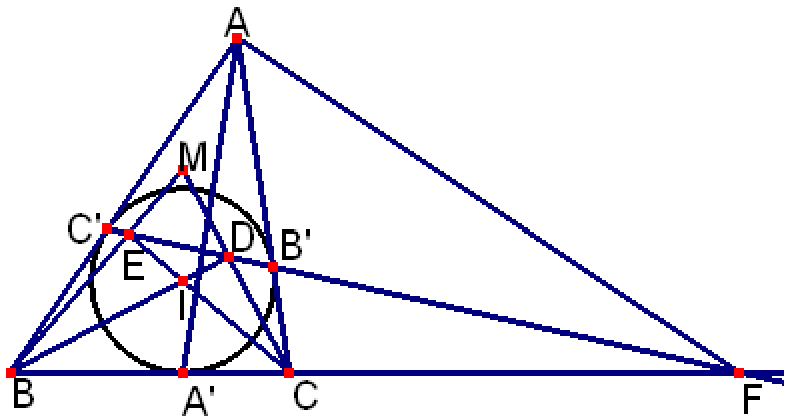
Bài 7. Cho góc xOy và một điểm P cố định trên Ox. Đường tròn (C) di động luôn tiếp xúc với Ox, Oy tại A, B. Từ P vẽ tiếp tuyến PM với (C). Chứng minh BM qua một điểm cố định.



Giải

Gọi H, D, E lần lượt là giao điểm của BM với OC,NA và OA.
E nằm trên đối cực của N nên N nằm trên đối cực của E
E nằm trên đối cực của A nên A nằm trên đối cực của E
vậy AN là đối cực của E đối với đường tròn (C)
$\Rightarrow$ AN là đối cực của E đối với NO, NP $\Rightarrow$ EAOP là hàng điểm điều hòa $\Rightarrow$ (H, EAOP) là chùm điều hòa mà HO là phân giác của góc EHA nên HP $\perp$ HO hay H là hình chiếu của P lên phân giác của góc xOy. Vậy H cố định.

Bài 8. Cho đường tròn tâm I nội tiếp ΔABC tiếp xúc với các cạnh tại A’, B’, C’. Hai đường phân giác của góc B và C lần lượt cắt B’C’ tại D và E. BE và CD cắt nhau tại M. Chứng minh IM $\perp$ BC.



Giải

Gọi F là giao điểmcủa B’C’ với BC, ta có AA’ là đối cực của F đối với đường tròn (I) $\Rightarrow$ AA’ cũng là đối cực của F đối với AB, AC $\Rightarrow$ BCA’F là hàng điểm điều hòa

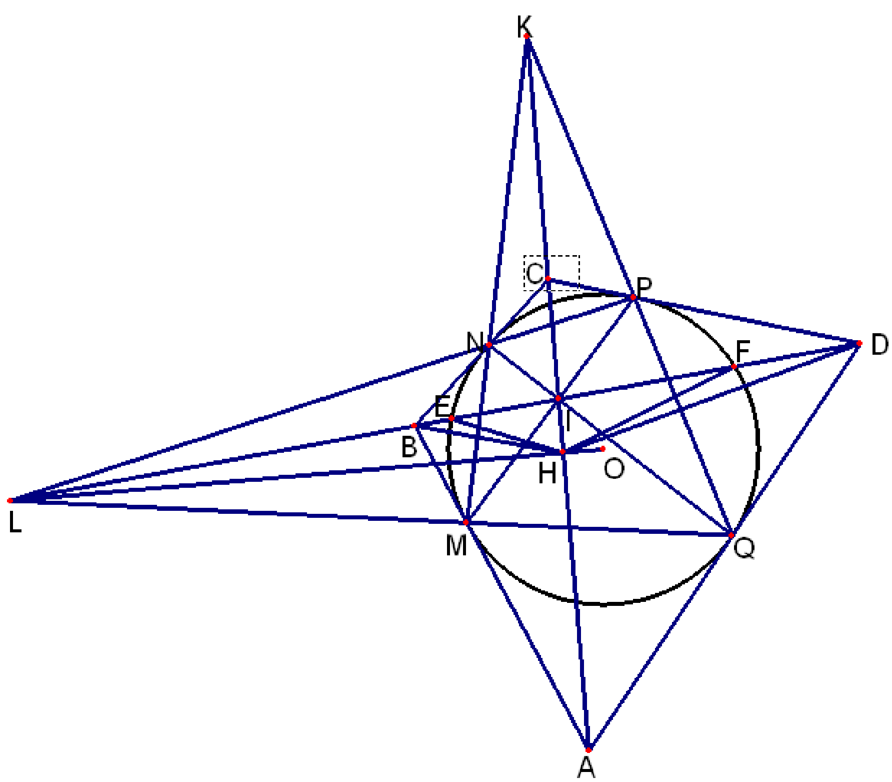
$\Rightarrow$ A’ liên hợp với F đối với MB, MC

Mà IM là đường đối cực của F đối với MB, MC nên A’ thuộc IM

Hay IM $\perp$ BC

Bài 9. (T7/317 tạp chí THTT) Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp (O). Gọi E, F là giao điểm của BD với (O). H là hình chiếu của O lên AC. Chứng minh: $\widehat{BHE} = \widehat{DHF}$

Giải



Gọi K = MN $\cap$ PQ,
L = NP $\cap$ MQ, I = MP $\cap$ NQ

$\Rightarrow$ KI là đối cực của L, LI là đối cực của K

L$\in$ NP $\Rightarrow$ C $\in$ KI

L$\in$ MQ $\Rightarrow$ A $\in$ KI

vậy A,C,K,I,H thẳng hàng

K $\in$ MN $\Rightarrow$ B $\in$ LI

K $\in$ PQ $\Rightarrow$ D $\in$ LI

vậy L,B,E,I,F, D thẳng hàng

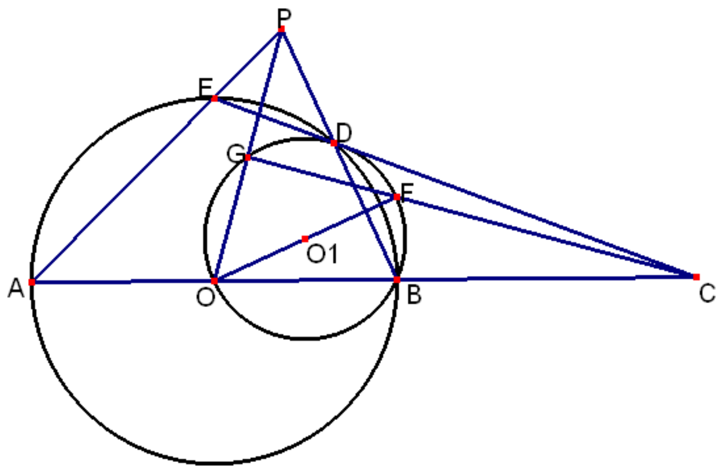
AC là đối cực của L $\Rightarrow$ AC $\perp$ OL $\Rightarrow$ O,H,L thẳng hàng

AC là đối cực của L đối với (O) $\Rightarrow$ LIEF là hđđh $\Rightarrow$ (H,LIEF) là chùm điều hòa ,lại có HL $\perp$ HI $\Rightarrow$ HI là phân giác góc EHF (1)

AC là đối cực của L đối với (O) $\Rightarrow$ AC là đối cực của L đối với CB, CD $\Rightarrow$ LIBD là hđđh $\Rightarrow$ (H, LIBD) là chùm điều hòa , lại có HL $\perp$ HI $\Rightarrow$ HI là phân giác của góc BHD (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BHE} = \widehat{DHF}$

Bài 10. (Trung Quốc 2006) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Từ điểm C trên AB nằm bên ngoài (O) kẻ cát tuyến CDE. Gọi OF là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔBOD có tâm là O_1. Đường thẳng CF cắt lại (O_1) tại G. Chứng minh O, A, E, G cùng nằm trên đường tròn.



Giải

C nằm trên đối cực của P

FD,FB là các tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow$ BD là đối cực của F

P thuộc BD $\Rightarrow$ F nằm trên đối cực của P

$\Rightarrow$ CF là đối cực của P

$\Rightarrow$ CF $\perp$ OP

mặt khác CF $\perp$ OG

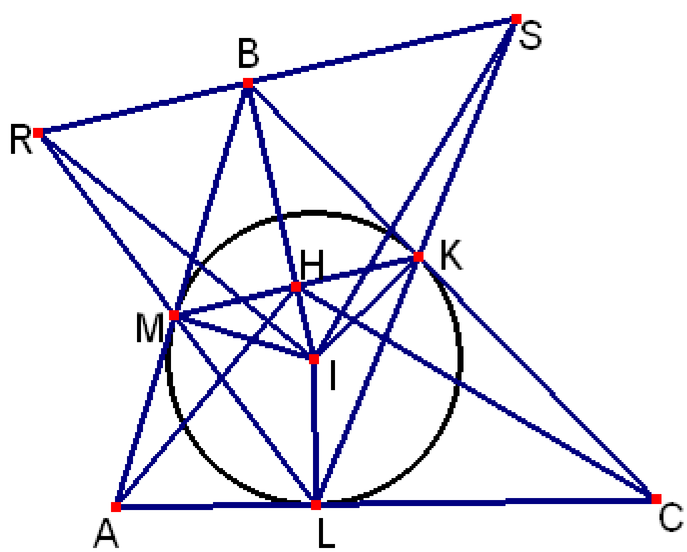
$\Rightarrow$ O,G, P thẳng hàng

Ta có

$$\overline{PE}.\overline{PA} = \overline{PD}.\overline{PB} = \overline{PG}.\overline{PO}$$

$\Rightarrow$ AEGO nội tiếp.

Bài 11. (IMO 98) Cho ΔABC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác tiếp xúcvới các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại K, L, M. Đường thẳng qua B và song song với MK cắt LM, LK lần lượt tại R, S. Chứng minh rằng góc RIS nhọn.



Giải

Dễ thấy MK là đối cực của B và RS là đối cực của H

S nằm trên đối cực của H $\Rightarrow$ H nằm trên đối cực của S

S nằm trên đối cực của C $\Rightarrow$ C nằm trên đối cực của S

vậy CH là đối cực của S

tương tự AH là đối cực của R

$\Rightarrow$ CH $\perp$ IS và AH $\perp$ IR

$\Rightarrow$ góc RIS bù với góc AHC

Gọi N là trung điểm của AC. Ta có

$$2\overrightarrow{HN} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC} =$$

$$\overrightarrow{HM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{KC}$$

Do AM, KC không song song với nhau nên 2HN < MA + KC = AC

$\Rightarrow$ góc AHC tù $\Rightarrow$ góc RIS nhọn

Bài 12. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn(O). AC cắt BD tại I. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AOD và COD cắt nhau tại J khác O. Chứng minh IJ $\perp$ OJ

Giải

Gọi K là giao điểm của AB và CD. KO cắt đường tròn tại M,N.

Ta có KA.KB = KC.KD $\Rightarrow$ K thuộc OJ là trục đẳng phương của 2 đường tròn (AOB),(COD)

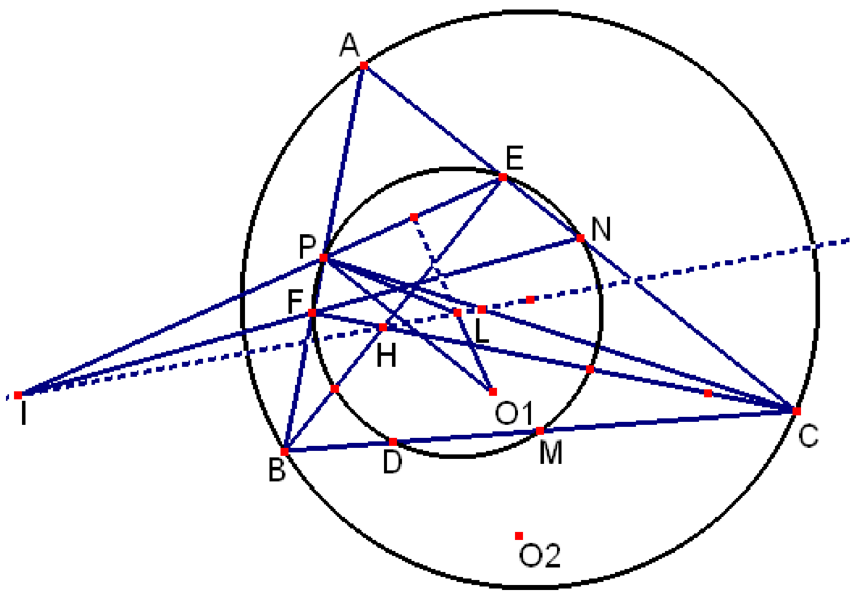
$$\Rightarrow \overline{KJ}.\overline{KO} = \overline{KM}.\overline{KN} \Rightarrow (\overline{KO} + \overline{OJ}).\overline{KO} = (\overline{KO} + \overline{OM})(\overline{KO} + \overline{ON})$$

$$\Rightarrow KO^2 + \overline{OJ}.\overline{KO} = KO^2 + \overline{KO}.\overline{ON} + \overline{KO}.\overline{OM} + \overline{OM}.\overline{ON} \Rightarrow \overline{OJ}.\overline{OK} = R^2$$

$\Rightarrow$ K,J,M,N là hàng điểm điều hòa hay J thuộc đối cực của K $\Rightarrow$ IJ là đối cực của K $\Rightarrow$ IJ $\perp$OK

Vậy IJ $\perp$ OJ

Bài 13. Cho ΔABC có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của AC và AB. EF cắt PN tại K. Chứng minh rằng AK vuông góc với đường thẳng Euler của ΔABC.



Giải

Gọi L là tâm đường tròn Euler của $\Delta ABC \Rightarrow$ HL là đường thẳng Euler của ΔABC.

Gọi I là giao điểmcủa PE và NF, ta có PENF nội tiếp $\Rightarrow$ AK là đối cực của I $\Rightarrow AK \perp LI$.

Ta cần chứng minh L, I, H thẳng hàng.

Xét 2 đường tròn (BPE), (FNC) có tâm lần lượt là O_1, O_2.

$P_{I/(O1)} = IP.IE = IF.IN = P_{I/(O2)}$

$P_{H/(O1)} = HB.HE = HF.HC = P_{H/O2)}$

O_1P là trung trực của BE

O_1L là trung trực của PE

$\Rightarrow$

$\widehat{PO_1L} = 90^0 - A, \quad \widehat{PLO_1} = 180^0 - C$

$$\Rightarrow \widehat{O_1PL} = 90^0 - B \Rightarrow \frac{O_1L}{\sin(90^0 - B)} = \frac{PL}{\sin(90^0 - A)} \Rightarrow O_1L = \frac{PL\cos B}{\cos A} = \frac{R\cos B}{2\cos A}$$

$$\Rightarrow O_1P = \frac{R\sin C}{2\cos A}$$

$$\Rightarrow P_{L/(O_1)} = O_1L^2 - O_1P^2 = \frac{R^2}{4\cos^2 A}(\cos^2 B - \sin^2 C)$$

Chứng minh tương tự ta có $P_{L/(O_2)} = \dfrac{R^2}{4\cos^2 A}(\cos^2 C - \sin^2 B)$

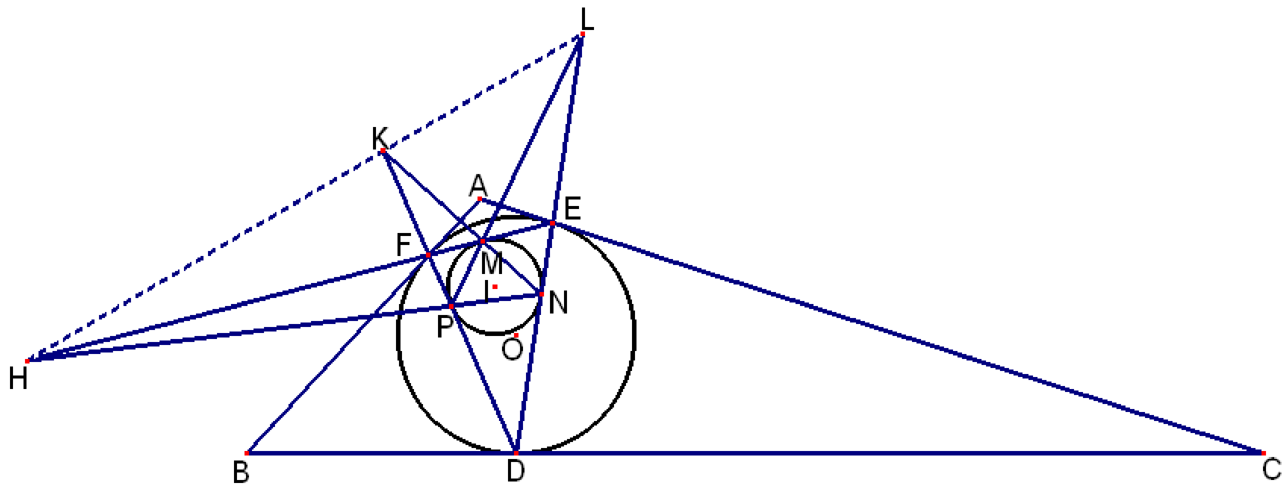
$\Rightarrow P_{L/(O_1)} = P_{L/(O_2)}$

Ba điểm I, H, L có cùng phương tích đối với 2 đường tròn (O_1), (O_2) nên chúng thẳng hàng.

Vậy AK vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Bài 14. Cho ΔABC, đường tròn nội tiếp tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường tròn nội tiếp ΔDEF tiếp xúc với EF, ED, DF lần lượt tại M, N, P. Chứng minh: AM, BP, CN đồng qui.

Giải



Gọi O, I lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và DEF.
Gọi H, K, L lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (EF,PN), (DF,MN), (DE,MP)
Ta có $\frac{ME}{MF}\cdot\frac{NF}{ND}\cdot\frac{PD}{PE}=1$ nên theo định lý Ceva thì DM,FN,EP đồng qui.
Các đường thẳng này có các cực lần lượt là H,L,K đối với đường tròn (I) $\Rightarrow$ H,L,K thẳng hàng.
Gọi A' là giao điểm của DM và PN ta có (HA'PN) = -1 $\Rightarrow$ (HMFE) = -1 $\Rightarrow$ M thuộc đối cực của H đối với đường tròn (O) mà A cũng thuộc đối cực của H đối với (O) nên AM là đối cực của H đối với (O).
Chứng minh tương tự ta cũng có BP là đối cực của K đối với (O), CN là đối cực của L đối với (O). Do H, K, L thẳng hàng nên AM, BP, CN đồng qui.

D. Bài tập tự luyện.

Bài 15. Cho ΔABC có 3 đường cao AA', BB', CC'. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác tiếp xúc với 3 cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC'.

a) Chứng minh DA_1, EB_1, FC_1 đồng qui
b) Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là giao điểm của các đường thẳng DA_1, EB_1, FC_1 với đường tròn (I). Chứng minh AA_2, BB_2, CC_2 đồng qui.

Bài 16. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng bất kỳ cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại D, E và cắt (O) tại P, Q. BD, CE cắt (O) lần lượt tại M,N. Gọi I là giao điểm của MP,NQ và K là giao điểm của MN,PQ. Chứng minh $AI \perp OK$.

Bài 17. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (I) nội tiếp tam giác tiếp xúc với 3 cạnh tại D, E, F.

a) Chứng minh OI là đường thẳng Euler của ΔDEF.
b) Các phân giác ngoài các góc A, B, C cắt các cạnh lần lượt tại M,N,P. Chứng minh M, N, P thẳng hàng và đường thẳng MNP vuông góc với OI.

Bài 18. Cho ΔABC. Đường tròn (I) nội tiếp tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. P là một điểm bất kỳ sao cho PA, PB, PC cắt (I) lần lượt tại X, Y, Z. Chứng minh DX, EY, FZ đồng qui.