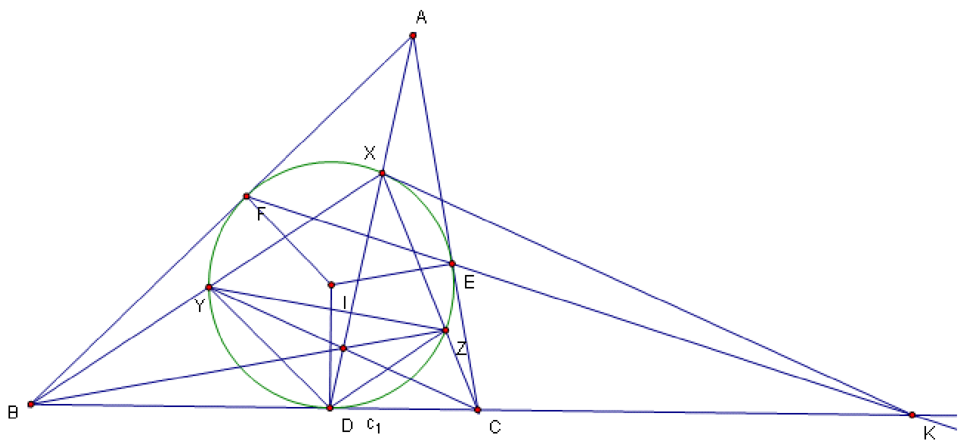
DIỄN ĐÀN TOÁN HỌC MATHSCOPE

Chuyên đề:

TỨ GIÁC ĐIỀU HÒA



Thành viên tham gia thực hiện:

1) ***Nguyễn Đình Tùng***, K45 THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, Hà Nội.
2) ***Nguyễn Hiền Trang***, K39 THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An.

Hà Nội, tháng 6 năm 2012

Sơ lược bài viết:

Lời mở đầu

I) Kiến thức cơ bản

1) Định nghĩa
2) Tính chất
3) Phụ lục: Một số bài toán cơ bản có liên quan

II) Ứng dụng của Tứ giác điều hòa

Ứng dụng 1: Chứng minh đồng quy và thẳng hàng.
Ứng dụng 2: Chứng minh đường thẳng luôn đi qua điểm cố định, điểm cố định.
Ứng dụng 3: Tứ giác điều hòa với các phép biến hình trong mặt phẳng.
Ứng dụng 4: Chứng minh các đặc tính Hình học khác (sự đòng dạng, vuông góc, tỉ số bằng nhau,...).

III) Bài luyện tập

IV) Tài liệu tham khảo

Lời kết

Lời mở đầu

Hàng điểm điều hòa - tỷ số kép là một khái niệm quan trọng trong hình học xạ ảnh bởi một trong những ý tưởng quan trọng nhất của nó là bất biến dưới các phép xạ ạnh. Tứ giác điều hòa là một tứ giác nội tiếp đặc biệt thú vị trong hình học, do đó nó là một topic không thể thiếu trong hình học Euclide cổ điển (nếu coi đường tròn như đường thẳng suy rộng thì tứ giác điều hòa là một khái niệm tự nhiên xuất phát từ hàng điểm điều hòa, tỷ số kép). Mặc dù khái niệm về tứ giác điều hòa đã có từ khá lâu, nhưng những nghiên cứu mang tính hệ thống đầu tiên về tứ giác điều hòa chỉ bắt đầu vào khoảng năm 1885 sau công trình của Robert Tucker đăng trên tờ "Mathematical Questions from the Educational Time". Rất nhiều các bài hình học trong các cuộc thi Olympic Toán gần đây chứa đựng trong nó các ý tưởng của tứ giác điều hòa. Trong bài viết này chúng tôi muốn giới thiệu tới bạn đọc các tính chất đặc biệt thú vị của tứ giác điều hòa và những ứng dụng đẹp trong giải toán.

Phần I: Kiến thức cơ bản.

1) *Định nghĩa*

Tứ giác nội tiếp $ABCD$ được gọi là điều hòa nếu tồn tại điểm M thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác sao cho *M(ACBD)=-1.*

Nhận xét: Tứ giác $ABCD$ là điều hòa thì với mọi điểm M thuộc (O) ta đều có *M(ACBD)=-1.*

<u>Chú ý:</u>

1) *M(ACBD)* được định nghĩa như sau: $M(ACBD) = \dfrac{\sin(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})}{\sin(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC})} : \dfrac{\sin(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MA})}{\sin(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MC})}$.

2) Trong phần này ta quy ước *(O)* là đường tròn ngoại tiếp tứ giác điều hòa $ABCD$.

2) *Tính chất*

Các tính chất của Tứ giác điều hòa đã được đề cập và chứng minh trong rất nhiều tài liệu. Bài viết này chỉ xin hệ thống lại một cách đầy đủ và không chứng minh:

a) Tứ giác $ABCD$ điều hòa $\Leftrightarrow AB.CD = AD.CB$

Nhận xét: 1) Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác điều hòa $ABCD$ ta có:

$$AC.BD = 2AB.CD = 2AD.CB$$

2) Vì tính chất này tương đương với $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{CB}{CD}$ nên ta đã sử dụng thuật ngữ "Tứ giác điều hòa".

b) Tứ giác $ABCD$ điều hòa khi và chỉ khi Δ_A, Δ_C, BD đồng quy hoặc đôi một song song. Trong đó Δ_A, Δ_C lần lượt là tiếp tuyến tại A và C của (O).

c) Tứ giác điều hòa *ABCD* nội tiếp (O) có. Chứng minh rằng (O) trực giao với đường tròn Apollonius tỉ số k dựng trên đoạn AC.

d) Cho tứ giác điều hòa ABCD. Gọi N là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng: $\dfrac{NA}{NC} = \left(\dfrac{BA}{BC}\right)^2 = \left(\dfrac{DA}{DC}\right)^2$

e) Cho tứ giác điều hòa ABCD. Gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh rằng:

$$\angle ADB = \angle MDC.$$

<u>Chú ý:</u> Đường thẳng DB trong bài toán này chính là đường đối trung của tam giác ADC. Đây cũng là một tính chất quan trọng và rất hay dùng của *Tứ giác điều hòa.*

3) ***Phụ lục***

Sau đây xin được nêu ra một số bài toán cơ bản hay được dùng trong các bài toán cần sử dụng Tứ giác điều hòa :

Bài toán 1: Cho tứ giác điều hòa ABCD nội tiếp (O); M là giao điểm hai tiếp tuyến tại B, D của (O). Đường thẳng song song với AB kẻ qua C cắt DB, DA lần lượt ở H, K. Chứng minh rằng: HC=HK.
Bài toán 2: Cho tứ giác điều hòa ABCD nội tiếp (O), gọi M là giao điểm hai tiếp tuyến tại B, D của (O) Gọi I là giao điểm của OM và BD. Khi ấy IB là phân giác của góc AIC.
Bài toán 3: Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O). $AB \cap CD = S, AD \cap BC = F, AC \cap BD = E.$
Tiếp tuyến SM, SN với đường tròn. Chứng minh rằng E, F, M, N thẳng hàng.
Bài toán 4: Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp (O). M, N, P, Q là tiếp điểm của (O) với AB, BC, CA, AD. Chứng minh rằng AC, BD, MN, PQ đồng quy.
Bài toán 5: Trên đường thẳng d cho 4 điểm A, C, B, D theo thứ tự đó. S là một điểm không thuộc d. một đường thẳng song song với SA theo thứ tự cắt các tia SB, SC, SD tại Y, X, Z. Chứng minh rằng (ABCD)=-1 khi và chỉ khi YX=YZ.
Bài toán 5 được coi như một định lý đã được đề cập tới trong chuyên đề *Hàng điểm điều hòa.* Nó là ý tưởng cho nhiều bài toán liên quan tới *Tứ giác điều hòa* mà chúng ta sẽ thấy rõ hơn qua các ví dụ và bài luyện tập!

Phần II: Ứng dụng của Tứ giác điều hòa.

Vận dụng *Tứ giác điều hòa*, chúng ta có thể xây dựng nhiều bài toán hay, những lời giải đẹp. Do đó mà các bài toán liên quan tới *Tứ giác điều hòa* thường xuyên xuất hiện trong các đề thi, từ chọn đội tuyển trường cho tới thi học sinh giỏi quốc gia (VMO), quốc tế (IMO). Sau đây chúng tôi xin nêu ra một số ví dụ điển hình:

Ứng dụng 1: Chứng minh đồng quy và thẳng hàng.

Ví dụ 1: Cho tam giác *ABC* không cân tại *A*, nội tiếp đường tròn *(O)*, *M* là trung điểm của *BC*. Các đoạn *N*, *P* thuộc đoạn *BC* sao cho *MN=MP*. Các đường thẳng *AM, AN, AP* theo thứ tự cắt *(O)* tại *X, Y, Z*. Chứng minh rằng: *BC, YZ* và tiếp tuyến tại *X* của *(O)* đồng quy.

Lời giải:

Lấy *K* thuộc *(O)* sao cho *AK//BC*. (*)

Gọi *S* là giao điểm các tiếp tuyến tại *K, X* của *(O)*.

Từ (*) kết hợp với điều kiện *MB=MC, MN=MP,* ta suy ra:

$A(BCXK)=-1$

$A(YZXK)=-1$

Suy ra các tứ giác *BXCK, ZXYK* điều hòa.

Từ đó suy ra *BC, YZ* cùng đi qua *S*. (Tính chất (2))

Điều đó có nghĩa là *BC, YZ* và tiếp tuyến với *(O)* tại *X* đồng quy.

(đpcm)

Nhận xét: Ở ví dụ này, các yếu tố có trong giả thiết: trung điểm của đoạn thẳng, hai đường thẳng song song gợi ta nghĩ tới việc sử dụng bài toán 5 (trong mục I.3)!

Ví dụ 2: Cho đường tròn *(I)* nội tiếp tam giác *ABC*, tiếp xúc với các cạnh *BC, CA, AB* lần lượt ở *D, E, F*. Gọi *M* là giao điểm thứ hai của đường thẳng *AD* và đường tròn *(I); N, P* theo thứ tự là giao điểm thứ hai của *MB, MC* và *(I)*. Chứng minh rằng *MD, NE, PF* đồng quy.

Lời giải:

Bổ đề : Cho lục giác nội tiếp *ABCDEF*. Chứng minh rằng *AD, BE, CF* đồng quy khi và chỉ khi $\frac{AB.CD.EF}{BC.DE.FA}=1$.

Chứng minh:

Xét tam giác *AEC* và các điểm *D, B, F*. Theo định lí *Ceva* dạng lượng giác và theo định lí hàm số *sin*, ta có:

AD, EB, CF đồng quy khi và chỉ khi:

$$\frac{\sin\angle DAE}{\sin\angle DAC}.\frac{\sin\angle BEC}{\sin\angle BEA}.\frac{\sin\angle FCA}{\sin\angle FCE}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{DE}{DC}.\frac{BC}{BA}.\frac{FA}{FC}=1$$

$$\Leftrightarrow AB.CD.EF=BC.DE.FA$$

Trở lại bài toán:

Ta có:
ME.DP=EP.MD (do tứ giác *MEPD* điều hòa)
NF.MD=FM.ND (do tứ giác *FMDN* điều hòa)
Suy ra: *ME.DP.NF.MD=EP.MD.FM.ND*
Hay *ME.PD.NF=EP.DN.FM* (rút gọn hai vế đi MD)
Theo bổ đề trên ta có đpcm.
Nhận xét: Mấu chốt của bài toán này là nhớ được bổ đề trên (đây là một bổ đề khá quen thuộc).

Ví dụ 3: Cho tam giác *ABC* và điểm *M* . Các đường thẳng *AM, BM, CM* theo thứ tự cắt *BC, CA, AB* tại *D, E, F*. Lấy *X* thuộc *BC* sao cho $\angle AMX = 90^o$. *Y, Z* theo thứ tự là điểm đối xứng của *M* qua *DE, DF*. Chứng minh rằng *X, Y, Z* thẳng hàng.
Lời giải:
Nhận xét: Ở bài này, để chứng minh *X, Y, Z* thẳng hàng ta nghĩ tới việc sử dụng tính chất 2 của *Tứ giác điều hòa*. Để đạt được mục đích này, ta cần phải làm xuất hiện *Tứ giác điều hòa* và hiển nhiên phải xuất hiện một đường tròn. Để ý giả thiết, sự đối xứng của *M* qua *DE, DF* và một cách tự nhiên ta có lời giải sau:

Gọi *T* là điểm đối xứng với *M* qua *BC*.
Ta có:
DY=DZ=DM=DT nên bốn điểm *T, M, Y, Z* cùng nằm trên đường tròn tâm *D*.
Mặt khác, vì $\angle AMX = 90^o$ nên *XM* tiếp xúc với *(D)* tại *M*.
Vì *M, T* đối xứng với nhau qua *BC* nên *XT* tiếp xúc với *(D)* tại *T*.
Ta có: *M(DXEF)=-1* (đây là một hàng cơ bản)
$\Rightarrow$*M(XTYZ)=-1* (vì *MX, MT, MY, MZ* theo thứ tự vuông góc với *DM, DX, DE, DF*).
Suy ra: *M(MTYZ)=-1*
Hay tứ giác *MYTZ* điều hòa.
$\Rightarrow$*X, Y, Z* thẳng hàng.
(đpcm).

Ứng dụng 2: Chứng minh đường thẳng luôn đi qua điểm cố định, điểm cố định.

Ví dụ 4: Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn *(O)* có *A* cố định và *B, C* thay đổi trên *(O)* và luôn song song với một đường thẳng cố định cho trước. Các tiếp tuyến của *(O)* tại *B, C* cắt nhau tại *K*. Gọi *M* là trung điểm của *BC, N* là giao điểm của *AM* với *(O)*. Chứng minh rằng đường thẳng *KN* luôn đi qua một điểm cố định.
Lời giải:
Gọi giao điểm thứ hai của *KN* với *(O)* là *I*.
Tứ giác *IBNC* điều hòa nên ta có *A(IBNC)=-1*.
Mặt khác, *M* là trung điểm của *BC* nên *AI//BC*, suy ra điểm *I* cố định.
Vậy đường thẳng *KN* luôn đi qua một điểm cố định (điểm *I*).

Ví dụ 5: Hai đường tròn *(O)* và *(O')* cắt nhau tại hai điểm phân biệt *A*, *B*. Lấy *M* thuộc *(O)*, *MA*, *MB* cắt *(O')* tại *N*, *P*. Gọi *Q* là trung điểm của *NP*. Chứng minh rằng *MQ* luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải:

Gọi giao điểm thứ hai của *MQ* với đường tròn *(O)* là C.

Dễ thấy tứ giác *MACB* điều hòa nên *AM* và các tiếp tuyến tại *A, B* của *(O)* đồng quy.

Vậy *MN* luôn đi qua giao điểm các tiếp tuyến tại *A, B* của *(O)* cố định.

(đpcm)

Ví dụ 6: Trên mặt phẳng, cho đường tròn *(O)* và hai điểm cố định *B, C* trên đường tròn này sao cho *BC* không là đường kính của *(O)*. Gọi *A* là một điểm di động trên đường tròn *(O)* và *A* không trùng với hai điểm *B, C*. Gọi *D, K, J* lần lượt là trung điểm của *BC, CA, AB* và *E, M, N* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *A, B, C* trên *BC, DJ, DK*.

Chứng minh rằng các tiếp tuyến tại *M, N* của đường tròn ngoại tiếp tam giác *EMN* luôn cắt nhau tại điểm T cố định khi *A* thay đổi trên *(O)*.

(Vietnam TST 2012)

Lời giải:

Gọi *H* là trực tâm của tam giác *ABC*. Ta xét trường hợp *H* nằm trong tam giác, các trường hợp còn lại xét tương tự.

Trước hết, ta chứng minh rằng *T* nằm trên đường thẳng *OD*.

Dễ dàng thấy *H* nằm trên các đường thẳng *BM* và *CN* nên các điểm *D, M, N, H, E* cùng thuộc đường tròn đường kính *HD*.

Đường thẳng qua *H*, song song với *BC* cắt đường thẳng *OD* tại điểm *S*. Do nên *S* cũng thuộc đường tròn đường kính *HD*. Gọi *X* là hình chiếu của *E* lên *AD* thì *X* cũng thuộc đường tròn này.

Ta sẽ chứng minh các tứ giác *DMSN*, *XMEN* là các tứ giác điều hòa.

Thật vậy, do *HS//BC* và *D* là trung điểm của *BC* nên theo tính chất về chùm điều hòa, ta có *(HS, HD, HC, HB)=-1* hay tứ giác *DMSN* là tứ giác điều hòa. Theo tính chất của tứ giác điều hòa ta có *T* nằm trên đường thẳng *DO*.

Dễ thấy tứ giác *DEJK* là hình thang cân nên $\Delta ENK \sim \Delta EMJ (g.g)$.

Suy ra $\frac{EM}{EN}=\frac{EJ}{EK}=\frac{AB}{AC}$. Hơn nữa, ta có:

$\frac{XM}{XN}=\frac{\sin\angle XNM}{\sin\angle XMN}=\frac{\sin\angle XDM}{\sin\angle XDN}=\frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle DAB}=\frac{AB}{AC}$.

Do đó, $\frac{EM}{EN}=\frac{XM}{XN}$ hay tứ giác *XMEN* điều hòa. Ta có được *T* nằm trên *EX* hay *T* chính là giao điểm của *EX* và *AO*.

Ta sẽ chứng minh khoảng cách từ T đến D không đổi.

Gọi B' là hình chiếu của B trên AC. Do $\Delta AHX \sim \Delta ADE$ nên $AX.AD=AH.AE=AB'.AC$ hay tứ giác CDXB' nội tiếp.

Suy ra $\angle DXC=\angle DB'C=\angle DCA \Rightarrow DX.DA=DC^2$.

Theo định lí Thales thì $DT=\frac{AE.DX}{AX}=\frac{AD.DX}{AH}=\frac{DC^2}{AH}$.

Dễ thấy DC, AH đều không đổi nên độ dài đoạn DT không đổi hay T là điểm cố định.
Ta có đpcm.

Ứng dụng 3: Tứ giác điều hòa với Các phép biến hình trong mặt phẳng.

Ví dụ 7: Trong mặt phẳng cho hai đường tròn cố định (O) và (O') tiếp xúc trong với nhau tại điểm M và bán kính của đường tròn (O') lớn hơn bán kính đường tròn (O). Xét điểm A nằm trên đường tròn (O') sao cho ba điểm O, O' và A không thẳng hàng. Từ A kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm. Đường thẳng MB, MC lần lượt cắt lại (O') tại E và F. Gọi D là giao điểm cuat tiếp tuyến tại A của (O') và đường thẳng EF. Chứng minh rằng điểm D di động trên một đường thẳng cố định, khi điểm A di chuyển trên đường tròn (O') sao cho ba điểm O, O' và A không thẳng hàng.

(VMO 2003)

Lời giải:
Gọi A' là giao điểm thứ hai của AM và (O). Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) nên tứ giác A'BMC là tứ giác điều hòa.
Suy ra tiếp tuyến tại A', M của (O) và đường thẳng BC đồng quy tại một điểm. Giả sử điểm đó là D'.
Như vậy D' di động trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M và tiếp tuyến đó cố định. Phép vị tự tâm M, biến (O) thành (O'), cho nên biến BC thành đường thẳng EF, tiếp tuyến tại A' thành tiếp tuyến tại A và biến D' thành D. Vậy tập hợp các điểm D nằm trên đường thẳng MD' là tiếp tuyến tạ M của (O).

Ví dụ 8: Cho đường tròn (O) có đường kính AB và một điểm C nằm trên (O), khác A, B. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại M. Gọi giao điểm của tiếp tuyến của (O) tại B và C là N. Đường thẳng AN cắt (O) tại D và cắt BC tại F. Đường thẳng OC cắt đường thẳng qua M và song song với AB tại I. Đường thẳng OD cắt đường thẳng qua N và song song với AB tại J. Gọi K là giao điểm của MD và NC. Giả sử IJ cắt MN tại E.
Chứng minh rằng: K là tâm của đường tròn đi qua bốn điểm C, D, E, F.

Lời giải:
Vì NC, NB là tiếp tuyến của (O) kẻ từ N, NDA là một cát tuyến của (O) nên tứ giác ACDB là tứ giác điều hòa. Suy ra tiếp tuyến tại A, D của (O) và đường thẳng BC đồng quy, tức là MD là tiếp tuyến của (O) tại D.
Do đó ta có KC=KD.
Dễ thấy: IM=IC và JN=JD; F là trực tâm của tam giác OMN.
Gọi E' là giao điểm của OF với MN. Ta chứng minh E' chính là điểm E.
Ta có: $MD^2 = MX.MO = ME'.MN = MB.MC$
Qua phép nghịch đảo $N_M^{MA^2}$ thì $B \to C; N \to E'$ nên BC biến thành đường tròn (MCE') tiếp xúc với (O) tại C và tiếp xúc với AM tại M. Suy ra I là tâm của đường tròn (MCE').

Chứng minh tương tự ta có J là tâm của đường tròn (NDE’). Do đó đường tròn (MCE’) và (NDE’) tiếp xúc với nhau tại E’. Suy ra MN và IJ cắt nhau tại E’. Từ đó $E \equiv E'$.
Khi đó (MCE) và (MDE) tiếp xúc với nhau tại E. Do ddos K là tâm đẳng phương của (O), (I) và (J) nên KE=KC=KD. Vậy K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE. (1)
Vì $MF.MY = MX.MO = MA^2 = MD^2 = ME.MN = MC.MB$ nên phép nghịch đảo $N_M^{MA^2}$ biến F thành Y, C thành B, B thành D và E thành N. Chú ý rằng B, Y, D, N đồng viên (cùng nằm trên đường tròn đường kính NB) nên F, C, E, D đồng viên.
(2)
Từ (1) và (2) suy ra K là tâm đường tròn đi qua bốn điểm C, D, E, F.

(đpcm)

Ứng dụng 4: Chứng minh các đặc tính Hình học khác (sự đồng dạng, vuông góc, tỉ số bằng nhau,...).

Ví dụ 9: Cho tam giác ABC, P là điểm bất kì nằm trong tam giác ABC. Gọi B’, C’ lần lượt là điểm đối xứng với P qua AC, AB; E, F lần lượt là hình chiếu của P trên AC, AB. Gọi X là giao điểm khác A của hai đường tròn (AB’C’) và đường tròn đường kính AP. Chứng minh rằng tứ giác PEXF là tứ giác điều hòa.
Lời giải:
Gọi J là giao điểm của FP và AC, K là giao điểm của EP và AB.
Ta có:
(AB’,AC’) = 2(AE,AF) = (KB’,KC’) (mod π) nên K nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AB’C’.
Tương tự, ta có: J nằm trên đường tròn (AB’C’).
Xét ba đường tròn (AEF), (AKJ) và đường tròn đường kính KJ có ba trục đẳng phương là AX, EF, KJ nên chúng đồng quy tại điểm L.
Gọi M là giao điểm của AP với KJ thì A(XPEF) = (LMJK) = −1 nên tứ giác PEXF điều hòa.

(đpcm)

Ví dụ 9: Giả sử *ABCD* là một tứ giác nội tiếp. Gọi *P, Q, R* là chân các đường vuông góc hạ từ *D* lần lượt lên các đường thẳng *BC, CA, AB.* Chứng minh rằng *PQ=QR* khi và chỉ khi phân giác của các góc ABC, ADC cắt nhau trên *AC.*

(IMO 2003)

Lời giải:
Ta có: *P, Q, R* thẳng hàng (đường thẳng Simson).
Qua *B* vẽ đường thẳng song song với *PR* cắt *AC* ở *M.*
Phân giác của góc *ABC* và *ADC* cắt nhau tại một điểm trên *AC* khi và chỉ khi $\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CD}$ hay tứ giác *ABCD* điều hòa.
QP=QR khi và chỉ khi *(MQAC)=-1*
Vậy ta chứng minh tứ giác *ABCD* điều hòa khi và chỉ khi *(MQAC)=-1*

Ta có: $\frac{AQ}{AM}=\frac{AB}{\mathrm{AR}};\frac{CM}{CQ}=\frac{CB}{CP}$

Mặt khác: $\Delta DAR \sim \Delta DCP(g.g)$ nên $\frac{\mathrm{AR}}{CP}=\frac{DA}{DC}$.

Do đó:

$(MQAC)=-1 \Leftrightarrow \frac{AM}{AQ}=\frac{CM}{CQ} \Leftrightarrow \frac{AB}{\mathrm{AR}}=\frac{CB}{CP} \Leftrightarrow \frac{AB}{CB}=\frac{\mathrm{AR}}{CP} \Leftrightarrow \frac{AB}{CB}=\frac{AD}{CD}$.

(đpcm)

Ví dụ 10: Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC theo thứ tự tiếp xúc với BC, CA tại D, E. AD cắt lại (I) tại P. Giả sử $\angle BPC=90^0$. Chứng minh rằng $EA+AP=PD$.

Lời giải:

Ta bỏ qua trường hợp đơn giản AB=AC.

Đặt K=BC$\cap$EF; Q=PC$\cap$(I) (Q Khác P).

Dễ thấy: (BCDK)=-1 $\Rightarrow$ P(BQDK)=-1.

Từ đó, với chú ý rằng $\angle BPC=90^0$, ta suy ra:

$\angle QPK=\angle QDP \Rightarrow \angle QDP=\angle QPD \Rightarrow QP=QD$

Mặt khác, tứ giác PDQE điều hòa.

Từ đó theo định lí Ptolemy, ta có:

2PE.DQ=DE.PQ.

Từ (1) và (2) suy ra 2PE=DE.

Từ đó với chú ý các tam giác AEP, ADE đồng dạng, ta có:

2AE=AD; 2AP=AE.

Suy ra: EA+AP=2AP+AP=4AP-AP=AD-AP=PD.

(đpcm)

Ví dụ 11: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với AC<AB. Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B, C cắt nhau tại T. Đường thẳng qua A và vuông góc với AT cắt BC tại S. Trên đường thẳng ST lấy các điểm sao cho $TC_1=TB_1=TB$, nằm giữa S và T. Chứng minh rằng $\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1$.

*(Tạp chí **Toán học và tuổi trẻ**, T8/384, tháng 6 năm 2009)*

Lời giải:

Ta thấy do $\angle CBT=\angle CAB$ nên $\angle TBA=\angle CBT+\angle ABC=\angle CAB+\angle ABC=180^0-\angle BCA$.

Nhận xét rằng, nếu gọi M là giao điểm của OT và BC thì $\angle BAT=\angle CAM$ (Tính chất 2e)

Từ đây, áp dụng định lí sin cho các tam giác BAT và CAM ta được:

$$\frac{TB}{TA}=\frac{\sin\angle BAT}{\sin\angle TBA}=\frac{\sin\angle CAM}{\sin\angle BCA}=\frac{MC}{MA} \qquad (1)$$

Do $TB=TC_1$ nên từ (1) ta có $\frac{TC_1}{TA}=\frac{MC}{MA}$ (2)

Mặt khác, vì $\angle TMS=\angle TAS=90^0$ nên bốn điểm T, M, A, S cùng nằm trên một đường tròn, suy ra $\angle AMC=\angle ATC_1$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\Delta MAC \sim \Delta TAC_1$. Từ đó $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{MC}{TC_1} = \frac{AC}{AC_1}$, kết hợp với $\angle ACB = \angle AC_1B_1$ ta được $\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1$. (đpcm)

Nhận xét: Mấu chốt của bài toán này là kết quả $\angle BAT = \angle CAM$. Đây là một trong những tính chất quan trọng và khá đẹp của Tứ giác điều hòa.

Ví dụ 12: Cho tam giác ABC, đường cao AH, E là trung điểm của AH. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC tại D. DE cắt lại (I) tại F. Chứng minh rằng FD là phân giác của góc BFC.

*(Diễn đàn Toán học **MathScope**)*

Lời giải:

Gọi M, N theo thứ tự là tiếp điểm của (I) với AB, AC;
AD giao với (I) tại điểm thứ hai P; Kẻ đường kính DK của (I).
Ta có:

$$\begin{cases} DK // AH \\ EA = EH \end{cases} \Rightarrow D(HAEK) = -1 \Rightarrow D(DPFK) = -1$$

$\Rightarrow$ Tứ giác DFPK là tứ giác điều hòa $\Rightarrow$ FK và tiếp tuyến tại P, D của (I) đồng quy. (1)

Mặt khác: Tứ giác MPND điều hòa $\Rightarrow$ MN, tiếp tuyến tại P, D của (I) đồng quy.(2)

Từ (1) và (2) suy ra FK, MN, BC đông quy (tại S).

Vì AD, CM, BN đồng quy tại một điểm $^{(*)}$ (dễ dàng chứng minh nhờ định lí Cêva)

$\Rightarrow$ (SDBC)=-1

$\Rightarrow$F(SDBC)=-1

$\Rightarrow$FD là phân giác của góc BFC (Vì $FD \perp SK$).

(đpcm)

(*) điểm này được gọi là điểm Gergonne của tam giác ABC.

Phần III: Bài tập luyện tập.

- *Đề bài*

Bài tập 1: Cho tam giác ABC, D là trung điểm của cạnh BC và E, Z là hình chiếu của D trên AB, AC. Gọi T là giao điểm của các tiếp tuyến tại E, Z của đường tròn đường kính AD. Chứng minh rằng: TB=TC.

Bài tập 2: Cho tam giác ABC nội tiếp (O), ngoại tiếp (I). Gọi M là tiếp điểm của BC và (I), D là giao điểm thứ hai của AM và (O). Chứng minh rằng nếu OI vuông góc với AM thì tứ giác ABCD điều hòa.

Bài tập 3: Cho tứ giác nội tiếp ABCD. Đặt $E = AC \cap BD; F = AD \cap BC$. M là trung điểm của CD. EF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB tại N (M, N thuộc hai nửa mặt phẳng khác nhau bờ AB).

Chứng minh rằng: $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$.

Bài tập 4: Từ điểm A nằm ngoài (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC (B, C là các tiếp điểm). Lấy T bất kì thuộc cung nhỏ BC. Kẻ TH vuông góc với BC (tại H). Chứng minh TH là phân giác của góc MHN (M, N là giao điểm của tiếp tuyến tại T của (O) với AB, AC).

Bải tập 5: Từ A nằm ngoài (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là tiếp điểm). AO cắt (O) ở D. Kẻ BX vuông góc với CD (X thuộc CD). Gọi Y là trung điểm của XB, YD cắt (O) tại điểm thứ hai Z. Chứng minh rằng $\angle AZC = 90^o$

Bải tập 6: Trong mặt phẳng cho hai đường tròn ω_1 và ω_2 cắt nhau tại A, B. Một tiếp tuyến chung của hai đường tròn tiếp xúc với ω_1 ở P và ω_2 ở T. Các tiếp tuyến tại P và T của đường tròn ngoại tiếp tam giác APT cắt nhau tại S. Gọi H là điểm đối xứng của B qua PT. Chứng minh rằng A, H, S thẳng hàng.

(Vietnam TST 2001)

Bải tập 7: Trong mặt phẳng cho hai đường tròn ω_1 tâm O và ω_2 tâm O' cắt nhau tại hai điểm A, B. Các tiếp tuyến tại A, B của ω_1 cắt nhau tại K. Giả sử M là một điểm nằm trên ω_1 nhưng không trùng với A và B. Đường thẳng AM cắt lại ω_2 tại P, đường thẳng KM cắt ω_1 tại C và đường thẳng AC cắt ω_2 tại Q.

b) Chứng minh rằng trung điểm PQ thuộc đường thẳng MC.
c) Đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên ω_1.

(Vietnam TST 2002)

Bài tập 8: Cho tam giác ABC, đường cao AH, K là trung điểm của AH. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC tại D. DK cắt lại (I) tại T. Chứng minh rằng đường tròn nội tiếp tam giác TBC tiếp xúc với (I).

(Short list IMO 2006)

Bài tập 9: Cho tam giác ABC. Trung tuyến AM cắt đường tròn nội tiếp (I) tại X, Y. Các điểm Z, T thuộc (I) sao cho XZ//YT//BC. Đường thẳng AZ giao với (I) tại điểm thứ hai là J. Chứng minh rằng tứ giác JYTX là tứ giác điều hòa.

Bài tập 10: Đường tròn tâm J bàng tiếp góc A của tam giác ABC tiếp xúc với BC và AC lần lượt tại M và N. Đường thẳng BJ cắt (J) tại E, đường thẳng qua J vuông góc với AM cắt (J) tại F (E và F nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AM chứa điểm B).
Chứng minh rằng FEMN là tứ giác điều hòa.
Bài tập 11: Cho tam giác ABC và điểm J là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A của tam giác. Đường tròn này tiếp xúc với AB,AC,BC tại K,L,M theo thứ tự. LM cắt BJ tại F, KM cắt CJ tại G. Gọi S,T lần lượt là giao điểm của AF, AG với BC. Chứng minh rằng M là trung điểm của ST.
(Bài toán 1, *IMO 2012*)

• *Lời giải, hướng dẫn.*

Bài tập 1:

Gọi F là giao điểm của DT với đường tròn đường kính AD.

Ta có tứ giác EDZF điều hòa, suy ra A(BCFD)=A(EDZF)=-1 (Vì A nằm trên đường tròn ngoại tiếp tứ giác EDZF).

Mặt khác, vì D là trung điểm của BC nên AF//BC, suy ra DT vuông góc với BC. Suy ra tam giác TBC cân tại T hay TB=TC.

(đpcm)

Bài tập 2:

Ta chỉ cần xét với tam giác không cân tại A. Khi đó OI cắt BC tại F. Gọi N, P là tiếp điểm của (I) với AC, AB.

Ta có FM là tiếp tuyến của (I), suy ra đường đối cực của F đi qua M. Mà OI vuông góc với AM nên AM là đường đối cực của F đối với (I) $\Rightarrow$ đường đối cực của A đối với (I) đi qua F, hay F, N, P thẳng hàng.

Lại có AM, BN, CP đồng quy tại một điểm (dễ thấy theo định lí Cêva) neen (FMBC)=-1. Do đó AM là đường đối cực của F đối với (O). Suy ra FA là tiếp tuyến của (O). Vì A đối xứng với D qua FO nên FD là tiếp tuyến của (O).

Vậy tứ giác ABCD điều hòa. (đpcm)

Bài tập 3:

Gọi (O') là đường trò ngoại tiếp tam giác ABM.

Đặt $J=EF\cap BC$; $I=EF\cap CD$; $K=AB\cap CD$.

Ta có: (KJAB)=-1 $\Rightarrow$ (KIDC)=-1 (Xét phép chiếu xuyên tâm F).

Từ đó, với chú ý rằng M là trung điểm của CD, theo hệ thức Maclaurin, ta có:

$\overline{KM}.\overline{KI}=\overline{KC}.\overline{KD}$ (1)

Mặt khác: $\overline{KC}.\overline{KD}=\overline{KA}.\overline{KB}$ (2)

Từ (10 và (2) suy ra I thuộc (O').

Từ đó với chú ý rằng I(MNAB)=I(KJAB)=-1, suy ra AMBN là tứ giác điều hòa. Do đó, ta có:

$\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}$.

Bài tập 4:

MN và BC cắt nhau ở S.

Kẻ tiếp tuyến ST' của (O) (T khác T'), P là giao điểm của SC và TT'.

Tứ giác BTCT' điều hòa $\Rightarrow$ A, T, T' thẳng hàng.

Ta có:

H(STMN)=A(STMN)=A(SPBC)=-1

Mà HT $\perp$ SC $\Rightarrow$HT là phân giác của góc MHN.

(đpcm)

Bài tập 5:

AZ giao với (O) tại điểm thứ hai là E.

Vì tứ giác ZBEC điều hòa nên D(ZBEC)=-1.

Với lưu ý rằng Y $\in$ DZ; X $\in$ DC; YB=YX, ta có:

$XB//DE\Rightarrow\angle EDC=90^0\Rightarrow\angle CZE=\angle CDE=90^0\Rightarrow\angle AZC=90^0$.

(đpcm)

Bài tập 6: (Hướng dẫn)

Ta chỉ cần chứng minh tứ giác APHT là tứ giác điều hòa. Ta thực hiện hai bước chứng minh sau:

Bước 1: Chứng minh tứ giác APHT là tứ giác nội tiếp.

Bước 2: Chứng minh $\frac{AP}{AT} = \frac{HP}{HT}$.

Chú ý $\begin{cases} DK // AH \\ EA = EH \end{cases} \Rightarrow D(HAEK) = -1 \Rightarrow D(DPFK) = -1$

Bài tập 7: (Hướng dẫn)

a) Gọi N là giao điểm của MK và PQ. Ta chứng minh N là trung điểm của PQ.

Chú ý: 1) Tứ giác AMBC là tứ giác điều hòa.

2) Tam giác APQ có cát tuyến là K, M, N (Ta sử dụng định lí Menelaus)

b) Gọi J là giao điểm của AK và ω_2. (J cố định)

Ta chứng minh tứ giác BQJP điều hòa. Từ đó suy ra PQ đi qua giao điểm I của hai tiếp tuyến vẽ từ B, J của ω_2 cố định.

Bài tập 8: (Hướng dẫn)

Ta có bổ đề sau: Nếu đường tròn (O') đi qua điểm T thuộc đường trong (O), tiếp xúc với dây AB của đường tròn (O) tại C và TC đi qua trung điểm M của cung AB không chứa T của đường tròn (O) thì (O') tiếp xúc trong với (O) (tại T). (1)

Hoàn toàn giống với ví dụ 7, ta chứng minh được kết quả sau: TD là phân giác của góc BTC. (2)

Kết hợp (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 9: (Hướng dẫn)

Ta sử dụng bổ đề sau:

Bổ đề: Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) theo thứ tự tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. Đường thẳng DI cắt EF tại N. Chứng minh rằng AN đi qua trung điểm của BC.

Bổ đề trên có thể chứng minh bằng phương pháp Vector hoặc dùng kiến thức hình học 9.

Bài tập 10 và **bài tập 11:** Đây là hai bài toán có mối liên hệ chặt chẽ với nhau. Hy vọng mọi người có thể nghiên cứu và trao đổi những vấn đề liên quan xung quanh hai bài toán này!

Phần IV: Tài liệu tham khảo

1) Bài viết của thầy Nguyễn Đăng Phất, đăng trong *Hội thảo trường hè ở KHTN* năm 2004. Đây gần như là bài báo tiên phong viết về *Tứ giác điều hòa* ở Việt Nam
2) *Tài liệu giáo khoa chuyên Toán 10* (Hình học). Tác giả: Đoàn Quỳnh – Văn Như Cương – Trần Nam Dũng – Nguyễn Minh Hà – Đỗ Thanh Sơn – Lê Bá Khánh Trình.
3) Tài nguyên Internet, đặc biệt là các diễn đàn sau: diễn đàn Toán học *MathScope*, *Art of Problem Solving*, diễn đàn Toán học *VMF*.
4) Các đề thi học sinh giỏi THPT.
5) Tạp chí *Toán học và tuổi trẻ* và một số tạp chí nước ngoài.

Lời kết

Mặc dù đã rất cố gắng song do trình độ còn hạn chế nên bài viết không thể tránh khỏi những thiếu xót, rất mong có được sự góp ý của các bạn đọc. Hy vọng tài liệu nhỏ này sẽ giúp ích cho các bạn trong quá trình học tập, nghiên cứu Toán. Cuối cùng, xin cảm ơn thầy giáo, ThS. Hà Duy Hưng, giáo viên trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội đã đọc bản thảo và cho những ý kiến góp ý bổ ích!

Hà Nội, 25/ 5/ 2012