CHUYÊN ĐỀ : TỨ GIÁC NỘI TIẾP

Đinh Văn Cảnh
Trường THPT Nguyễn Trung Trực, Tri Tôn, An Giang

Tứ giác nội tiếp là một kiến thức khá cơ bản và quan trọng của chương trình hình học THCS, nó có nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán hình học phẳng. Một số kết quả hình học nổi tiếng chỉ được giải bằng tứ giác nội tiếp. Bài viết này sẽ trình bày một số vấn đề liên quan đến tứ giác nội tiếp, giúp cho các bạn học sinh THCS nâng cao kĩ năng giải toán hình học và có nền tảng vững chắc để học tốt môn hình học sau này.

Trong bài viết, tác giả cố gắng trình bày lời giải sao cho tự nhiên, hướng đi rõ ràng để bạn đọc dễ nắm bắt được ý tưởng của lời giải. Khi hiểu được ý tưởng của lời giải, các bạn hãy tự đúc kết kinh nghiệm cho riêng mình.

Hi vọng bài viết sẽ là tài liệu tham khảo hữu ích của đông đảo thầy cô và các bạn học sinh THCS, đặc biệt là những bạn chuẩn bị thi học sinh giỏi cấp tỉnh, thành phố.

Bài viết khó tránh khỏi những sai sót, mong nhận được ý kiến đóng góp của bạn đọc qua email : vancanh2095@gmail.com.

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Các dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp

Ta đã biết, để chứng minh một tứ giác nội tiếp, ta có thể :

- Chứng minh bốn điểm đó cách đều một điểm (mà ta có thể xác định được).
- Chứng minh tổng hai góc đối diện bù nhau.
- Chứng minh góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.
- Chứng minh hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh đối diện dưới hai góc bằng nhau.

Ngoài ra, chúng ta cần biết thêm một dấu hiệu nhận biết sau đây :

Định lí. Cho tứ giác ABCD có E là giao điểm của AB và CD, F là giao điểm của AC và BD. Khi đó, các điều kiện sau đây là tương đương với nhau :

a) Tứ giác ABCD nội tiếp.
b) EA.EB = EC.ED.
c) FA.FC = FB.FD.

Bạn đọc dễ dàng chứng minh định lí trên bằng tam giác đồng dạng.

Định lí trên cho ta nhận biết tứ giác nội tiếp dựa vào mối quan hệ giữa các đoạn thẳng, điều này thật sự hiệu quả khi ta không tìm được các mối quan hệ về góc.

2. Phương pháp chung để chứng minh năm điểm cùng thuộc một đường tròn (trường hợp nhiều hơn ta làm tương tự)

Giả sử ta cần chứng minh năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn. Ta biết rằng có duy nhất một đường tròn đi qua ba điểm không thẳng hàng, vì vậy để chứng minh năm điểm trên cùng thuộc một đường tròn, ta sẽ chứng minh nó cùng thuộc đường tròn qua A, B, C (hoặc các bộ ba điểm khác). Khi đó ta quy về việc chứng minh các tứ giác ABCD và ABCE nội tiếp (xem ví dụ 12 và 13).

Tuy nhiên, trong một số trường hợp cụ thể ta có cách giải khác.

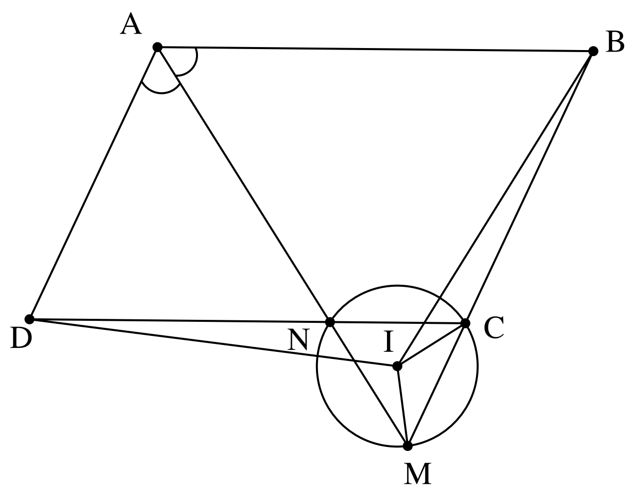
II. MỘT SỐ VÍ DỤ

- **Các bài toán chứng minh tứ giác nội tiếp và nhiều điểm cùng thuộc một đường tròn**

Ví dụ 1. Cho hình bình hành ABCD. Đường phân giác của góc $\widehat{BAD}$ cắt BC, CD lần lượt ở M, N. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CNM. Chứng minh rằng tứ giác BCID nội tiếp.

<u>Lời giải</u>

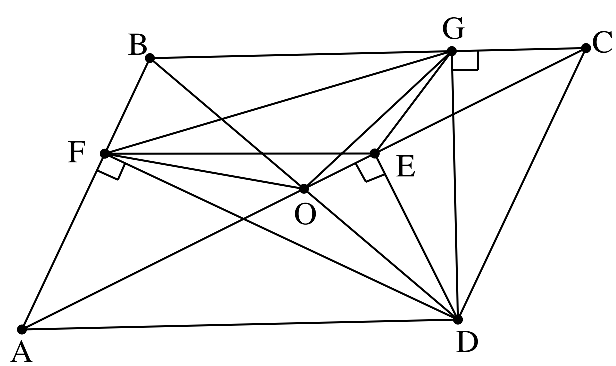
Ta có $\widehat{DNA} = \widehat{NAB} = \widehat{DAN}$ nên tam giác DAN cân tại D, suy ra DN = DA = BC.
Tương tự chứng minh được tam giác CMN cân tại C nên CN = CM. Do đó DC = BM.
Mặt khác do tam giác CMN cân tại C nên $\widehat{ICD} = \widehat{ICM} = \widehat{IMB}$, kết hợp với IC = IM ta có $\Delta ICD = \Delta IMB\,(c.g.c) \Rightarrow \widehat{IDC} = \widehat{IBC}$.
Vậy tứ giác BCID nội tiếp.



Ví dụ 2. Cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi E, F, G theo thứ tự là hình chiếu của D trên AC, AB, BC. Chứng minh rằng O nằm trên đường ngoại tiếp tam giác EFG.

<u>Lời giải</u>

Ta xét hai trường hợp :
- *Trường hợp góc B tù.*



Ta có tam giác BFD vuông tại F có O là trung điểm của BD nên tam giác BOF cân tại O.
Suy ra $\widehat{BOF} = 180^o - 2\widehat{OBF}$. Tương tự $\widehat{BOG} = 180^o - 2\widehat{OBC}$.
Từ đó có :

$$\widehat{FOG} = 360^o - 2\widehat{ABC} = 2\widehat{BAD} \qquad (1)$$

Do các tứ giác AFED, DEGC nội tiếp nên

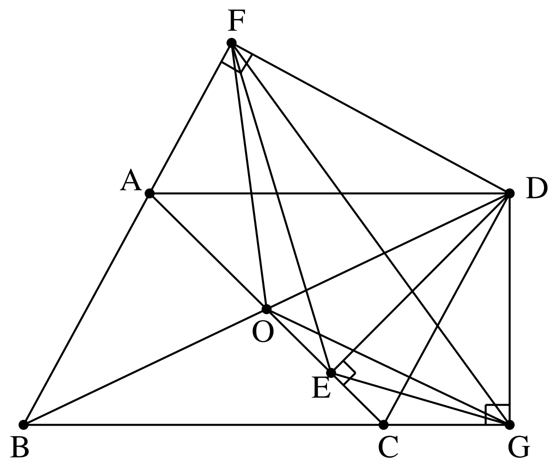
$$\widehat{FEO} = \widehat{ADF} = 90^o - \widehat{BAD}$$

$$\widehat{GEC} = \widehat{GDC} = 90^o - \widehat{BCD} = 90^o - \widehat{BAD}$$

Suy ra $$\widehat{FEG} = 180^o - (\widehat{FEO} + \widehat{GEC}) = 2\widehat{BAD} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{FOG} = \widehat{FEG}$ hay tứ giác OEGF nội tiếp (đpcm).

- Trường hợp góc B nhọn.



Ta có các tứ giác DECG và DEAF nội tiếp nên $\widehat{DEG} = \widehat{DCG} = \widehat{ABC}$ và
$\widehat{DEF} = \widehat{DAF} = \widehat{ABC}$ nên

$$\widehat{FEG} = 2\widehat{ABC} \qquad (1)$$

Mặt khác $\widehat{FOD} = 2\widehat{ABD}$ và $\widehat{DOG} = 2\widehat{CBD}$ nên

$$\widehat{FOG} = 2\widehat{ABC} \qquad (2)$$

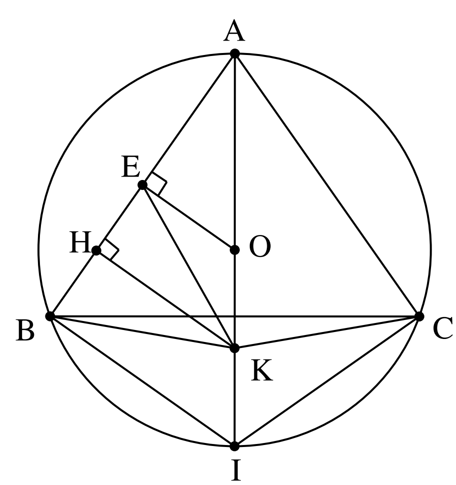
Từ (1) và (2) suy ra tứ giác FOEG nội tiếp (đpcm).

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) đường kính AI. Gọi E là trung điểm của AB và K là trung điểm của OI. Chứng minh rằng tứ giác AEKC nội tiếp.

Phân tích. Do tính đối xứng qua AI nên
$\widehat{KBE} = \widehat{KCA}$. Vậy để tứ giác AEKC nội tiếp được ta sẽ chứng minh tam giác KEB cân tại K.

Lời giải

Kẻ $KH \perp AB\,(K \in AB)$. Ta có KH // OE nên theo định lí Ta-lét :
$\frac{AE}{HE} = \frac{AO}{KO} = 2 \Rightarrow BE = AE = 2HE$. Suy ra H là trung điểm của BE, do đó tam giác KEB cân tại K.
Vậy $\widehat{KEB} = \widehat{KBE} = \widehat{KCA}$ hay tứ giác AEKC nội tiếp.



Ví dụ 4. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Các tiếp điểm của (I) với AB, AC theo thứ tự ở M, N ; MN cắt IB, IC theo thứ tự ở D, E. Chứng minh rằng tứ giác BEDC nội tiếp.

<u>Lời giải</u>

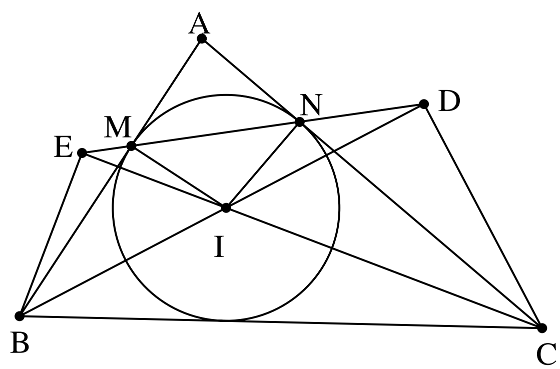
Ta có $\widehat{DIC} = \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2} + \dfrac{\widehat{ACB}}{2} = 90^o - \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$ (1)

Do tam giác AMN cân tại A nên $\widehat{DNC} = \widehat{ANM} = 90^o - \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác INDC nội tiếp, do đó $\widehat{BDC} = \widehat{INC} = 90^o$.

Chứng minh tương tự, ta có $\widehat{BEC} = \widehat{IMB} = 90^o$. Suy ra $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^o$.

Vậy tứ giác BEDC nội tiếp đường tròn đường kính BC.



Ví dụ 5. Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình thang ABCD (BC // AD). Lấy M thuộc đoạn OA, N thuộc đoạn OD sao cho $\widehat{BMD} = \widehat{ANC}$. Chứng minh rằng tứ giác BMNC nội tiếp.

<u>Lời giải</u>

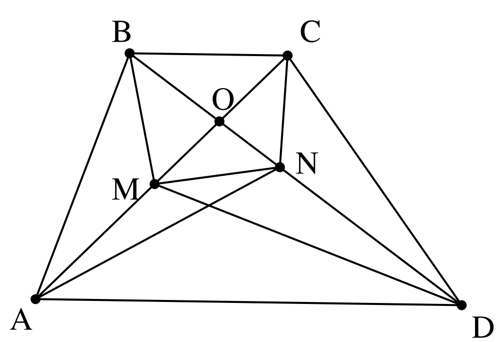
Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác BMC cắt OD tại N'. Ta có $\widehat{BMC} = \widehat{BN'C}$ (1)

Ta lại có $\widehat{CMN'} = \widehat{CBN'} = \widehat{ADN'}$ nên tứ giác AMN'C nội tiếp được. Suy ra

$\widehat{CMD} = \widehat{CMN'} + \widehat{N'MD} = \widehat{ADN'} + \widehat{N'AD} = 180^o - \widehat{AN'D} = \widehat{BN'A}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{BMD} = \widehat{AN'C} = \widehat{ANC} \Rightarrow N \equiv N'$.

Vậy tứ giác BMNC nội tiếp.



Ví dụ 6. Cho hai đường tròn (O) và (O’) cắt nhau tại M, N. Tiếp tuyến tại M của (O) cắt (O’) tại B, tiếp tuyến tại M của (O’) cắt (O) tại A. Gọi P là điểm đối xứng của M qua N. Chứng minh rằng tứ giác MAPB nội tiếp.

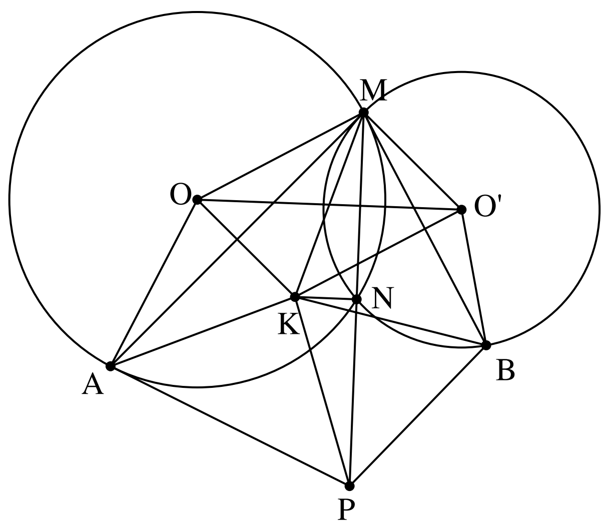
Lời giải

Gọi K là điểm đối xứng của M qua trung điểm của OO’. Ta có tứ giác OMO’K là hình bình hành nên OM // O’K, O’M // OK. Mặt khác do $OM \perp MB, O'M \perp MA$ nên $O'K \perp MB, OK \perp MA$. Vậy OK, O’K chính là các đường trung trực của MA, MB nên

KA = KB = KM. (1)

Mặt khác dễ chứng minh được KN // OO’ mà $OO' \perp MN$ nên $KN \perp MN$. Do MN = NP nên tam giác KMP cân tại K, suy ra KM = KP. (2)

Từ (1) và (2) suy ra KA = KB = KM = KP. Vậy tứ giác AMBP nội tiếp.



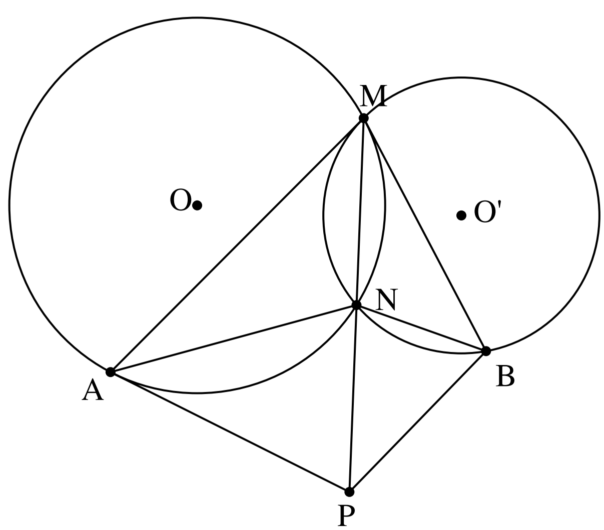
Cách khác. Ta có $\widehat{AMN} = \widehat{MBN}, \widehat{MAN} = \widehat{BMN}$ nên $\Delta AMN \sim \Delta MBN\,(g.g)$. Do đó

$$\frac{AN}{MN} = \frac{MN}{BN} \Rightarrow \frac{AN}{NP} = \frac{NP}{BN} \Rightarrow \Delta ANP \sim \Delta PNB\,(c.g.c) \Rightarrow \widehat{NAP} = \widehat{NPB}$$

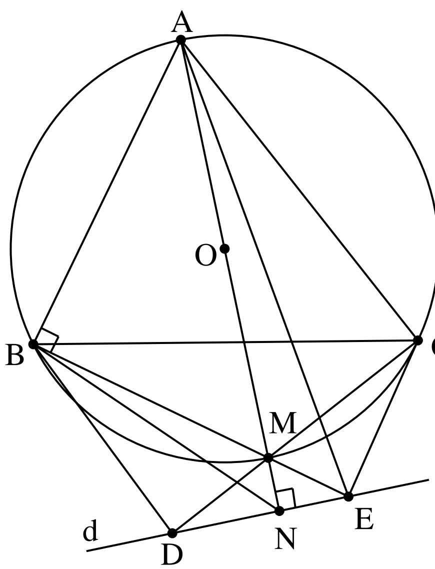
Từ đó suy ra $\widehat{MAP} = \widehat{MAN} + \widehat{NAP} = \widehat{PMB} + \widehat{MPB} = 180^o - \widehat{MBP}$.

Vậy tứ giác AMBP nội tiếp.

.



Ví dụ 7. Cho điểm M thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O). Một đường htẳng d ở ngoài (O) và vuông góc với OM ; CM, BM cắt d lần lượt ở D, E. Chứng minh rằng B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.



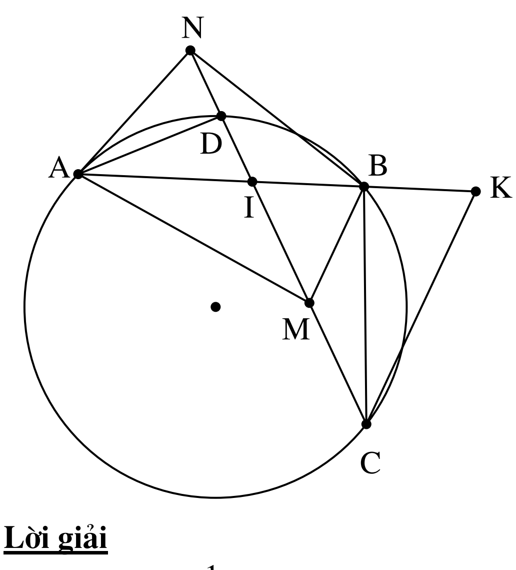
Lời giải

Kẻ đường kính AM, AM cắt d tại N. Ta có $\widehat{ANE} = \widehat{ABE} = 90^{o}$ nên tứ giác ABNE nội tiếp, suy ra $\widehat{BEN} = \widehat{BAN}$.

Mặt khác $\widehat{BAN} = \widehat{BCM}$, do đó $\widehat{BCM} = \widehat{BEN}$ hay $\widehat{BCD} = \widehat{BED}$.

Vậy B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

Ví dụ 8. Hai dây AB và CD của một đường tròn cắt nhau tại I. Gọi M là trung điểm của IC và N là điểm đối xứng với I qua D. Chứng minh rằng tứ giác AMBN nội tiếp.



Lời giải

Ta có $IM.IN = \frac{1}{2}IC.2ID = IC.ID$. Mặt khác IC.ID = IA.IB, do đó IA.IB = IM.IN.

Suy ra tứ giác AMBN nội tiếp.

Cách khác. Gọi K là điểm đối xứng của B qua I. Do $\Delta AID \sim \Delta CIB$ nên $\frac{AI}{CI} = \frac{DI}{BI} = \frac{NI}{KI}$.

Suy ra $\Delta ANI \sim \Delta CKI \Rightarrow \widehat{CKI} = \widehat{ANI}$ (1)

Do MB là đường trung bình của tam giác ICK nên $\widehat{CKI} = \widehat{MBI}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ANI} = \widehat{MBI}$ hay $\widehat{ANM} = \widehat{MBA}$.

Vậy tứ giác AMBN nội tiếp.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC có AD là đường phân giác trong. Bên trong các góc BAD, CAD lần lượt vẽ hai tia AM, AN sao cho $\widehat{MAD} = \widehat{NAD}$. Gọi M_1, M_2 là hình chiếu của M trên AB, AC ; N_1, N_2 là hình chiếu của N trên AB, AC.

Chứng minh rằng M_1, M_2, N_1, N_2 cùng thuộc một đường tròn.

<u>Lời giải</u>

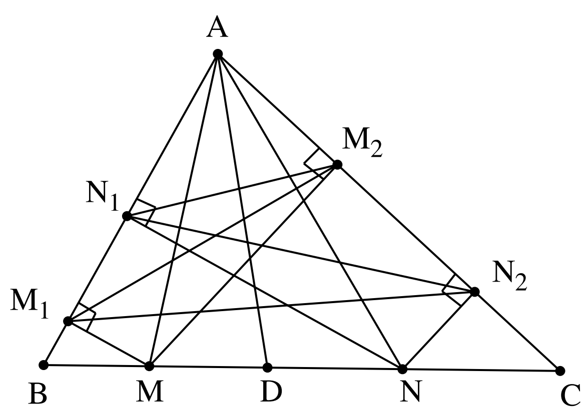
Từ giả thiết dễ dàng suy ra $\widehat{MAM_1} = \widehat{NAN_2}$, do đó $\widehat{AMM_1} = \widehat{ANN_2}$ (1)

Ta có các tứ giác AM_1MM_2, AN_1NN_2 nội tiếp nên

$$\widehat{AM_2M_1} = \widehat{AMM_1},\ \widehat{AN_1N_2} = \widehat{ANN_2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AM_2M_1} = \widehat{AN_1N_2} \Rightarrow \widehat{M_1M_2N_2} = \widehat{M_1N_1N_2}$.

Vậy bốn điểm M_1, M_2, N_1, N_2 cùng nằm trên một đường tròn.



Ví dụ 10. Cho tam giác ABC cân tại A. Từ một điểm M bất kì trên cạnh BC, kẻ MP // AC, MQ // AB (P thuộc AB, Q thuộc AC). Gọi D là điểm đối xứng của M qua PQ. Chứng minh rằng A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

<u>Lời giải</u>

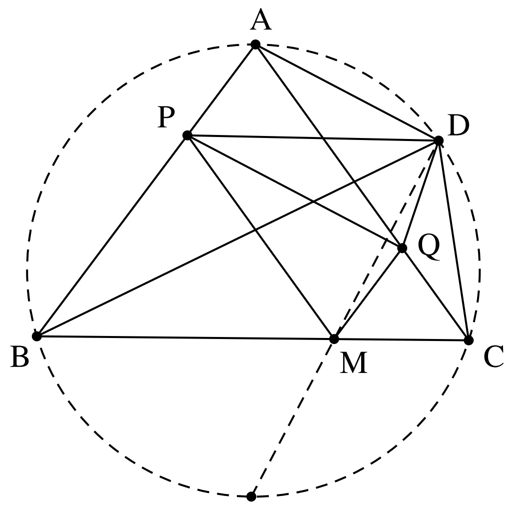
Ta có $\widehat{PMB} = \widehat{ACB} = \widehat{PBM}$ suy ra tam giác PMB cân tại P, do đó PB = PM = PD. Vậy P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD nên $\widehat{BDM} = \frac{1}{2}\widehat{BPM} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{CDM} = \frac{1}{2}\widehat{CQM} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Suy ra $\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$.

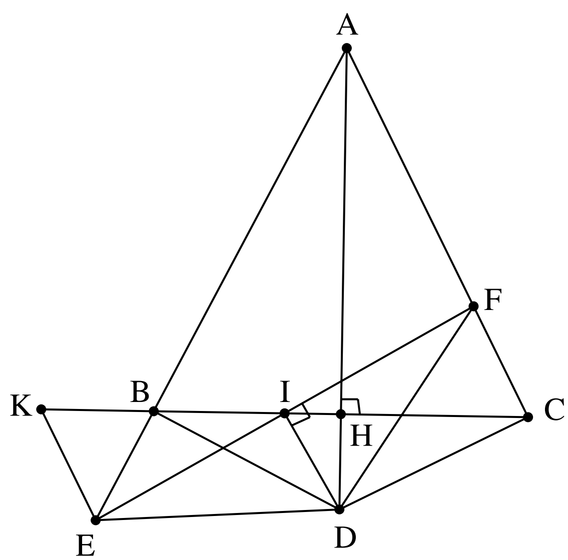
Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

Nhận xét. Từ bài toán trên, ta có kết quả : Cố định tam giác ABC và cho điểm M di động trên cạnh BC thì :

- Đường thẳng DM luôn đi qua điểm một điểm cố định, đó là điểm chính giữa của cung BC không chứa A.
- Quỹ tích của điểm D là cung BC chứa điểm A (Khi D trùng B hoặc C thì M cũng trùng B hoặc C).



Ví dụ 11. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E, trên cạnh AC lấy điểm F sao cho BE = CF, EF cắt BC tại I. Đường vuông góc với EF tại I cắt AH tại D. Chứng minh rằng tứ giác AEDF nội tiếp.



<u>Lời giải</u>

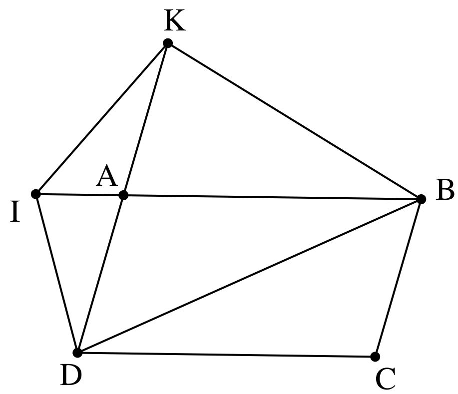
Kẻ EK // AC (K thuộc BC). Dễ thấy tam giác BEK cân tại E nên KE = BE = CF. Lại có KE // CF nên EKFC là hình bình hành, do đó I là trung điểm của EF. Suy ra DE = DF.

Mặt khác DB = DC và BE = CF nên $\Delta BDE = \Delta CDF\,(c.c.c) \Rightarrow \widehat{DEB} = \widehat{DFC}$ hay là $\widehat{AED} = \widehat{CFD}$. Vậy tứ giác AEDF nội tiếp.

Nhận xét. Bài toán sau đây chính là hệ quả trực tiếp từ bài toán trên : Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi E là điểm di động trên tia đối của tia BA và F là điểm di động trên cạnh

AC sao cho BE = CF. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Chứng minh rằng O luôn thuộc một đường cố định.

Ví dụ 12. Cho hình bình hành ABCD có góc A tù. Trên tia đối của tia AB, AD lần lượt lấy các điểm I, K sao cho DI = DA, BK = BA. Chứng minh rằng I, K, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.



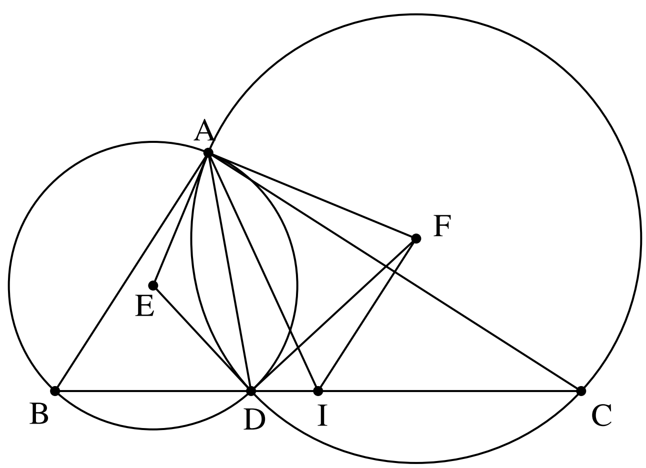
<u>Lời giải</u>

Tam giác DAI cân tại D nên $\widehat{DIA} = \widehat{DAI} = \widehat{BAK} = \widehat{BKA}$ hay $\widehat{DIB} = \widehat{DKB}$. Suy ra D, I, K, B cùng thuộc một đường tròn.

Ta có $\widehat{BKD} = \widehat{BAK} = \widehat{CDA}$ và $\widehat{CDA} + \widehat{BCD} = 180^o$ nên $\widehat{BKD} + \widehat{BCD} = 180^o$.

Vậy B, K, C, D cùng thuộc một đường tròn. Do đó năm điểm I, K, B, C, D cùng thuộc một đường tròn qua B, K, D.

Ví dụ 13. Cho tam giác ABC vuông tại A, I là trung điểm của BC, D là điểm bất kì trên cạnh BC. Gọi E, F là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABD, ACD. Chứng minh rằng 5 điểm A, E, I, D, F cùng nằm trên một đường tròn.



<u>Lời giải</u>

Do tam giác ABC vuông tại A có I là trung điểm của BC nên $\widehat{AIC} = 2\widehat{ABD} = \widehat{AED}$. Suy ra tứ giác AEDI nội tiếp hay A, E, D, I cùng thuộc một đường tròn.

Tương tự chứng minh được tứ giác A, F, I, D cùng thuộc một đường tròn.

Vậy năm điểm A, E, I, D, F cùng thuộc một đường tròn qua A, I, D.

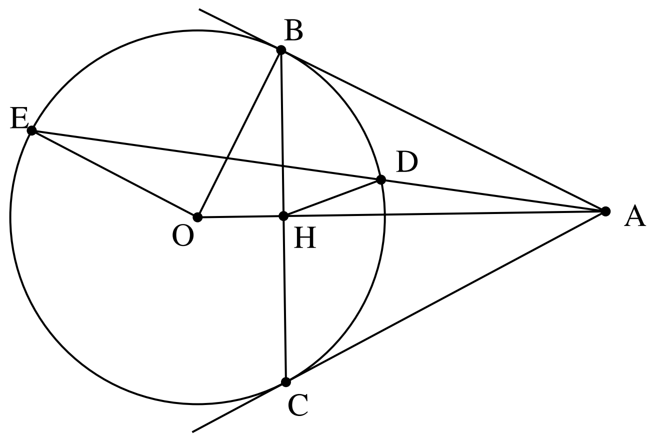
Ví dụ 14. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là các tiếp điểm) và cát tuyến ADE (AD < AE). Gọi H là giao điểm của BC với AO. Chứng minh rằng tứ giác OHDE nội tiếp.

<u>Lời giải</u>

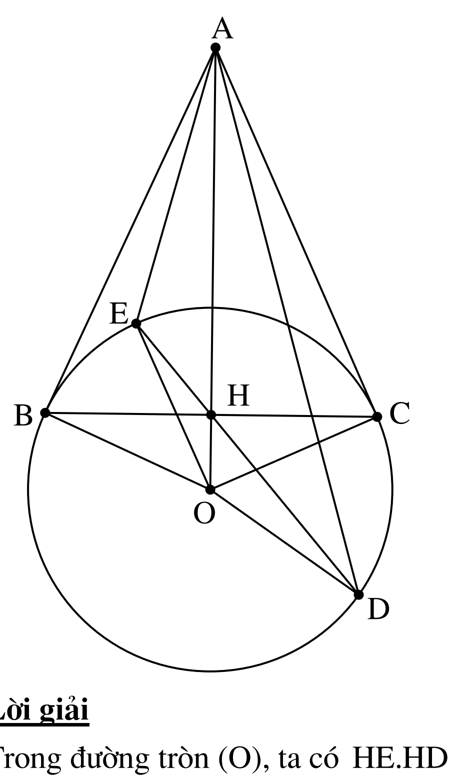
Dễ dàng chứng minh được hai tam giác ABD và AEB đồng dạng nên $AD.AE = AB^2$

Ta có BH là đường cao của tam giác vuông OBA nên $AH.AO = AB^2$

Suy ra AH.AO = AD.AE, do đó tứ giác OHDE nội tiếp.



Ví dụ 15. Cho tam giác ABC cân tại A có đường cao AH. Gọi (O) là đường tròn tiếp xúc với AB tại B, tiếp xúc với AC tại C. Gọi DE là một dây cung đi qua H của (O). Chứng minh rằng ADOE là tứ giác nội tiếp.



<u>Lời giải</u>

Trong đường tròn (O), ta có $HE.HD = HB.HC = HB^2$.

Trong tam giác vuông ABO, ta có $HO.HA = HB^2$.

Suy ra HE.HD = HO.HA nên tứ giác ADOE nội tiếp được.

- **Sử dụng tứ giác nội tiếp để chứng minh một số kết quả hình học khác**

Tứ giác nội tiếp cho ta các mối quan hệ chủ yếu về góc (hai góc đối bù nhau, hai góc có đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh đối diện thì bằng nhau, góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện). Đây chính là điểm khai thác chủ yếu từ tứ giác nội tiếp.

Ví dụ 16. Cho tam giác ABC có trực tâm H, ba đường cao AD, BE, CF. Chứng minh rằng H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

<u>Lời giải</u>

Từ các tứ giác nội tiếp BFEC, BDHF, CDHE ta có :

$$\widehat{HDF} = \widehat{HBF}$$

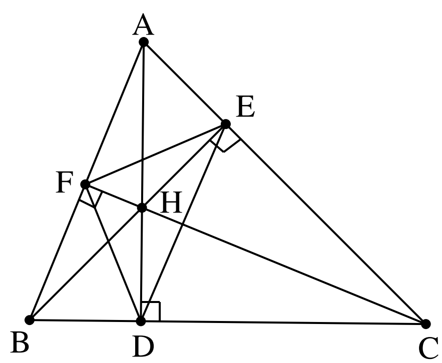
$$\widehat{HDE} = \widehat{HCE}$$

$$\widehat{HBF} = \widehat{HCE}$$

Suy ra $\widehat{HDE} = \widehat{HDF}$ hay DH là đường phân giác của góc EDF.

Chứng minh tương tự, ta có EH là đường phân giác của góc DEF.

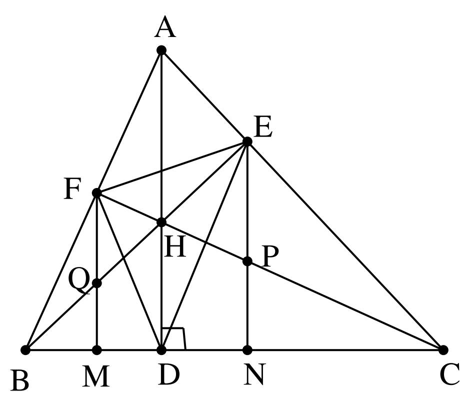
Vậy H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF.



Nhận xét. Bài toán trên khá quen thuộc, nhưng nếu không sử dụng tứ giác nội tiếp, ta có cách giải khác bằng tam giác đồng dạng như sau :

Kẻ EN, FM vuông góc với BC (M, N thuộc BC) ; P, Q theo thứ tự là giao điểm của HC, HB với EN, FM. Theo định lí Ta-lét, ta có : $\frac{FM}{EN} = \frac{FQ}{EP} = \frac{HE}{HQ} = \frac{MD}{ND} \Rightarrow \Delta MFD \sim \Delta NED$

$\Rightarrow \widehat{MDF} = \widehat{NDE}$. Do $AD \perp BC$ nên $\widehat{HDE} = \widehat{HDF}$. Tương tự đối với HE, ta sẽ có đpcm.



Ví dụ 17. Cho đường (O) và điểm A ở ngoài (O). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là các tiếp điểm). Lấy một điểm M thuộc cung nhỏ BC và gọi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Gọi P là giao điểm của BM và DF, Q là giao điểm của DE và MC. Chứng minh rằng :

a) $MD^2 = ME.MF$

b) PQ // BC.

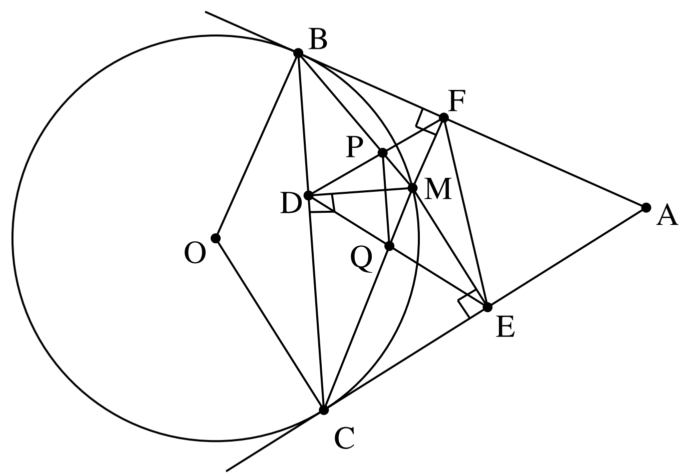
<u>Lời giải</u>

a) Từ các tứ giác nội tiếp BDMF và CDME, ta có :

$$\widehat{MDF} = \widehat{MBF} = \widehat{MCD} = \widehat{MED}$$
$$\widehat{MFD} = \widehat{MBD} = \widehat{MCE} = \widehat{MDE}$$

Suy ra hai tam giác MDE và MFD đồng dạng, từ đó $MD^2 = ME.MF$.

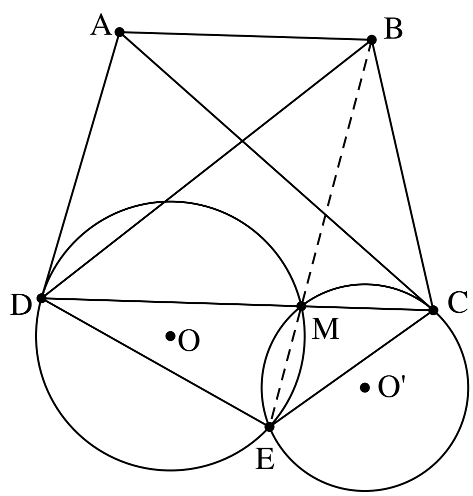
b) Ta có $\widehat{MDQ} = \widehat{MBC}, \widehat{MDP} = \widehat{MCB}$ nên $\widehat{PDQ} = 180^o - \widehat{PMQ}$, suy ra tứ giác MPDQ nội tiếp. Do đó $\widehat{MPQ} = \widehat{MDQ} = \widehat{MBC}$, vì vậy PQ // BC.



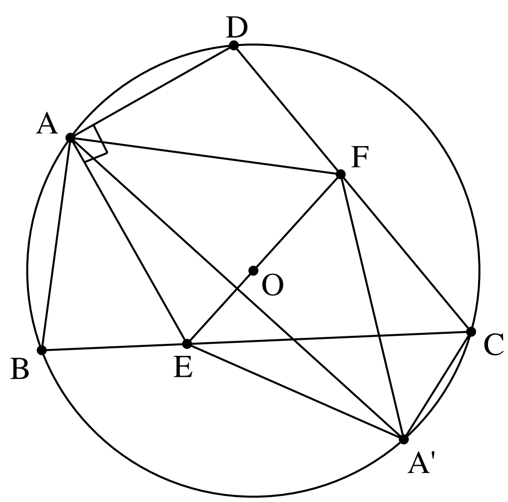
Ví dụ 18. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD), điểm M thuộc cạnh CD. Gọi (O) là đường tròn đi qua M và tiếp xúc với AD tại D, (O') là đường tròn đi qua M và tiếp xúc với AC tại C. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại E khác M. Chứng minh rằng E, M, B thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\widehat{MEC} = \widehat{ACD}, \widehat{MED} = \widehat{ADC}$ nên $\widehat{DEC} = 180^o - \widehat{DAC}$. Suy ra tứ giác ADEC nội tiếp. Mặt khác tứ giác ABCD cũng nội tiếp nên A, B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn. Từ đó suy ra $\widehat{BEC} = \widehat{BAC} = \widehat{ACD} = \widehat{MEC}$ hay E, M, B thẳng hàng.



Ví dụ 19. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng vuông góc với AD tại A cắt BC tại E, EO cắt CD tại F. Chứng minh rằng $AF \perp AB$.



Phân tích. Ta thấy để có $AF \perp AB$ thì phải có $\widehat{BAF} = 90^o \Leftrightarrow \widehat{BAE} + \widehat{EAF} = 90^o$
$\Leftrightarrow \widehat{EAF} = 90^o - \widehat{BAE}$.

Mặt khác do $\widehat{ECF} = 180^o - \widehat{BAD} = 90^o - \widehat{BAE}$ nên ta phải có $\widehat{EAF} = \widehat{ECF}$. Hai góc này đều nhìn đoạn EF nhưng A và C khác phía so với EF, vì vậy nếu lấy A' đối xứng với A qua EF thì bài toán quy về việc chứng minh tứ giác EFCA' nội tiếp.

Lời giải

Gọi A’ là điểm đối xứng của A qua đường kính EOF, thế thì $A' \in (O)$.

Ta có $\widehat{DAA'} + \widehat{EAA'} = 90^o$ và $\widehat{AEF} + \widehat{EAA'} = 90^o$ nên $\widehat{DAA'} = \widehat{AEF} = \widehat{A'EF}$.

Ta lại có $\widehat{DAA'} + \widehat{FCA'} = 180^o$ nên $\widehat{A'EF} + \widehat{FCA'} = 180^o$, suy ra tứ giác EFCA’ nội tiếp.

Từ đó suy ra $\widehat{ECF} = \widehat{EA'F} = \widehat{EAF} \Rightarrow \widehat{EAF} = 180^o - \widehat{BAD} = 90^o - \widehat{BAE} \Rightarrow \widehat{BAF} = 90^o$.

Vậy $AF \perp AB$.

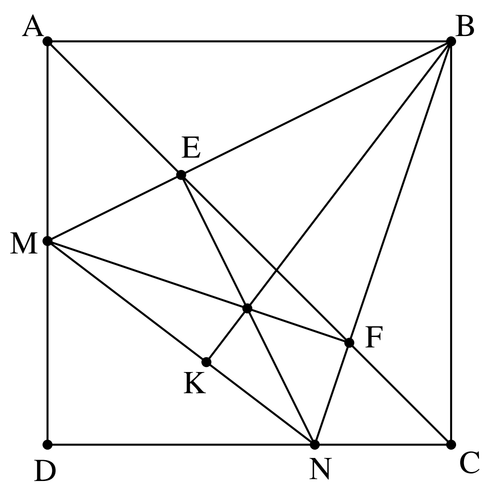
Ví dụ 20. Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm M thuộc AD, N thuộc CD sao cho $\widehat{MAN} = 45^o$. BM và BN cắt AC theo thứ tự ở E, F. Chứng minh rằng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi M, N thay đổi.

Lời giải

Ta có $\widehat{MAF} = \widehat{MBF} = 45^o$ nên tứ giác AMFB nội tiếp, suy ra $\widehat{MFN} = 90^o$.

Chứng minh tương tự, ta có $\widehat{MEN} = 90^o$. Gọi K là hình chiếu của B trên MN. Khi đó ta có $\widehat{ABM} = \widehat{AFM} = \widehat{KBM}$ (do các tứ giác AMFB, MKFB nội tiếp). Từ đó dễ dàng chứng minh được BK = BA (không đổi).

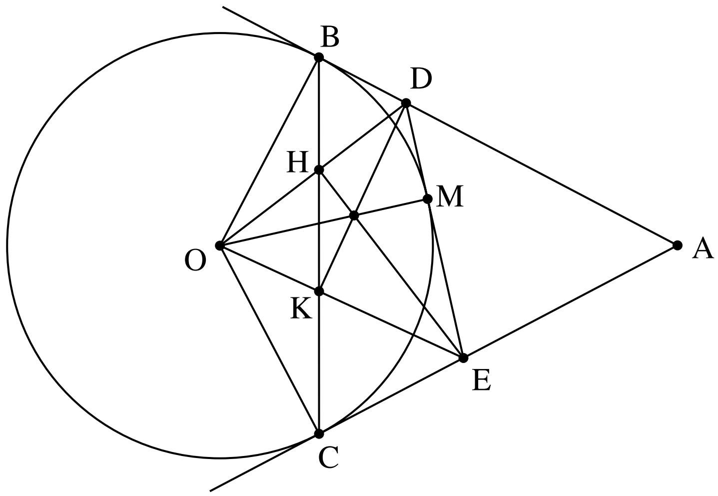
Vậy MN luôn tiếp xúc với đường tròn (B ; BA).



Ví dụ 21. Cho đường tròn (O) và một điểm A ở ngoài (O). Từ A kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến (O) (B, C là các tiếp điểm), điểm M thuộc cung nhỏ BC. Tiếp tuyến tại M của (O) cắt AB, AC lần lượt ở D, E. OD, OE cắt BC lần lượt tại H, K. Chứng minh rằng OM, EH, DK đồng quy.

Lời giải

Ta có $\widehat{DOE} = \frac{1}{2}\widehat{BOM} + \frac{1}{2}\widehat{COM} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \widehat{DBC} = \widehat{DCB}$. Suy ra các tứ giác OBDK, OCEH nội tiếp và do đó $\widehat{DKO} = \widehat{EHO} = 90^o$ hay $EH \perp OD, DK \perp OE$. Ta có OM, EH, DK là ba đường cao của tam giác ODE nên chúng đồng quy.



Ví dụ 22. Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau, điểm M di chuyển trên cung nhỏ BC. Trên tia đối của tia EA lấy điểm M sao cho EM = EB. Tìm quỹ tích các điểm M.

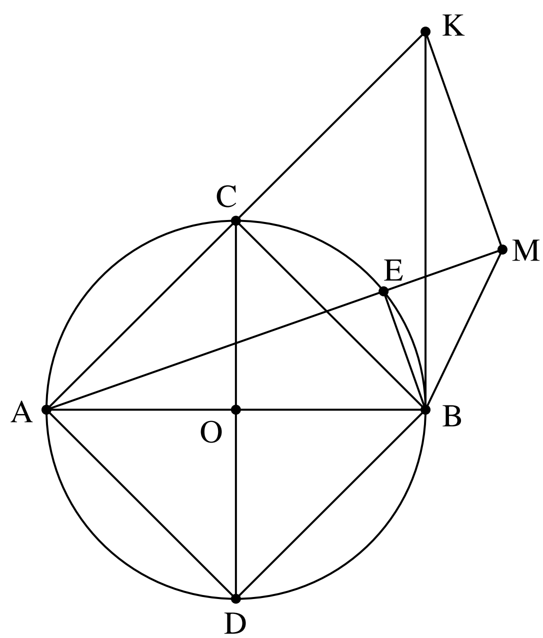
<u>Lời giải</u>

Phần thuận. Lấy điểm K đối xứng với A qua C, ta có tam giác ABK vuông cân tại B và K cố định. Vì tam giác EMB vuông cân tại E nên $\widehat{AMB} = 45^o = \widehat{AKB}$. Suy ra tứ giác AKMB nội tiếp, do đó $\widehat{AMK} = \widehat{ABK} = 90^o$. Suy ra M chạy trên đường tròn đường kính AK cố định.

Giới hạn. Vì E di chuyển trên cung nhỏ BC nên khi E trùng B thì M trùng B, còn khi E trùng C thì M trùng K.

Phần đảo. Lấy một điểm M’ bất kì nằm trên đường tròn đường kính AK (M’ không trùng với B và K), AM’ cắt (O) tại E’. Do tứ giác AKMB nội tiếp đường tròn đường kính AK nên $\widehat{AM'B} = \widehat{AKB} = 45^o$. Lại có $\widehat{BE'M'} = 90^o$ nên tam giác E’M’B vuông cân tại B hay E’M’ = E’B (đpcm).

Kết luận. Quỹ tích các điểm M là đường tròn đường kính AK (kể cả B và K).

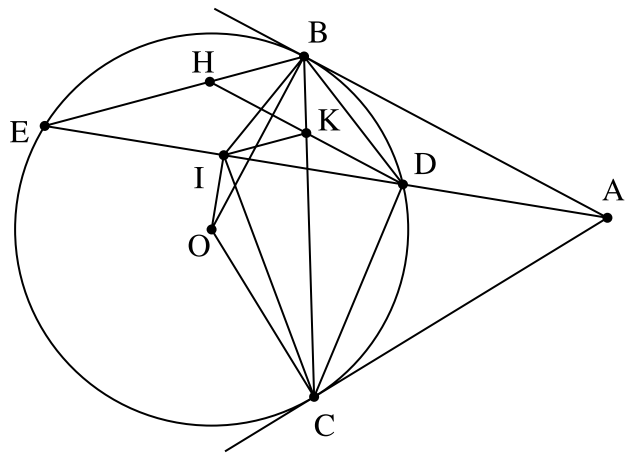


Ví dụ 23. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Từ A vẽ các tiếp tuyến AB, AC (B, C là các tiếp điểm) và cát tuyến ADE (AD < AE). Từ D kẻ đường thẳng vuông góc với OB cắt BC, BE lần lượt tại K, H. Chứng minh rằng K là trung điểm của của DH.

Phân tích. Lấy I là trung điểm của DE, khi đó để có KH = KD thì phải có IK // EH $\Rightarrow \widehat{KID} = \widehat{HED} = \widehat{KCD}$. Vậy ta chỉ cần chứng minh tứ giác KICD nội tiếp.

<u>Lời giải</u>

Gọi I là trung điểm của DE. Ta có $\widehat{OIA} = \widehat{OBA} = \widehat{OCA} = 90^o$ nên năm điểm O, I, B, A, C cùng nằm trên đường tròn đường kính OA. Do DK // OB nên $\widehat{KDI} = \widehat{BAI} = \widehat{ICK}$, suy ra tứ giác IKDC nội tiếp. Do đó $\widehat{KID} = \widehat{KCD} = \widehat{HED}$, vì vậy IK // EH. Trong tam giác DHE, ta có IK // EH và I là trung điểm của DE nên suy ra K là trung điểm của DH.

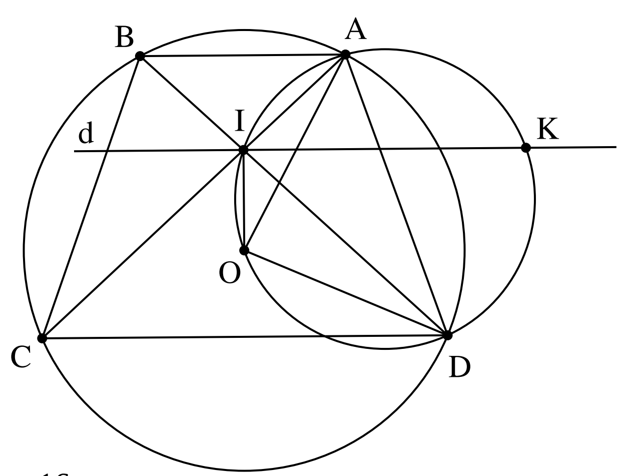


Ví dụ 24. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có cạnh bên AD cố định và nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là giao điểm của hai đường chéo và d là đường thẳng qua I song song với hai đáy của hình thang. Chứng minh rằng d luôn đi qua một điểm cố định.

<u>Lời giải</u>

Ta có $\widehat{AID} = \dfrac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{AD} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BC}}{2} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{AD} = \widehat{AOD}$ nên tứ giác OIAD nội tiếp. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tứ giác OIAD, do O, A, D cố định nên đường tròn này cố định. Gọi K là giao điểm của d với đường tròn ngoại tiếp tứ giác OIAD. Ta có $\widehat{AIK} = \widehat{ICD} = \widehat{IDC} = \widehat{DIK}$ nên K là điểm chính giữa của cung AD cố định và do đó K cố định.

Vậy d luôn đi qua điểm K cố định.



III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho tứ giác ABCD có AD = AB = BC. Gọi E là giao điểm của hai đường chéo, F là giao điểm của hai đường phân giác của các góc ADC và BCD. Chứng minh rằng tứ giác DEFC nội tiếp.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. Gọi I, K theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ACH và ABH. Tiếp tuyến chung ngoài khác BC của (I) và (K) cắt AB, AH, AC theo thứ tự ở M, P, N.

a) Chứng minh rằng BMNC là tứ giác nội tiếp.
b) Chứng minh rằng 5 điểm A, M, N, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 3. Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF.
Tam giác AEF có các đường cao EI, FJ.
Tam giác BDF có các đường cao DL, FM.
Tam giác CDE có các đường cao DN, EK.
Chứng minh rằng I, J, K, L, M, N cùng thuộc một đường tròn.

Bài 4. Cho đường tròn (O) đường kính AD. Gọi M là điểm đối xứng với O qua A. Từ M kẻ cát tuyến MBC (MB < MC) và gọi I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng tam giác OIA cân.

Bài 5. Cho hình bình hành ABCD. Lấy một điểm M nằm ngoài hình bình hành sao cho C nằm trong tam giác MBD và $\widehat{MBC}=\widehat{MDC}$. Chứng minh rằng $\widehat{BMC}=\widehat{AMD}$.

Bài 6. Cho hai đường tròn (S) và (T) cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (S) tại C và tiếp xúc với đường tròn (T) tại E (khoảng cách từ A đến d lớn hơn khoảng cách từ B đến d).

a) Gọi D là điểm đối xứng của A qua d. Chứng minh rằng tứ giác BCDE nội tiếp một đường tròn (V).
b) Gọi R_S, R_T, R_V theo thứ tự là bán kính của các đường tròn (S), (T), (V). Chứng minh rằng $R_V^2 = R_S.R_T$.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Đường tròn qua A, B tiếp xúc với BC và đường tròn qua B, C tiếp xúc với AB cắt nhau tại E. Gọi O là râm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $\widehat{BEO}=90^o$.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A và d_1, d_2 là hai đường thẳng bất kì đi qua A. Các đường thẳng qua B, C tương ứng vuông góc với d_1, d_2 cắt nhau tại D. Đường thẳng qua B vuông góc với AB cắt d_1 tại E, đường thẳng qua C vuông góc với AC cắt d_2 tại F. Chứng minh rằng $AD \perp EF$.

Bài 9. Cho hình thang ABCD vuông tại A và B, M là trung điểm của AB. Các đường cao AH, BK của các tam giác AMD và BMC cắt nhau ở N. Chứng minh rằng $MN \perp CD$.

Bài 10. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và cắt các tiếp tuyến tại B, C của (O) tại M, N ; MC cắt NB tại F, d cắt (O) tại điểm thứ hai là E. Chứng minh rằng

a) Tứ giác BMEF, CNEF nội tiếp.
b) EF luôn đi qua một điểm cố định khi d thay đổi.

Bài 11. Cho tam giác ABC, đường cao AD. Gọi E, F là hai điểm nằm trên một đường thẳng qua D sao cho $\widehat{AEB}=\widehat{AFC}=90^o$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, EF. Chứng minh rằng $\widehat{ANM}=90^o$.

Bài 12. Cho ngũ giác ABCDE nội tiếp đường tròn (O) sao cho tia BA và tia DE cắt nhau tại M, tia AE và CD cắt nhau tại N. Gọi K là giao điểm của BC và tiếp tuyến của (O) tại E, P là giao điểm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEM và CEK.
Chứng minh rằng :

a) M, P, K thẳng hàng.
b) Tứ giác APNC nội tiếp.
c) Bốn điểm M, P, N, K thẳng hàng.

Bài 13. Cho tam giác ABC có trực tâm H, các đường cao AD, BE, CF. Đường tròn (O) bất kì qua A, H cắt AC, AB tại P, Q. Gọi R là giao điểm của OH với BC. Chứng minh rằng hai tam giác PQR và FED đồng dạng.

Bài 14. Cho tam giác ABC có các đường cáo AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi K là giao điểm của EF và AH, M là trung điểm AH. Chứng minh rằng K là trực tâm của tam giác MBC.

Bài 15. Cho đường tròn (O) có BC là dây cố định và A di động trên đoạn BC. Đường tròn (D) qua A tiếp xúc với (O) tại B và đường tròn (E) qua A tiếp xúc với (O) tại C cắt nhau tại điểm thứ hai là M. Chứng minh rằng MA luôn đi qua một điểm cố định khi A di động.

Bài 16. Cho tam giác ABC nhọn có H là trực tâm và M là trung điểm của BC. Hạ HP vuông góc với AM. Chứng minh rằng $AM.PM = BM^2$.

Bài 17. Cho tam giác ABC có AD là phân giác trong. Gọi (O) và (O’) lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABD và ACD ; AD cắt hai tiếp tuyến chung của (O) và (O’) tại P, Q. Gọi L giao điểm của AD với trung trực của BC.

a) Chứng min rằng BC, 2 tiếp tuyến chung và đường nối tâm OO’ đồng quy tại S.
b) Gọi tiếp điểm của các tiếp tuyến chung với (O) là M, H ; với (O’) là N, K (M, N, S thẳng hàng). Chứng minh rằng MH, OO’, AB đồng quy ; NK, OO’ AC đồng quy.
c) SA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
d) LB là tiếp tuyến của (O), LC là tiếp tiếp tuyến của (O’).
e) $PQ^2 = AB.AC$

Bài 18. Cho BC là dây cố định của đường tròn (O), A di động trên (O) sao cho O nằm trong tam giác ABC. Vẽ dây AD vuông góc với BC ; E, F lần lượt thuộc cạnh AB, AC sao cho $BD^2 = BE.BA, CD^2 = CF.CA$. Gọi I là giao điểm của EF và AD. Chứng minh rằng

a) Các tứ giác BDIE và DIFC nội tiếp.
b) I và D đối xứng với nhau qua BC.
c) EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Bài 19. Cho tam giác ABC cân tại A. Đường tròn (O) có tâm O nằm trong tam giác tiếp xúc với AB, AC lần lượt ở X, Y và cắt BC tại hai điểm Z, T. Gọi H là hình chiếu của O trên AZ. Chứng minh rằng HB, HC theo thứ tự đi qua trung điểm của XZ, YZ.

Bài 20. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với BC, CA, AB theo thứ tự ở D, E, F. Một đường thẳng qua A song song với BC cắt EF tại M. Gọi N là trung điểm của BC, L là giao điểm của ID và EF.

a) Chứng minh rằng A, L, N thẳng hàng.
b) Chứng minh rằng MD vuông góc với IN.

Bài 21. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O). Kẻ tiếp tuyến AB và cát tuyến AMN, BK là đường kính của đường tròn (O). NK, MK cắt AO tại S, S’. Chứng min hrằng SO = S’O.

Bài 22. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Gọi E, F, G, H theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng min rằng EFGH là hình chữ nhật.

Bài 23. (Định lí Simson)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), M là điểm bất kì nằm trên (O). Gọi P, Q, R lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng P, Q, R thẳng hàng (đường thẳng qua P, Q, R được gọi là đường thẳng Simson ứng với điểm M của tam giác ABC).

Bài 24. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), M là điểm bất kì trên (O). Kẻ MD, ME lần lượt vuông góc với BC, CA. Lấy K là trung điểm của DE, I là trung điểm của AB. Chứng minh rằng $\widehat{IKM} = 90^o$.

Bài 25. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), MN là đường kính bất kì của (O). Chứng minh rằng các đường thẳng Simson ứng với các điểm M, N vuông góc với nhau.

Bài 26. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và một điểm M tùy ý nằm trên đường tròn. Gọi E, F, L theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB, BC, CA. Kẻ tiếp tuyến d của đường tròn (O) tại A và K là hình chiếu của M trên d.

Chứng minh rằng ME.ML = MF.MK.

Bài 27. Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. ; I, J, K theo thứ tự là trung điểm của HA, HB, HC. Chứng minh rằng chín điểm D, E, F, M, N, P, I, J, K cùng nằm trên một đường tròn (gọi là đường tròn Euler).

Bài 28. (Định lí Lyness)

Cho tam giác ABC nội tiếp. Gọi (O') là đường tròn tiếp xúc trong với (O) tại D và tiếp xúc với AB, AC theo thứ tự tại E, F. Chứng minh rằng EF đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài 29. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng đường thẳng Simson ứng với các điểm A, B, C, D của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC đồng quy tại S.

b) Chứng minh rằng đường tròn Euler của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC cũng đồng quy tại S.

IV. LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN

Bài 1.

Ta có $\widehat{DFC} = 180^o - \widehat{FDC} - \widehat{FCD} = 180^o - \dfrac{\widehat{ADC} + \widehat{BCD}}{2}$ (1)

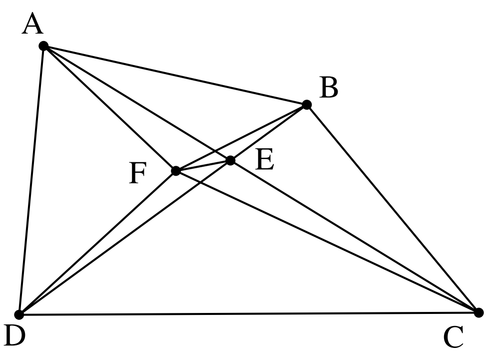
Ta lại có (chú ý rằng AD = AB = BC)

$$\widehat{DEC} = \widehat{AEB} = 180^o - \widehat{EAB} - \widehat{EBA}$$

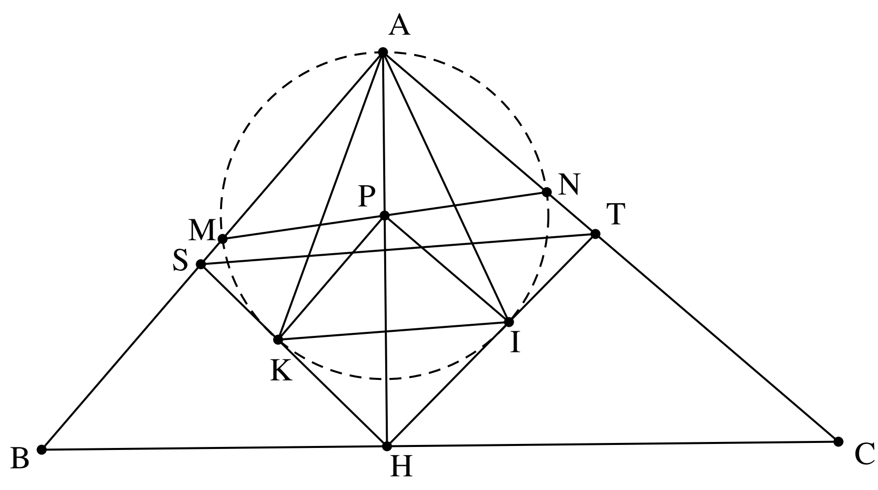
$$= 180^o - (90^o - \frac{\widehat{ABC}}{2}) - (90^o - \frac{\widehat{DAB}}{2})$$

$$= \frac{\widehat{ABC} + \widehat{DAB}}{2} = 180^o - \frac{\widehat{BCD} + \widehat{ACD}}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DEC} = \widehat{DFC}$ hay tứ giác DEFC nội tiếp.



Bài 2.



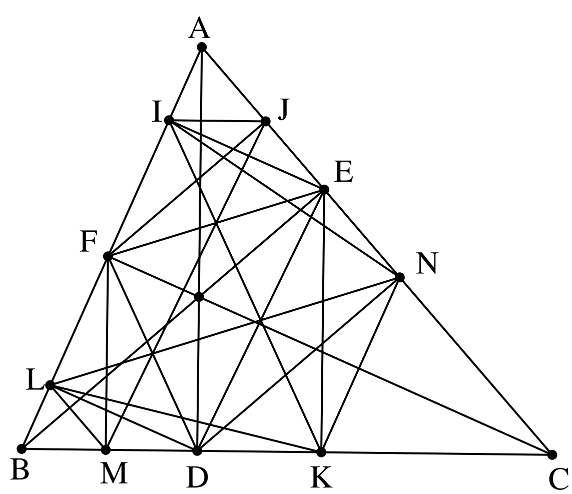
<u>a) Chứng minh tứ giác BMNC nội tiếp</u>

Kéo dài HI, HK cắt AC, AB lần lượt tại T, S. Ta có tứ giác ASHT nội tiếp nên $\widehat{ATS} = \widehat{AST} = 45^o$. Suy ra AS = AT. Từ đó theo tính chất đường phân giác, ta có $\dfrac{HK}{SK} = \dfrac{AH}{AS} = \dfrac{AH}{AT} = \dfrac{HI}{TI}$, suy ra IK // TS.

Mặt khác do tứ giác BIHK nội tiếp (do $\widehat{KPI} = \widehat{KHI} = 90^o$) nên $\widehat{HPI} = \widehat{HKI} = \widehat{HST} = \widehat{HAC}$.
Do đó PI // AC. Từ đó suy ra $\widehat{ANM} = \widehat{IPN} = \widehat{HPI} = \widehat{HAC} = \widehat{ABC}$ (do PI là đường phân giác của góc $\widehat{HPN}$).
Vậy tứ giác BMNC nội tiếp.
<u>b) Chứng minh rằng năm điểm A, M, N, I, K cùng nằm trên một đường tròn</u>
Ta chứng minh được PK // AB tương tự như chứng minh PI // AC ở câu a), nên
$\widehat{PKA} = \widehat{BAK} = \widehat{PAK}$, suy ra PA = PK. Tương tự PA = PI.
Do tứ giác BMNC nội tiếp nên $\widehat{AMP} = \widehat{ACB} = \widehat{PAM}$, do đó PA = PM. Tương tự ta cũng có PA = PN. Suy ra PA = PM = PN = PI = PK. Vậy năm điểm A, M, N, I, K cùng nằm trên một đường tròn có tâm P.

Bài 3.

Dễ thấy $\widehat{NKC} = \widehat{NED} = \widehat{ABC}$ (do các tứ giác DENK và AEDB nội tiếp).
Lại có $BI.BA = BE^2 = BK.BC$ nên tứ giác AIKC nội tiếp, suy ra $\widehat{BKI} = \widehat{BAC}$. Từ đó có
$\widehat{BKI} + \widehat{NKC} = \widehat{ABC} + \widehat{BAC} \Leftrightarrow \widehat{NKI} = \widehat{ACB}$. Mà $\widehat{ACB} = \widehat{AFE} = \widehat{AJI}$ (do các tứ giác BFEC và FEJI nội tiếp) nên $\widehat{NKI} = \widehat{AJI}$, do đó tứ giác IJNK nội tiếp.
Ta có $AL.AB = AD^2 = AN.AC$ nên tứ giác BLNC nội tiếp, do đó
$\widehat{JNL} = \widehat{ABC} = \widehat{AEF} = \widehat{AIJ}$. Từ đó có tứ giác IJNL nội tiếp.
Suy ra năm điểm I, J, N, K, L cùng nằm trên một đường tròn.
Ta chứng minh được tứ giác IJML nội tiếp tương tự như chứng minh tứ giác IJNK nội tiếp, do đó M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác IJL. Mà đường tròn ngoại tiếp tam giác IJL cũng chính là đường tròn đi qua năm điểm I, J, N, K, L nên ta có I, J, N, K, L, M cùng nằm trên một đường tròn.



Bài 4.

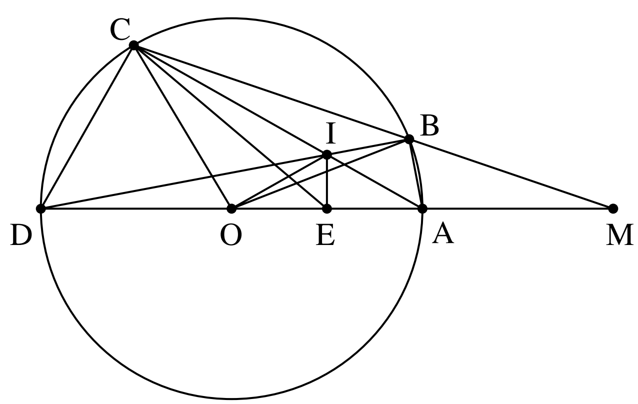
Gọi E là trung điểm của đoạn OA. Ta sẽ chứng minh tứ giác DCIE nội tiếp.

Ta có $\frac{OE}{OC} = \frac{OC}{OM} = \frac{1}{2}$ nên dễ có $\Delta OEC \sim \Delta OCM\,(c.g.c)$, suy ra $\widehat{CEO} = \widehat{MCO}$ (1)

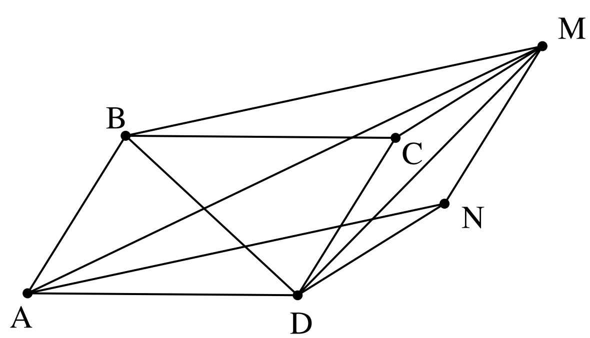
Ta lại có $\widehat{MCO} = \widehat{OCA} + \widehat{ACB} = \widehat{OAC} + \widehat{ACB} = \frac{sđ\,\overset{\frown}{CD} + sđ\,\overset{\frown}{AB}}{2} = \widehat{CID}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CID} = \widehat{CED}$ hay tứ giác DCIE nội tiếp. Từ đó $\widehat{IED} = 90^o$.

Tam giác OIA có IE vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên là tam giác cân.



Bài 5.



Dựng hình bình hành CDNM thì ABMN cũng là hình bình hành.

Ta có AD // BC và AN // BM nên $\widehat{DAN} = \widehat{MBC}$. Ta lại có $\widehat{MBC} = \widehat{MDC}$ và $\widehat{MDC} = \widehat{DMN}$, do đó $\widehat{DAN} = \widehat{DMN}$. Suy ra tứ giác ADNM nội tiếp nên $\widehat{AMD} = \widehat{AND}$.

Lại vì AN // BM và DN // CM nên $\widehat{BMC} = \widehat{AND}$, do đó $\widehat{AMD} = \widehat{BMC}$

Bài 6.

a) Chứng minh tứ giác BCDE nội tiếp một đường tròn (V)

Ta có $\widehat{BCE} = \widehat{BAC}, \widehat{BEC} = \widehat{BAE}$ nên $\widehat{BCE} + \widehat{BEC} = \widehat{DAE}$. Từ đó có :

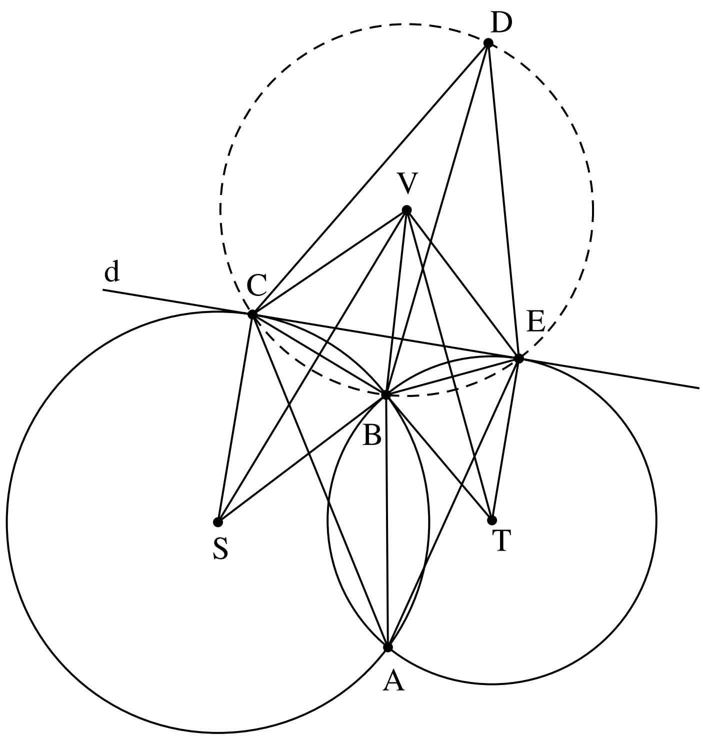
$\widehat{CBE} = 180^o - (\widehat{BEC} + \widehat{BCE}) = 180^o - \widehat{CAE} = 180^o - \widehat{CDE}$ (do A và D đối xứng với nhau qua d). Suy ra tứ giác BCDE nội tiếp được trong một đường tròn (V).

b) Chứng minh $R_V^2 = R_S.R_T$

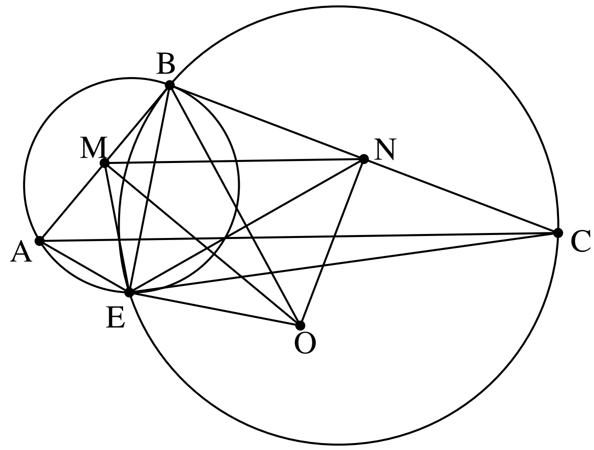
Từ kết quả của câu a), ta có $\widehat{CSV} = \dfrac{\widehat{CSB}}{2} = \widehat{BAC} = \widehat{BCE} = \widehat{BDE} = \widehat{EVT}$ (1)

$$\widehat{ETV} = \frac{\widehat{ETB}}{2} = \widehat{BAE} = \widehat{BEC} = \widehat{BDC} = \widehat{CVS} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta CSV \sim \Delta EVT\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{CS}{CV} = \dfrac{EV}{ET} \Rightarrow R_V^2 = R_S.R_T$.



Bài 7.

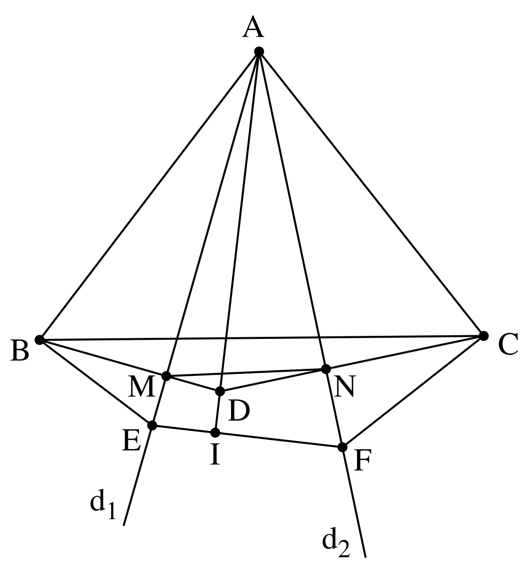


Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Ta có $\widehat{ABE} = \widehat{BCE}, \widehat{BAE} = \widehat{EBC}$ nên $\Delta ABE \sim \Delta BCE\,(g.g)$, mà EM và EN là trung tuyến tương ứng của hai tam giác đồng dạng trên, do đó $\Delta EMA \sim \Delta ENB$. Suy ra $\widehat{EMA} = \widehat{ENB}$ hay tứ giác EMBN nội tiếp (1)

Lại có tứ giác OMBN nội tiếp (vì $\widehat{OMB} = \widehat{ONB} = 90^o$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra năm điểm O, E, M, B, N cùng nằm trên một đường tròn, từ đó dễ có $\widehat{BEO} = 90^o$.

Bài 8.

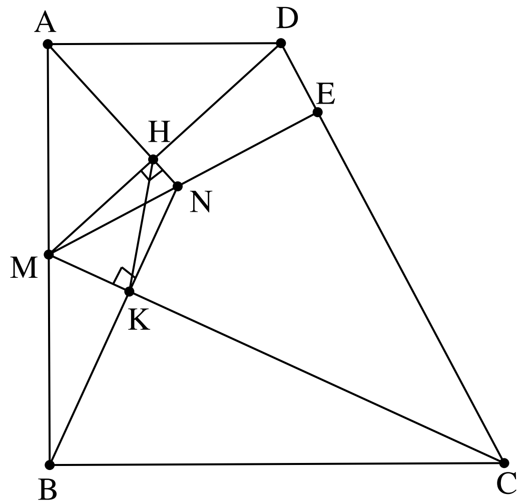


Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của B, C lên d_1, d_2, I là giao điểm của AD với EF.

Ta có $AM.AE = AB^2 = AC^2 = AN.AF$ nên tứ giác MNFE nội tiếp, suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{IFN}$.

Lại có tứ giác AMDN nội tiếp nên $\widehat{AMN} = \widehat{ADN}$. Vậy $\widehat{ADN} = \widehat{IFN}$, do đó tứ gaíc IDNF nội tiếp, từ đó dễ dàng suy ra $\widehat{DIF} = 90^o$ hay $AD \perp EF$.

Bài 9.



Gọi E là giao điểm của MN với CD. Ta có $\widehat{MHN} = \widehat{MKN} = 90^o$ nên tứ giác MHNK nội tiếp, suy ra

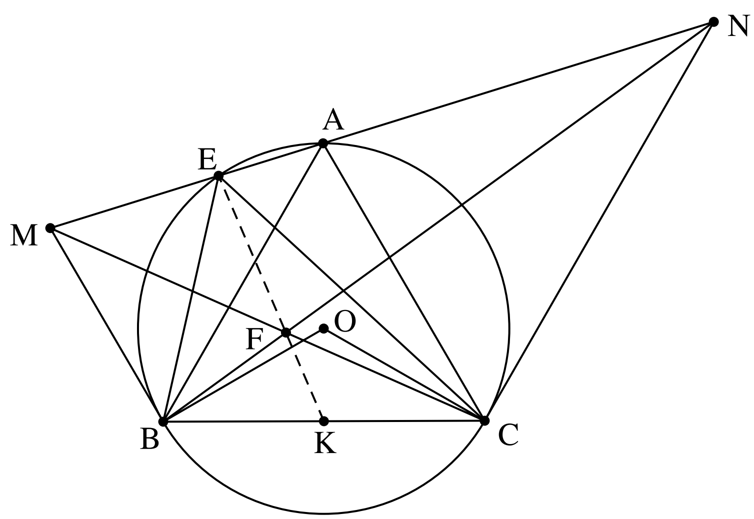
$$\widehat{MHK} = \widehat{MNK} \qquad (1)$$

Lại có $MK.MC = MB^2 = MA^2 = MH.MD$ nên tứ giác KHDC nội tiếp, do đó

$$\widehat{MHK} = \widehat{MCD} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác KNEC nội tiếp, từ đó có $\widehat{NEC} = 90^o$ hay $MN \perp CD$.

Bài 10.



a) Chứng minh các tứ giác BMEF, CNEF nội tiếp

Ta thấy $\widehat{MEB} = \widehat{ACB} = 60^o$ nên để chứng minh tứ giác BMEF nội tiếp, ta sẽ chứng tỏ $\widehat{BFM} = 60^o$.

Do $\widehat{ABM} = \widehat{BAC} = 60^o$ nên MB // AC, suy ra $\widehat{NAC} = \widehat{BMA}$. Mặt khác $\widehat{NCA} = \widehat{MBA} = 60^o$ nên $\Delta MBA \sim \Delta ACN$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MB}{AC} = \dfrac{AB}{CN} \Rightarrow \dfrac{MB}{BC} = \dfrac{BC}{CN}$.

Lại có $\widehat{MBC} = \widehat{BCN} = 120^o$ nên $\Delta MBC \sim \Delta BCN\,(c.g.c) \Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{CBN}$ hay $\widehat{BMC} = \widehat{CBF}$. Suy ra $\Delta BMC \sim \Delta FBC\,(g.g)$, do đó $\widehat{BFC} = \widehat{MBC} = 120^o$.

Vậy ta có $\widehat{BFM} = 60^o = \widehat{MEB}$ nên tứ giác BMEF nội tiếp.

Ta cũng có $\widehat{CFN} = 60^o = \widehat{CEN}$ nên tứ giác CNEF cũng nội tiếp.

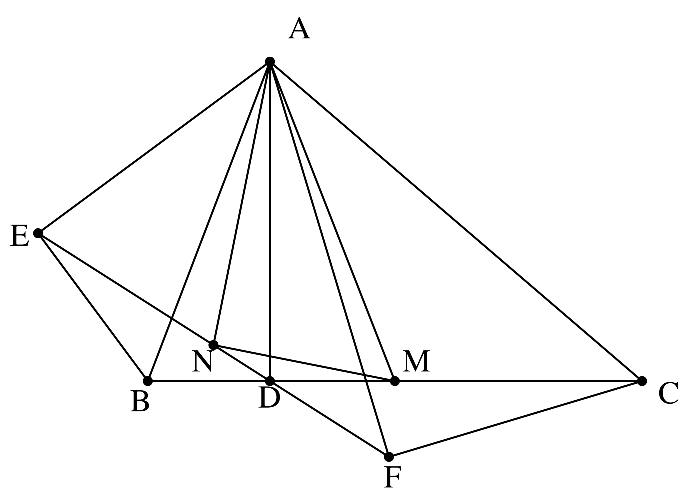
b) Chứng minh EF luôn đi qua một điểm cố định

Gọi K là giao điểm của EF với BC. Từ kết quả của câu a), ta có $\widehat{BEF} = \widehat{BMF} = \widehat{KBF}$, suy ra hai tam giác BEK và FBK đồng dạng với nhau. Do đó $KB^2 = KE.KF$.

Chứng minh tương tự, ta có $KC^2 = KE.KF$, suy ra KC = KB hay K là trung điểm của đoạn BC cố định (đpcm).

Bài 11.

Từ các tứ giác nội tiếp ADBE và ADFC, ta có $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}, \widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ nên suy ra $\Delta AEF \sim \Delta ABC\,(g.g)$; AM và AN là hai đường trung tuyến tương ứng của hai tam giác đồng dạng trên nên $\Delta ANE \sim \Delta AMB \Rightarrow \widehat{ANE} = \widehat{AMB} \Rightarrow$ tứ giác ANDM nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{ADM} = 90^o$.



Bài 12.

a) Chứng minh M, P, K thẳng hàng.

Từ các tứ giác nội tiếp AEPM và EABC, ta có : $\widehat{MPE} = \widehat{EAB} = \widehat{ECK}$. Lại có tứ giác KPEC nội tiếp nên $\widehat{ECK} + \widehat{KPE} = 180^o$, do đó $\widehat{MPE} + \widehat{KPE} = 180^o$ hay M, P, K thẳng hàng.

b) Chứng minh tứ giác APNC nội tiếp

Ta có $\widehat{APC} = \widehat{APE} + \widehat{CPE} = \widehat{AME} + \widehat{CKE}$, mặt khác :

$$\widehat{AME} = \widehat{EAB} - \widehat{AEM}$$
$$\widehat{CKE} = \widehat{ECB} - \widehat{KEC},$$

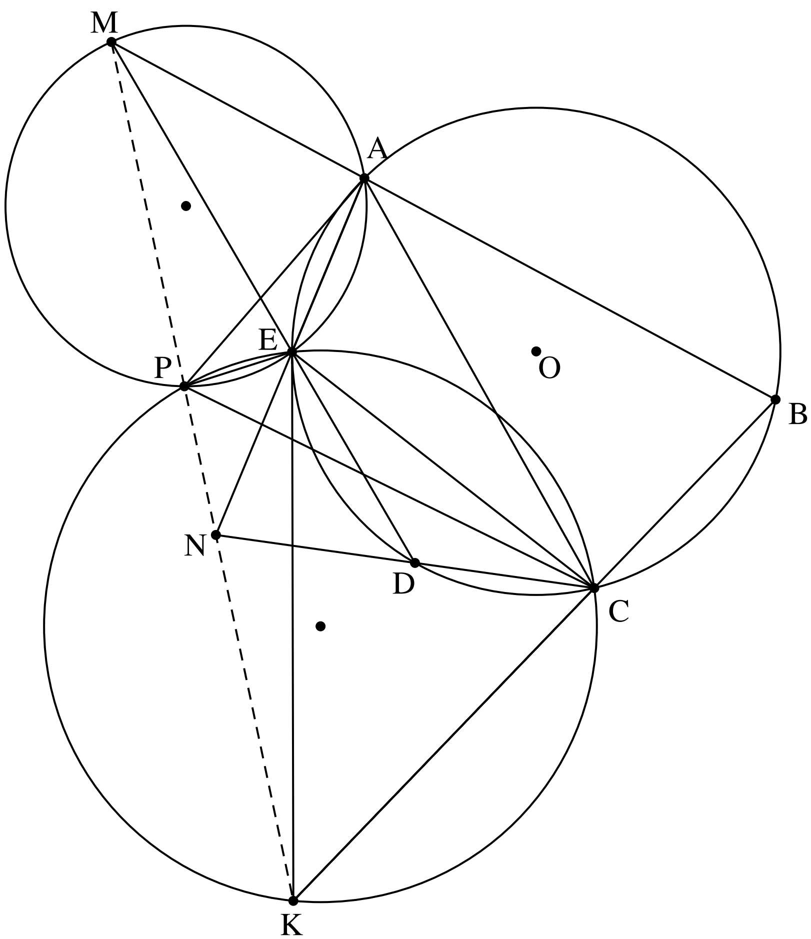
nên $\widehat{APC} = (\widehat{EAB} + \widehat{ECB}) - (\widehat{AEM} + \widehat{KEC}) = (180^o - \widehat{AEM}) - \widehat{KEC} = \widehat{AED} - \widehat{EAC}$ (1)

Lại có $\widehat{ANC} = \widehat{AED} - \widehat{EDN} = \widehat{AED} - \widehat{EAC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{APC} = \widehat{ANC}$, do đó tứ giác APNC nội tiếp.

c) Chứng minh rằng M, P, N, K thẳng hàng

Ta có $\widehat{ACD} = \widehat{AEM} = \widehat{MPA}$, từ đó kết hợp với tứ giác APNC nội tiếp ta dễ dàng chứng minh được M, P, N thẳng hàng. Theo câu a) ta có M, P, K thẳng hàng nên suy ra M, P, N, K thẳng hàng.



Bài 13.

Từ các tứ giác nội tiếp APHQ, AFHE ta có :

$$\widehat{HQP} = \widehat{HAP} = \widehat{HEF} \qquad (1)$$

$$\widehat{HPQ} = \widehat{HAQ} = \widehat{HFE} \qquad (2)$$

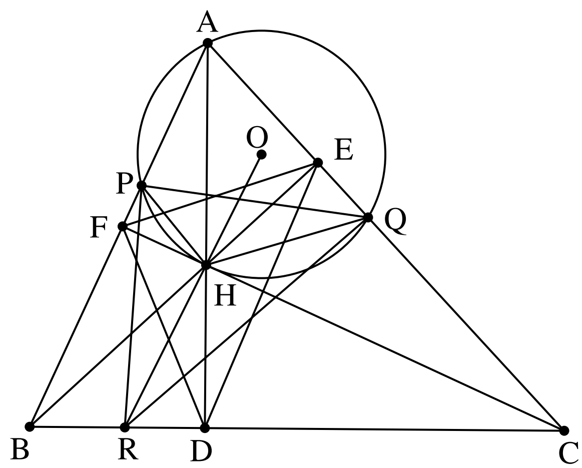
Ta thấy $\widehat{BPH} = \widehat{AQH} = 90^o - \widehat{OHA} = 90^o - \widehat{DHR} = \widehat{HRD}$, do đó tứ giác PHRB nội tiếp.

Suy ra $\widehat{HPR} = \widehat{HBR} = \widehat{HFD} \qquad (3)$

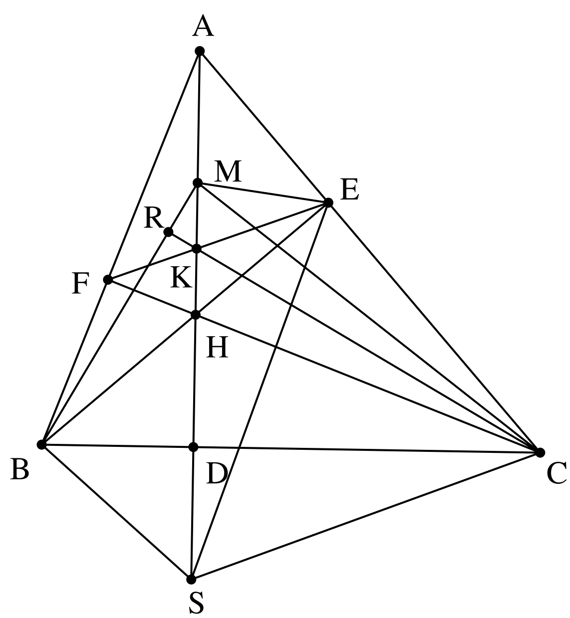
Chứng minh tương tự $\widehat{HQR} = \widehat{HCR} = \widehat{HED} \qquad (4)$

Từ (1) và (4) ta có $\widehat{PQR} = \widehat{FED}$; từ (2) và (3) ta có $\widehat{QPR} = \widehat{EFD}$.

Do đó $\Delta PQR \sim \Delta FED$ (g.g)



Bài 14.



Lấy điểm S đối xứng với H qua BC, R là giao điểm của KC với MB.

Ta có $\widehat{MSB} = \widehat{BHD} = \widehat{MHE} = \widehat{MEB}$ nên tứ giác MESB nội tiếp. Suy ra

$$\widehat{RBE} = \widehat{MSE} \quad (1)$$

Lại có $\widehat{KSC} = \widehat{CHD} = \widehat{AHF} = \widehat{AEK}$ nên tứ giác KSCE cũng nội tiếp, do đó

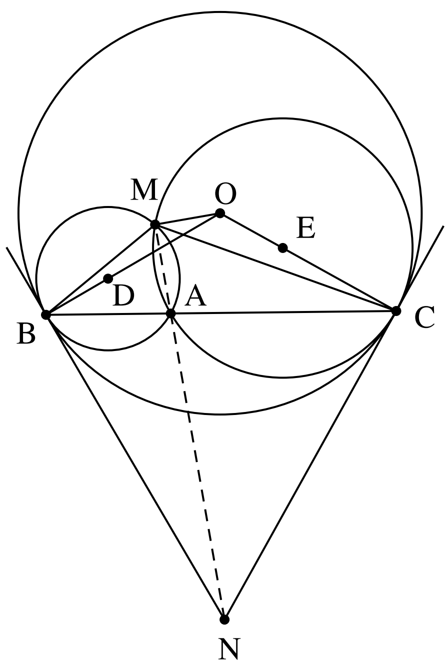
$$\widehat{MSE} = \widehat{RCE} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{RBE} = \widehat{RCE}$ nên tứ giác RBCE nội tiếp. Từ đó suy ra $\widehat{BRC} = \widehat{BEC} = 90^o$. Trong tam giác MBC, ta có $MK \perp BC$ và $CK \perp MB$ nên K là trực tâm của tam giác MBC.

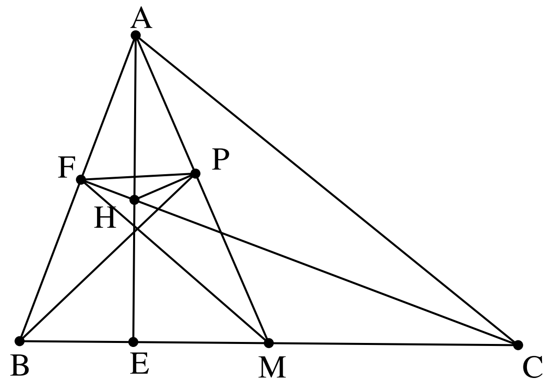
Bài 15.

Các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại N, ta có N cố định.

Ta có $\widehat{BMA} = \widehat{NBC}$ và $\widehat{CMA} = \widehat{NCB}$ nên $\widehat{BMC} = 180^o - \widehat{BNC} = \widehat{BOC}$, suy ra tứ giác BMOC nội tiếp. Mặt khác tứ giác BOCN cũng nội tiếp nên 5 điểm B, M, O, C, N cùng thuộc một đường tròn. Lại có $\widehat{BMA} = \widehat{CMA}$ nên MA luôn đi qua điểm chính giữa N của cung BC (đpcm).



Bài 16.



Gọi E, F là các giao điểm của AH, CH với BC, AB. Ta có các tứ giác HPME, BFHE nội tiếp nên $\widehat{AFP} = \widehat{AHP} = \widehat{AMB}$, suy ra tứ giác BFPM nội tiếp.

Do đó $\widehat{ABM} = \widehat{BFM} = \widehat{BPM}$, từ đó chứng minh được hai tam giác ABM và BPM đồng dạng với nhau, suy ra $AM.PM = BM^2$.

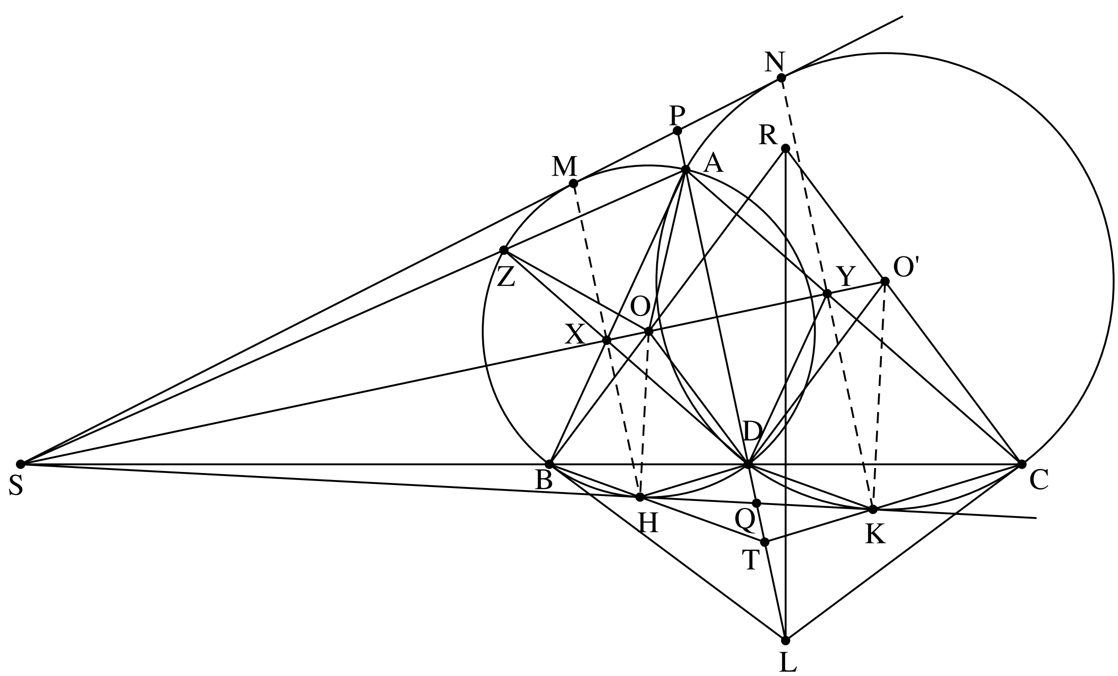
Bài 17.

<u>a) Chứng minh BC, OO’ và hai tiếp tuyến chung ngoài đồng quy tại S</u>

Gọi S là giao diểm của hai tiếp tuyến chung ngoài, S’ là giao điểm của BC và OO’.

Ta có $\widehat{BOD} = 2\widehat{ABD} = 2\widehat{ACD} = \widehat{CO'D}$, từ đó với chú ý các tam giác BOD và CO’D đều là các tam giác cân, ta suy ra OB // O’D. Suy ra $\dfrac{S'O}{S'O'} = \dfrac{OB}{O'D} = \dfrac{OH}{O'K} = \dfrac{SO}{SO'}$.

Vậy S trùng S’ (đpcm).



b) Chứng minh rằng MH, AB, SO đồng quy ; NK, AC, SO' đồng quy

Gọi X, Y theo thứ tự là giao điểm của OO' với MH, NK. Theo kết quả của VD14, ta có các tứ giác BDOX và CDYO' nội tiếp, kết hợp với OB // O'D, ta có

$\widehat{XDB} = \widehat{XOB} = \widehat{YO'D} = \widehat{YCD}$. Suy ra XD // YC (1)

Mặt khác, do OD // O'C, ta có $\widehat{XYD} = \widehat{O'CD} = \widehat{ODB} = \widehat{OBD} = \widehat{DXY}$ nên tam giác DXY cân tại D. Suy ra DX = DY, lại có AX = DX, AY = DY (OO' là đường trung trực của AD) nên AX = AY = DX = DY. Do đó AXDY là hình thoi, vậy XD // AY (2)

Từ (1) và (2) suy ra A, Y, C thẳng hàng.

Chứng minh tương tự, ta có đpcm.

c) Chứng minh rằng SA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Gọi Z là giao điểm của SA với đường tròn (O). Dễ thấy tứ giác OXZA nội tiếp nên $\widehat{OZA} = \widehat{OXA} = \widehat{OXD} = \widehat{OBD}$, từ đó chứng minh được hai tam giác OBD và OZA bằng nhau. Suy ra $\widehat{BXD} = \widehat{BOD} = \widehat{ZOA} = \widehat{ZXA}$ hay Z, X, D thẳng hàng. Vậy ta có $\widehat{SAB} = \widehat{ZDB} = \widehat{XOB} = \widehat{YO'D} = \widehat{ACB}$ hay SA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

d) Chứng minh LB là tiếp tuyến của (O), LC là tiếp tuyến của (O')

Gọi R là giao điểm của BO và CO'.Ta có tam giác BRC cân tại R nên

$\widehat{BRC} = 180^o - 2\widehat{RBC} = 180^o - 2\widehat{DXY} = \widehat{XDY} = \widehat{BAC}$. Suy ra tứ giác BARC nội tiếp. Mặt khác ta có AL và RL là các đường phân giác của các góc ABC và BRC nên dễ dàng có 5 điểm A, B, R, L, C cùng nằm trên một đường tròn. Suy ra $\widehat{RBL} = \widehat{RCL} = 90^o$ hay LB là tiếp tuyến của đường tròn (O) và LC là tiếp tuyến của đường tròn (O').

e) Chứng minh rằng $PQ^2 = AB.AC$

Gọi T là giao điểm BH và CK. Ta có OH // O'K và OD // O'C nên

$\widehat{HOD} = \widehat{KO'C} \Rightarrow \widehat{HBD} = \widehat{KDC}$ hay BH // DK. Tương tự CK // HD. Từ đó có ngay DHTK là hình bình hành. Mặt khác $QH^2 = QD.QA = QK^2$ nên Q là trung điểm của HK và do đó Q cũng là trung điểm của DT. Suy ra PQ = AD + 2DQ = AD + DT = AT.

Ta có $\widehat{ATB} = \widehat{TDK} = \widehat{ACT}$ (do HT // DK) và $\widehat{BAT} = \widehat{CAT}$ nên $\Delta ABT \sim \Delta ACT$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AT} = \dfrac{AT}{AC} \Rightarrow PQ^2 = AT^2 = AB.AC$ (đpcm).

Bài 18.

a) Chứng minh các tứ giác BDIE và DIFC nội tiếp

Ta có kết quả quen thuộc $AC^2 - CD^2 = AB^2 - BD^2$ và kết hợp với giả thiết, ta có AE.AB = AF.AC. Suy ra tứ giác BEFC nội tiếp, từ đó $\widehat{AEI} = \widehat{ACB} = \widehat{IDB}$ nên tứ giác BDIE nội tiếp. Tương tự ta cũng có tứ giác DIFC nội tiếp.

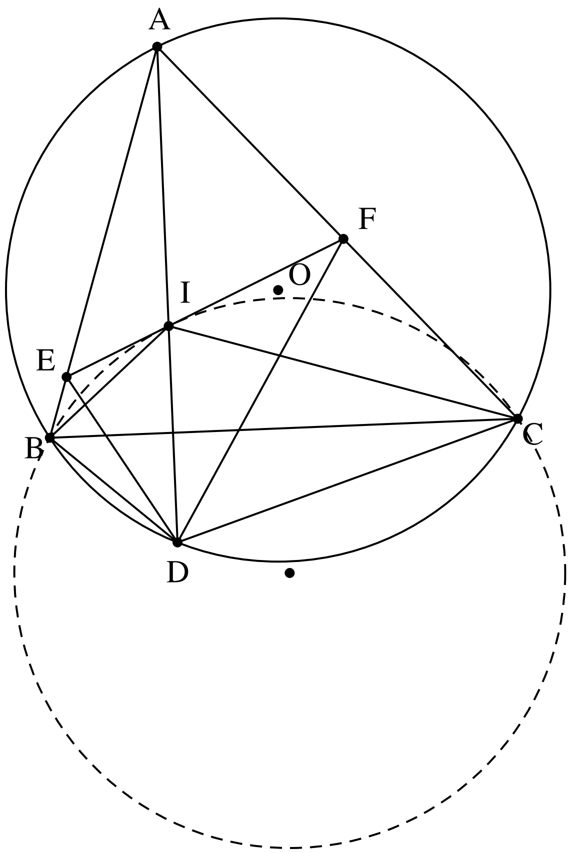
b) Chứng minh I và D đối xứng với nhau qua BC

Từ giả thiết dễ dàng có $\Delta BED \sim \Delta BDA$ (c.g.c), $\Delta CDF \sim \Delta CAD$ (c.g.c) nên suy ra

$\widehat{BDA} = \widehat{BED} = \widehat{BID}$ và $\widehat{CDA} = \widehat{CFD} = \widehat{CID}$. Do đó I và D đối xứng với nhau qua BC.

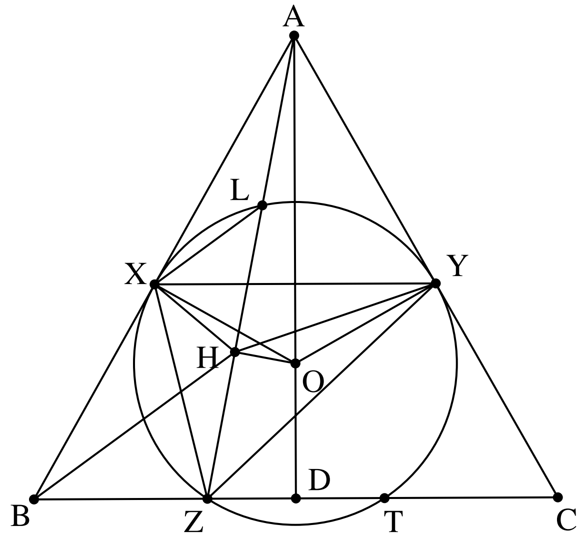
c) Chứng minh EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định

Gọi (O') là đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC thì (O') đối xứng với (O) qua BC nên (O') cố định. Lại có $\widehat{BIE} = \widehat{BDE} = \widehat{BAD} = \widehat{BCD} = \widehat{BCI}$, suy ra EF là tiếp tuyến của đường tròn (O'). Vậy EF luôn tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC cố định.



Bài 19.

Gọi L là giao điểm của AZ với (O). Dễ thấy O thuộc đường cao AD của tam giác cân ABC. Ta có $\widehat{AHO} = \widehat{AXO} = \widehat{AYO} = 90^o$ nên năm điểm A, X, H, O, Y cùng thuộc một đường tròn. Suy ra $\widehat{AOX} = \widehat{AHX}$. Tứ giác BXOD cũng nội tiếp nên $\widehat{AOX} = \widehat{XBD}$, do đó $\widehat{AHX} = \widehat{XBZ}$. Vậy tứ giác BZHX nội tiếp được nên $\widehat{XBH} = \widehat{XZH} = \widehat{AXL}$.
Suy ra XL // BH. Trong tam giác XZL, ta có H là trung điểm của ZL và BH // XL nên HB đi qua trung điểm của XZ.
Tương tự ta chứng minh được HC đi qua trung điểm của YZ.



Bài 20.

a) Chứng minh A, L, N thẳng hàng

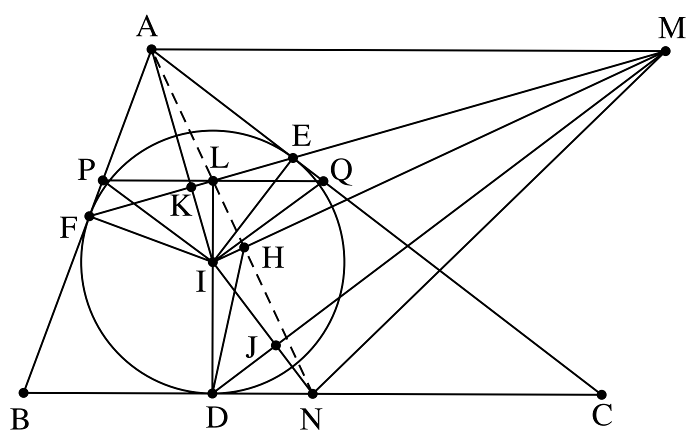
Qua L kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại P, Q. Ta có các tứ giác LPFI và LEQI nội tiếp nên $\widehat{IPL} = \widehat{IFL}, \widehat{IQL} = \widehat{IEL}$, mà $\widehat{IEL} = \widehat{IFL}$ nên $\widehat{IPL} = \widehat{IQL}$. Suy ra L là trung điểm của PQ, từ đó suy ra A, L, N thẳng hàng.

b) Chứng minh MD vuông góc với IN

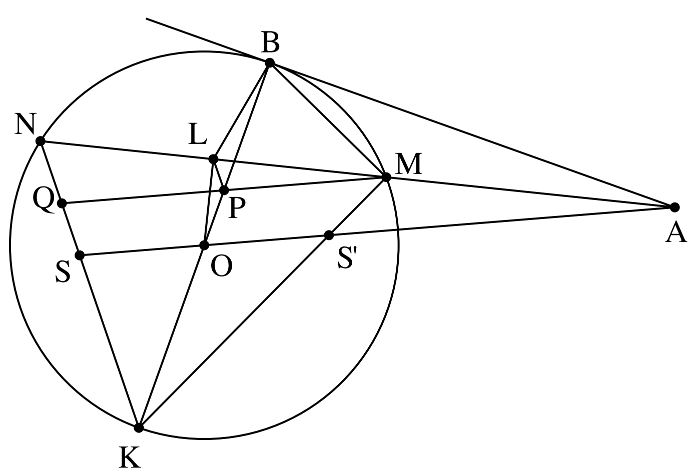
Dễ thấy $ML \perp AI, IL \perp AM$ nên L là trực tâm của tam giác AIM, do đó $AN \perp IM$. Gọi K, H theo thứ tự là giao điểm của ML, AL với AI, IM.

Dễ thấy $IH.IM = IK.IA = IE^2 = ID^2 \Rightarrow \Delta IHD \sim \Delta IDM\,(c.g.c) \Rightarrow \widehat{IDH} = \widehat{IMD}$.

Lại có tứ giác IHDN nội tiếp nên $\widehat{IDH} = \widehat{INH}$ suy ra $\widehat{INH} = \widehat{IMD}$. Gọi J là giao điểm của IN với MD. Theo trên ta có $\widehat{HNJ} = \widehat{HMJ}$ nên tứ giác HJNM nội tiếp, suy ra $\widehat{NJM} = \widehat{NHM} = 90^o$ hay $MD \perp IN$.



Bài 21.

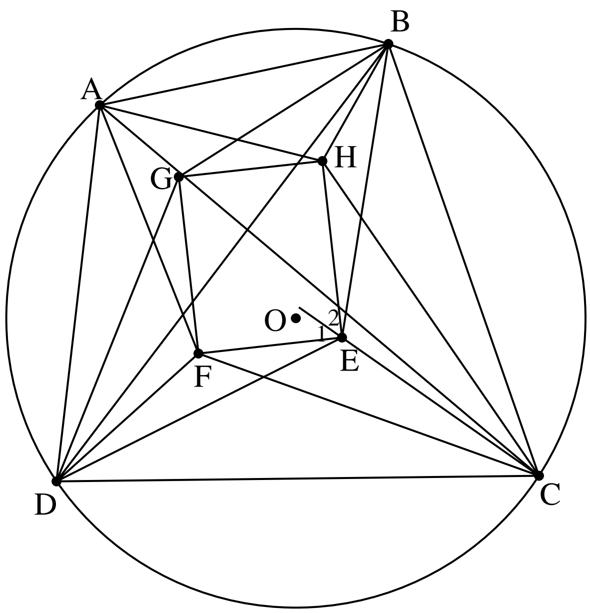


Qua M vẽ đường thẳng song song với SS’, đường thẳng này cắt BK, NK lần lượt ở P, Q. Gọi L là trung điểm của MN.

Ta có $\widehat{OLA} = \widehat{OBA} = 90^o$ nên tứ giác OLBA nội tiếp, suy ra $\widehat{OBL} = \widehat{OAL}$. Do MQ // AS nên $\widehat{OAL} = \widehat{PML}$, do đó $\widehat{OBL} = \widehat{PML}$ hay $\widehat{PBL} = \widehat{PML}$. Từ đó có tứ giác MPLB nội tiếp, vì vậy $\widehat{MLP} = \widehat{PBM} = \widehat{QNM}$, suy ra LP // NQ.

Trong tam giác MQN, ta có LN = LM và LP // NQ nên PQ = PM. Từ đó theo định lí Ta-lét, ta suy ra được SO = S'O.

Bài 22.



Ta nhắc lại kết quả quen thuộc sau : Nếu I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC thì $\widehat{BIC} = 90^o + \frac{\widehat{BAC}}{2}$.

Sử dụng kết quả trên vào các tam giác BCD và ABC, ta có :

$$\widehat{BEC} = 90^o + \frac{\widehat{BDC}}{2}$$

$$\widehat{BHC} = 90^o + \frac{\widehat{BAC}}{2}$$

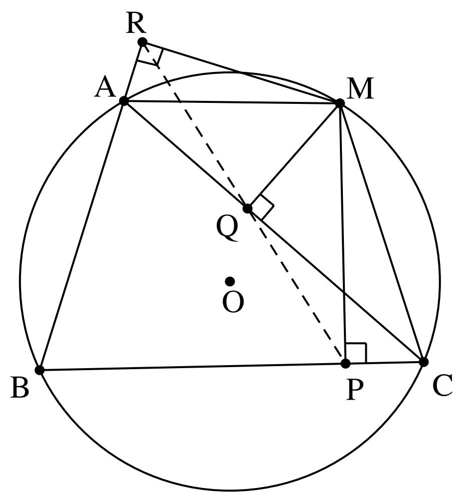
Mà $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ nên $\widehat{BEC} = \widehat{BHC}$, suy ra tứ giác BHEC nội tiếp. Do đó $\widehat{E_2} = \widehat{HBC} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$. Chứng minh tương tự, ta có $\widehat{E_1} = \widehat{FDC} = \frac{\widehat{ADC}}{2}$.

Suy ra $\widehat{HEF} = \widehat{E_1} + \widehat{E_2} = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ADC}}{2} = 90^o$.

Hoàn toàn tương tự, ta có $\widehat{EFG} = \widehat{HGF} = 90^o$.

Suy ra EFGH là hình chữ nhật.

Bài 23.



Ta có tứ giác MRAQ và BAMC nội tiếp nên $\widehat{MQR} = \widehat{MAR} = \widehat{MCP}$ (1)

Lại có tứ giác MCPQ nội tiếp nên $\widehat{MCP} + \widehat{MQP} = 180^o$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MQR} + \widehat{MQP} = 180^o$ hay $\widehat{PQR} = 180^o$

Vậy P, Q, R thẳng hàng.

Bài 24.

Gọi F là hình chiếu của M trên AB. Theo định lí Simson, ta có D, E, F thẳng hàng.

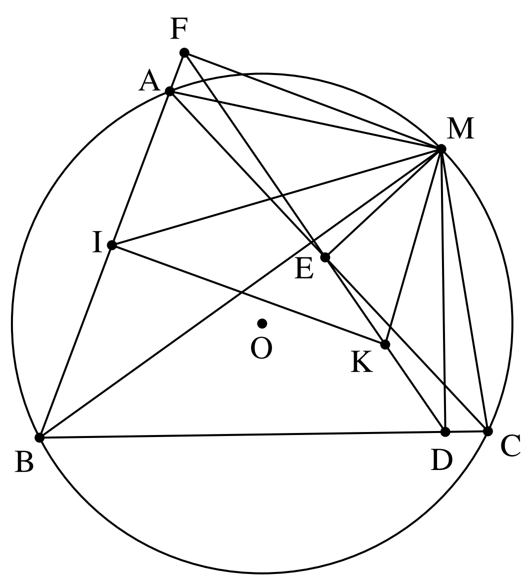
Ta có các tứ giác DEMC, BAMD nội tiếp nên :

$$\widehat{MDE} = \widehat{MCE} = \widehat{MBA}$$

$$\widehat{DME} = \widehat{DCE} = \widehat{AMB}$$

Từ đó suy ra $\Delta MDE \sim \Delta MBA$ (g.g) mà MK, MI là hai trung tuyến tương ứng của hai tam giác MDE, MBA nên $\Delta MKE \sim \Delta MIA \Rightarrow \widehat{MKF} = \widehat{MIF} \Rightarrow$ tứ giác MKIF nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{IKM} = 90^o$ (vì $\widehat{IFM} = 90^o$)



Nhận xét. Nếu không sử dụng định lí Simson, ta có cách khác như sau :
Từ hai tam giác đồng dạng MKE và MIA ta suy ra

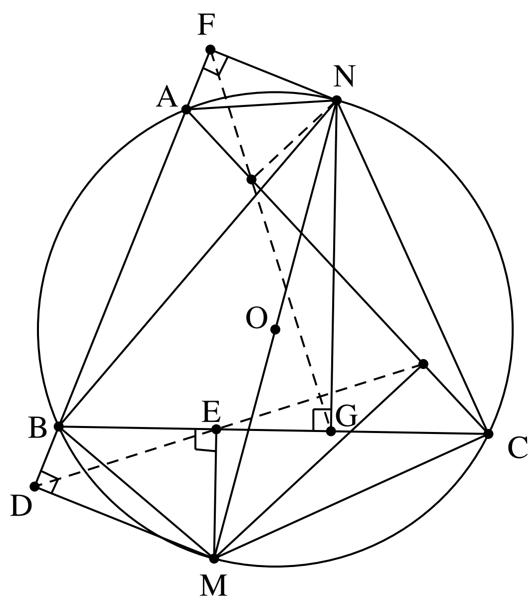
$$\widehat{KME} = \widehat{AMI} \qquad (1)$$

$$\frac{MK}{ME} = \frac{MI}{MA} \qquad (2)$$

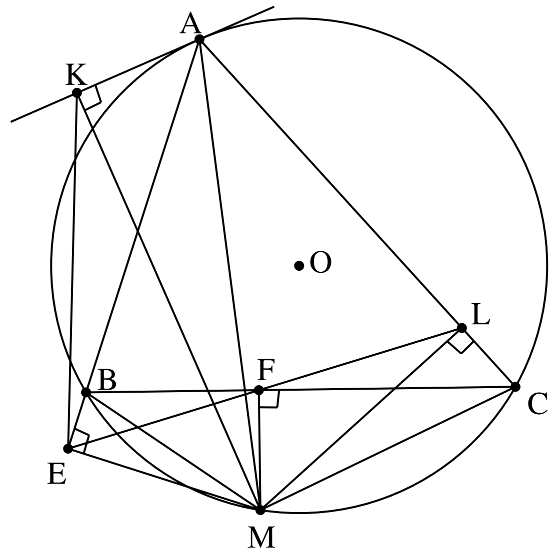
Từ (1) ta có $\widehat{KMI} = \widehat{AME}$, kết hợp với (2) ta suy ra hai tam giác IMK và AME đồng dạng. Từ đó $\widehat{IKM} = \widehat{AEM} = 90^o$.

B□i 25.

Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC ; F, G lần lượt là hình chiếu của N trên AB, BC. Ta có tứ giác BFNG nội tiếp nên $\widehat{DFG} = \widehat{BNG} = \widehat{MBE} = \widehat{MDE} = 90^o - \widehat{ADE}$ (chú ý rằng $\widehat{MAN} = 90^o$). Từ đó dễ dàng suy ra đpcm.



Bài 26.



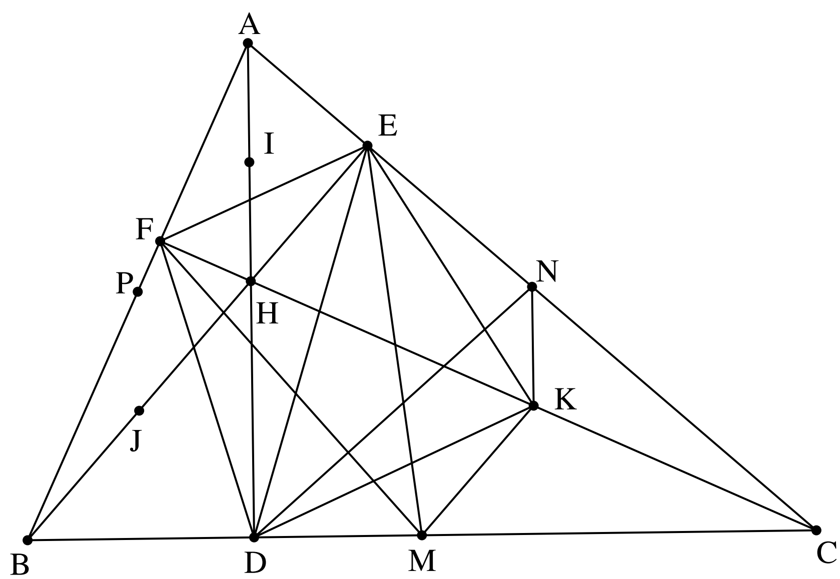
Trước hết ta có E, F, L thẳng hàng. Chú ý tứ giác nội tiếp AKEM, ta có :

$\widehat{MKE} = \widehat{MAE} = \widehat{MCF} = \widehat{MLF}$

$\widehat{MEK} = 180^o - \widehat{MAK} = 180^o - \widehat{MCL} = \widehat{MFL}$

Từ đó suy ra $\Delta MKE \sim \Delta MLF\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{MK}{ML} = \dfrac{ME}{MF} \Rightarrow ME.ML = MK.MF$

Bài 27.



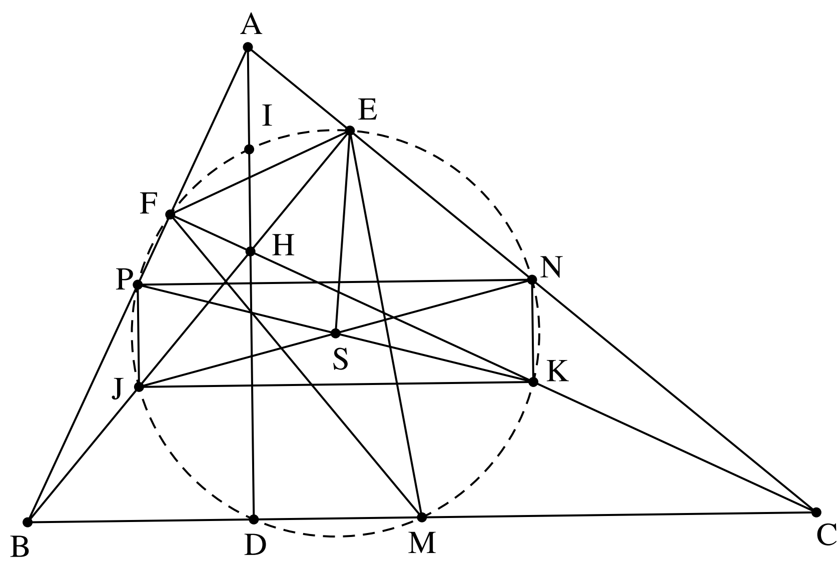
Sử dụng kết quả của VD16, ta có $\widehat{FDE} = 2\widehat{FDH} = 2\widehat{EBF} = \widehat{FME}$ (chú ý rằng M là tâm đường tròn ngoại tiếp của tứ giác nội tiếp BFEC). Suy ta tứ giác DFEM nội tiếp. Chứng minh tương tự, ta có các tứ giác DFEN và DEFP cũng nội tiếp. Suy ra D, E, F, M, N, P cùng nằm trên một đường tròn qua D, E, F. (1)

Mặt khác do tam giác HDC vuông tại D có K là trung điểm của HC nên $\widehat{FKD} = 2\widehat{HCB} = 2\widehat{HEF} = \widehat{FED}$. Suy ra tứ giác DEFK nội tiếp. Tương tự, các tứ giác DEIF và DEFJ cũng nội tiếp, do đó D, E, F, I, J, K cùng nằm trên đường tròn qua D, E, F (2)
Từ (1) và (2) suy ra D, E, F, M, N, P, I, J, K cùng nằm trên một đường tròn.
Cách khác.

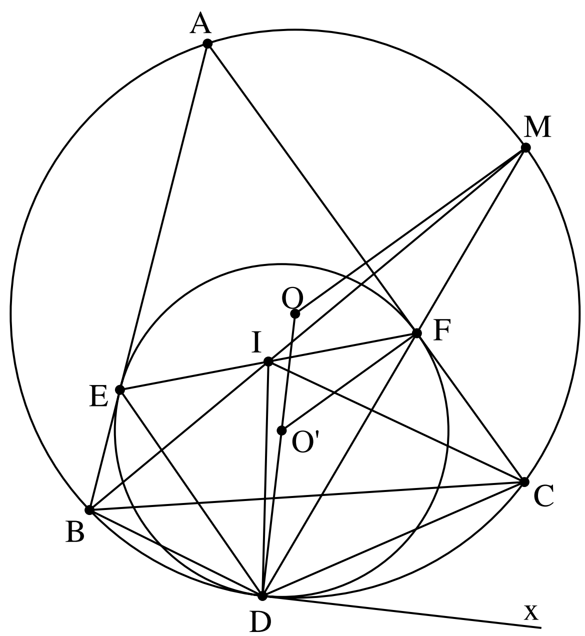
Ta có PJ là đường trung bình của tam giác AHB nên PJ // AH và $PJ = \frac{1}{2}AH$. Tương tự, ta có NK // AH và $NK = \frac{1}{2}AH$. Suy ra PJ // NK và PJ = NK, do đó PJKN là hình bình hành.
Mặt khác ta có $PJ \perp JK$ (do PJ // AH, $AH \perp BC$, BC // JK) nên PJKN là hình chữ nhật.
Gọi S là giao điểm của PK và NJ thì SP = SK = SN = SJ. Tương tự SI = SM = SP = SK.
Suy ra SI = SM = SP = SK = SN = SJ
Lại do tam giác JEN vuông tại E có SJ = SN nên SJ = SN = SE.
Tương tự, ta có SF = SP= SK, SI = SM = SD. Từ đó suy ra rằng :

SD = SE = SF = SM = SN = SP = SI = SJ = SK

Vậy 9 điểm D, E, F, M, N, P, I, J, K cùng nằm trên đường tròn tâm S.



Bài 28.



Gọi M là giao điểm của DF với đường tròn (O').

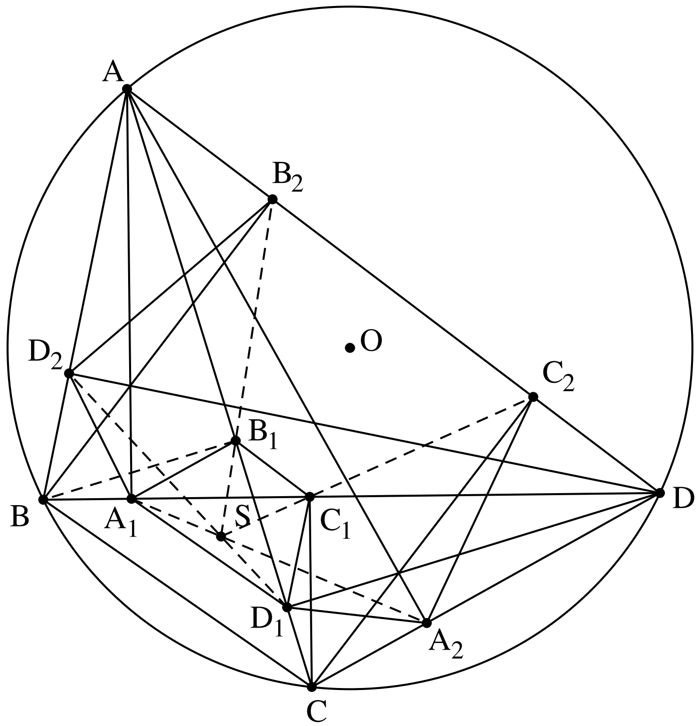
Ta có $\widehat{O'FD} = \widehat{O'DF} = \widehat{OMD}$ nên O'F // OM. Mà $O'F \perp AC$ nên $OM \perp AC$. Suy ra M là điểm chính giữa của cung AC. Gọi I là giao điểm của EF với BM thì BI là đường phân giác của góc ABC. Vẽ Dx là tiếp tuyến chung của (O) và (O') tại D.

Trong đường tròn (O) ta có $\widehat{IBD} = \widehat{xDM}$ và trong đường tròn (O') ta có $\widehat{IED} = \widehat{xDF}$. Do đó $\widehat{IED} = \widehat{IBD}$ hay tứ giác IEBD nội tiếp, suy ra $\widehat{IDB} = \widehat{AEI} = \dfrac{180^o - \widehat{BAC}}{2} = \dfrac{\widehat{BDC}}{2}$ (do tam giác AEF cân tại A và tứ giác ABDC nội tiếp).

Từ đó ta có $\widehat{IDC} = \dfrac{\widehat{BDC}}{2} = \dfrac{180^o - \widehat{BAC}}{2} = \widehat{AFI}$ hay tứ giác DIFC nội tiếp. Điều đó kéo theo $\widehat{IDF} = \widehat{ICF}$. Ta lại có $\widehat{IDF} = \widehat{IDC} - \widehat{FDC} = \dfrac{180^o - \widehat{BAC}}{2} - \dfrac{\widehat{ABC}}{2} = \dfrac{\widehat{ACB}}{2}$.

Vậy ta có $\widehat{ICF} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2}$, điều này chứng tỏ CI là đường phân giác của góc ACB. Suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (đpcm).

Bài 29.



a) Chứng minh các đường thẳng Simson ứng với các điểm A, B, C, D của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC đồng quy tại S

Gọi A_1, A_2 là hình chiếu của A trên BD, CD ; B_1, B_2 là hình chiếu của B trên AC, AD ; C_1, C_2 là hình chiếu của C trên BD, AD ; D_1, D_2 là hình chiếu của D trên AC, AB ; S là giao điểm của A_1A_2 với B_1B_2. Ta sẽ chứng minh C_1, S, C_2 và D_1, S, D_2 thẳng hàng.

Ta có 5 điểm A, B, A_1, B_1, B_2 cùng nằm trên đường tròn đường kính AB (vì $\widehat{AA_1B} = \widehat{AB_1B} = \widehat{AB_2B} = 90^o$) nên $\widehat{A_1B_1C} = \widehat{ABA_1} = \widehat{ACD}$, do đó A_1B_1 // CD. Chứng minh tương tự, ta có B_1C_1 // AD, C_1D_1 // AB, D_1A_1 // BC. Từ đó chứng minh được tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ nội tiếp.

Ta lại có :

$\widehat{SA_1B_1} = \widehat{A_2A_1D} + \widehat{B_1A_1D} = \widehat{A_2A_1D} + \widehat{A_2DA_1} = 180^o - \widehat{A_1A_2D} = \widehat{A_1AD} = \widehat{SB_1A_1}$ (do A_1B_1 // CD và các tứ giác $AA_1A_2D, A_1B_1B_2A$ nội tiếp). Do đó tam giác SA_1B_1 cân tại S, từ đó :

$\widehat{A_1SB_1} = 180^o - 2\widehat{SB_1A_1} = 180^o - 2\widehat{A_1AD} = 2\widehat{ADA_1} = 2\widehat{A_1D_1B_1}$ (do tam giác ADD_1 vuông tại D_1 và tứ giác AA_1D_1D nội tiếp). Suy ra S là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $A_1B_1C_1D_1$. Vì vậy, ta có :

$$\widehat{SC_1D_1} = 90^o - \frac{\widehat{D_1SC_1}}{2} = 90^o - \widehat{D_1A_1C_1} = 90^o - \widehat{DAD_1} = \widehat{ADD_1} \qquad (1)$$

Lại do 5 điểm C, D_1, C_1, C_2, D cùng nằm trên đường tròn đường kính CD nên suy ra

$\widehat{C_2DD_1} + \widehat{D_1C_1C_2} = 180^o$ hay $\widehat{ADD_1} + \widehat{D_1C_1C_2} = 180^o$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra C_1, S, C_2 thẳng hàng. (3)

Ta có : $\widehat{SD_1B_1} = 90^o - \dfrac{\widehat{B_1SD_1}}{2} = 90^o - \widehat{B_1A_1D_1}$, mà $\widehat{B_1A_1D_1} = \widehat{BAD}$ (vì $A_1B_1 // CD$ và $D_1A_1 // BC$) nên $\widehat{SD_1B_1} = 90^o - \widehat{BAD} = \widehat{ADD_2} = \widehat{AD_1D_2}$ (do tứ giác AD_2D_1D nội tiếp) hay $\widehat{AD_1S} = \widehat{ADD_2}$. Suy ra D_1, S, D_2 thẳng hàng. (4)

Từ (3) và (4) suy ra đpcm.

<u>b) Chứng minh đường tròn Euler của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC cũng đồng quy tại S</u>

Từ kết quả của câu a) và ví dụ 16, ta có

$\widehat{D_1A_2C_2} = 2\widehat{AA_2D_1} = 2\widehat{D_1CC_2} = 2\widehat{SC_1D_1} = 180^o - \widehat{D_1SC_2}$.

Suy ra tứ giác $SD_1A_2C_2$ nội tiếp. Theo kết quả của bài tập 27, đường tròn ngoại tiếp tam giác $D_1A_2C_2$ chính là đường tròn Euler của tam giác ACD. Vậy đường tròn Ơ-le của tam giác ACD đi qua S.

Chứng minh tương tự cho các tam giác còn lại, ta sẽ có đpcm.

V. NGUỒN THAM KHẢO

[1] - Để học tốt Toán 9 - Hình học, Hoàng Chúng (chủ biên), NXBGD.

[2] - Nâng cao và phát triển toán 9, Vũ Hữu Bình, NXBGD.

[3] - Forum mathscope.org