Một số ứng dụng bất đẳng thức lượng giác trong tam giác

Trương Ngọc Đắc
Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn

1 Một số đẳng thức lượng giác cơ bản

Ta xét ba hệ thức lượng giác cơ bản sau:

1.1 Hệ thức

Với $x, y, z \in R \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x.\tan y.\tan z \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = k\pi \\ x, y, z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

* Đặc biệt: Nếu $x, y, z \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $x + y + z = \pi$

1.2 Hệ thức.

Với $x, y, z \in R \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\tan x.\tan y + \tan y.\tan z + \tan z.\tan x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x, y, z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

* Đặc biệt: Nếu $x, y, z \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $x + y + z = \frac{\pi}{2}$

1.3 Hệ thức.

Với $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + 2\cos x.\cos y.\cos z = 1$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{x+y+z}{2}.\cos\frac{x+y-z}{2}.\cos\frac{y+z-x}{2}.\cos\frac{z+x-y}{2} = 0$$

* Đặc biệt: Nếu $x, y, z \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $x + y + z = \pi$

1.4 Một số bất đẳng thức lượng giác trong tam giác

Trong phần này ta chỉ chứng minh một số bất đẳng thức lượng giác trong tam giác mà phần 2 sẽ ứng dụng để chứng minh bất đẳng thức đại số.

1.5 Bất đẳng thức.

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

* Đây là bất đẳng thức cơ bản đã được chứng minh trong SGK 11NC.

1.6 Bất đẳng thức.

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$\cos A.\cos B.\cos C \leq \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Chứng minh.

Ta nhận thấy, nếu tam giác ABC không nhọn thì bất đẳng thức đúng. Xét tam giác ABC nhọn, ta có

$$\cos A.\cos B = \frac{1}{2}\left(\cos(A+B) + \cos(A-B)\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \cos(A+B)\right) = \cos^2\frac{A+B}{2} = \sin^2\frac{C}{2} \quad (1)$$

Tương tự (1):

$$\cos B.\cos C \leq \sin^2\frac{A}{2} \quad (2)$$

$$\cos C.\cos A \leq \sin^2\frac{B}{2} \quad (3)$$

Do các vế của các bất đẳng thức (1) , (2) và (3) đều dương, nên suy ra

$$\cos A.\cos B.\cos C \leq \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

1.7 Bất đẳng thức.

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Chứng minh.

Ta có:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{1}{2}\left(3 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C\right) \tag{4}$$

Mặt khác:

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A.\cos B.\cos C \tag{5}$$

Và từ bất đẳng thức1, ta chứng minh:

$$\cos A.\cos B.\cos C \leq \frac{1}{8} \tag{6}$$

Từ (4) , (5) và (6) ta có:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

1.8 Bất đẳng thức.

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$\sin A + \sin B - \cos C \leq \frac{3}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Chứng minh.

Ta có:

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \leq 2\sin\frac{A+B}{2} = 2\cos\frac{C}{2}.$$

Do đó:

$$\sin A + \sin B - \cos C \leq 2\cos\frac{C}{2} - \left(2\cos^2\frac{C}{2} - 1\right) = -2\left(\cos\frac{C}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Suy ra:

$$\sin A + \sin B - \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} A = B = \dfrac{\pi}{6} \\ C = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

1.9 Bất đẳng thức.

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có: $\cos A + \cos B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Chứng minh.

Ta có:

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \leq 2\cos\frac{A+B}{2} \tag{7}$$

Tương tự:

$$\sin C + \sin\frac{\pi}{3} = 2\sin\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{C-\frac{\pi}{3}}{2} \leq 2\cos\frac{C-\frac{\pi}{3}}{2} \tag{8}$$

Vì: $\sin\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2} \leq 1,\ \cos\frac{C-\frac{\pi}{3}}{2} > 0$

Từ (7) và (8) suy ra:

$$\cos A + \cos B + \sin C + \sin\frac{\pi}{3} \leq 2\left(\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{C-\frac{\pi}{3}}{2}\right)$$

$$= 4\cos\frac{A+B+C-\frac{\pi}{3}}{4}\cos\frac{A+B-C+\frac{\pi}{3}}{4} \leq 4\cos\frac{\pi}{6}$$

Từ đó suy ra: $\cos A + \cos B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} A = B = \dfrac{\pi}{6} \\ C = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

1.10 Bất đẳng thức.

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có: $\sqrt{3}\cos A - \sin B + \sqrt{3}\sin C \leq \frac{5}{2}$ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Chứng minh. Ta có:

$$\cos A + \sin C = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) + \sin C = 2\sin\frac{\frac{\pi}{2} - A + C}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2} - A - C}{2}$$

$$\leq 2\cos\frac{\frac{\pi}{2} - A - C}{2} = 2\cos\frac{B - \frac{\pi}{2}}{2} = 2\cos\left(\frac{B}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}\cos A - \sin B + \sqrt{3}\sin C \le 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{B}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right)\\
&= 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{B}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{2}\right) + 1\\
&= -2\left[\cos\left(\frac{B}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2 + \frac{3}{2} + 1 \le \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$\sqrt{3}\cos A - \sin B + \sqrt{3}\sin C \le \frac{5}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} A = B = \dfrac{\pi}{6} \\ C = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

1.11 Bất đẳng thức.

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$\sin 2A + \sin 2B + \cos 2C \le \frac{3}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Chứng minh.

Ta có:

$$\begin{aligned}
&\sin 2A + \sin 2B + \cos 2C = 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 1 - 2\sin^2 C\\
&\le 2\sin C - 2\sin^2 C + 1 = -2\left(\sin C - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} \le \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$\sin 2A + \sin 2B + \cos 2C \le \frac{3}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} A = B \\ \sin C = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B = \dfrac{5\pi}{12} \\ C = \dfrac{\pi}{6} \end{cases} \vee \begin{cases} A = B = \dfrac{\pi}{12} \\ C = \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$$

1.12 Bất đẳng thức.

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$\cos 2A + \sqrt{3}(\cos 2B + \cos 2C) \geq -\frac{5}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Chứng minh.

Ta có:

$$\cos 2A + \sqrt{3}(\cos 2B + \cos 2C) = 2\cos^2 A - 1 - 2\sqrt{3}\cos A\cos(B-C)$$

$$= 2\left(\cos A - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(B-C)\right)^2 - \frac{3}{2}\cos^2(B-C) - 1 \geq -\frac{3}{2}\cos^2(B-C) - 1 \geq -\frac{5}{2}$$

Từ đó suy ra:

$$\cos 2A + \sqrt{3}(\cos 2B + \cos 2C) \geq -\frac{5}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} A = \dfrac{\pi}{6} \\ B = C = \dfrac{5\pi}{12} \end{cases}$$

1.13 Bất đẳng thức.

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC nhọn ta có:

$$2(\cos A.\cos B + \cos B.\cos C + \cos C.\cos A) \leq 4\cos A.\cos B.\cos C + 1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Chứng minh. Ta có:

$$2\cos A.\cos B = \sqrt{\sin 2A.\cot A.\sin 2B.\cot B} \leq \frac{1}{2}(\sin 2A.\cot B + \sin 2B.\cot A) \quad (9)$$

Tương tự (9):

$$2\cos B.\cos C = \sqrt{\sin 2B.\cot B.\sin 2C.\cot C} \leq \frac{1}{2}(\sin 2B.\cot C + \sin 2C.\cot B) \quad (10)$$

$$2\cos C.\cos A = \sqrt{\sin 2C.\cot C.\sin 2A.\cot A} \leq \frac{1}{2}(\sin 2C.\cot A + \sin 2A.\cot C) \quad (11)$$

Cộng các bất đẳng thức (9) , (10) và (11) về theo vế ta được:

$$\begin{aligned}
&2(\cos A.\cos B+\cos B.\cos C+\cos C.\cos A)\\
&\leq \frac{1}{2}\left\{\cot A\,(\sin 2B+\sin 2C)+\cot B\,(\sin 2C+\sin 2A)+\cot C\,(\sin 2A+\sin 2B)\right\}\\
&=\cot A.\sin A.\cos(B-C)+\cot B.\sin B.\cos(C-A)+\cot C.\sin C.\cos(A-B)\\
&=-\frac{1}{2}\left[\cos(B+C).\cos(B-C)+\cos(C+A).\cos(C-A)+\cos(A+B).\cos(A-B)\right]\\
&=-\left(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\right)=-\left(-1-4\cos A.\cos B.\cos C\right)
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$2(\cos A.\cos B+\cos B.\cos C+\cos C.\cos A)\leq 4\cos A.\cos B.\cos C+1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

2 Một số ứng dụng bất đẳng thức lượng giác trong tam giác

Trong phần 2 này chủ yếu chứng minh một số bất đẳng thức đại số hoặc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức đại số có điều kiện ràng buộc ban đầu. Sử dụng các đẳng thức và bất đẳng thức lượng giác trong tam giác đã được chứng minh trong phần 1, ta có được cách chứng minh các bất đẳng thức đại số mà nếu giải bằng các phương pháp khác sẽ gặp nhiều phức tạp và khó khăn.

Bài toán 1. Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện: $a+b+c=1$
Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{c}{c+ab}\leq\frac{9}{4}.$$

Nhận xét

Từ điều kiện giả thiết và bất đẳng thức cần chứng minh ta nhận thấy vai trò của các biến a, b, c như nhau, nhưng bất đẳng thức cần chứng minh không thuần nhất sẽ tạo cho học sinh biến đổi để sử dụng các bất đẳng thức cổ điển như Cauchy, Bunhiacopski... rất khó khăn. Việc biến đổi giả thiết và bất đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$a+b+c=\sqrt{\frac{bc}{a}}\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\sqrt{\frac{bc}{a}}=1$$

$$\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{c}{c+ab}=\frac{1}{1+\dfrac{bc}{a}}+\frac{1}{1+\dfrac{ca}{b}}+\frac{1}{1+\dfrac{ab}{c}}$$

Và áp dụng bất đẳng thức1 ta có lời giải sau.

Lời giải Ta có:

$$a+b+c=\sqrt{\frac{bc}{a}}\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\sqrt{\frac{bc}{a}}=1 \tag{12}$$

Đặt:

$$\sqrt{\frac{bc}{a}}=\tan\frac{A}{2},\ \sqrt{\frac{ca}{b}}=\tan\frac{B}{2},\ \sqrt{\frac{ab}{c}}=\tan\frac{C}{2};\ A,B,C\in(0;\pi).$$

Từ giả thiết (12) và hệ thức2, ta có $A+B+C=\pi$ Áp dụng bất đẳng thức 1, ta có:

$$\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{c}{c+ab}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\tan^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{1+\tan^2\frac{C}{2}}$$
$$=\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)+\frac{3}{2}\le\frac{3}{4}+\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

Suy ra:

$$\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{c}{c+ab}\le\frac{9}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài toán 2. Cho ba số thực dương a,b,c thay đổi thỏa mãn điều kiện: $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q=\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{\sqrt{abc}}{c+ab}.$$

Nhận xét

* Với giả thiết hoàn toàn tương tự như bài toán1, nhưng việc tìm giá trị lớn nhất của biểu thức Q không đối xứng với các biến a,b,c là một bài toán khó.

* Khi tiếp cận được cách giải của bài toán1 thì ta có thể biến đổi biểu thức Q về dạng lượng giác mà việc tìm giá trị lớn nhất của biểu thức lượng giác đó không phức tạp và áp dụng bất đẳng thức 6 ta có lời giải sau.

Lời giải

Ta có:

$$a+b+c=\sqrt{\frac{bc}{a}}\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\sqrt{\frac{bc}{a}}=1 \tag{13}$$

Đặt:

$$\sqrt{\frac{bc}{a}}=\tan\frac{A}{2},\ \sqrt{\frac{ca}{b}}=\tan\frac{B}{2},\ \sqrt{\frac{ab}{c}}=\tan\frac{C}{2};\ A,B,C\in(0;\pi).$$

Từ giả thiết (13) và hệ thức2, ta có $A+B+C=\pi$

Áp dụng bất đẳng thức 6, ta có:

$$Q=\frac{1}{1+\tan^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\tan^2\frac{B}{2}}+\frac{\tan\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}}=1+\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\sin C)\leq 1+\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Suy ra

$$\max Q=1+\frac{3\sqrt{3}}{4},\ \textit{khi}\ a=b=2\sqrt{3}-3,\ c=7-4\sqrt{3}.$$

Hoàn toàn tương tự như bài toán2, việc sử dụng bất đẳng thức 6, ta sẽ có được lời giải bài toán3.

Bài toán 3. Cho ba số thực dương a,b,c thay đổi, thỏa mãn điều kiện: $a+b+c=1$

Chứng minh rằng:

$$\sqrt{3}\left(\frac{bc}{a+bc}-\frac{\sqrt{abc}}{c+ab}\right)+\frac{\sqrt{abc}}{b+ca}\geq\frac{2\sqrt{3}-5}{4}.$$

Lời giải

Ta có:

$$a+b+c=\sqrt{\frac{bc}{a}}\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\sqrt{\frac{bc}{a}}=1 \tag{14}$$

Đặt:

$$\sqrt{\frac{bc}{a}}=\tan\frac{A}{2},\ \sqrt{\frac{ca}{b}}=\tan\frac{B}{2},\ \sqrt{\frac{ab}{c}}=\tan\frac{C}{2};\ A,B,C\in(0;\pi).$$

Từ giả thiết (14) và hệ thức 2, ta có $A+B+C=\pi$

Áp dụng bất đẳng thức 6, ta có:

$$\begin{aligned}Q&=\sqrt{3}\left(\frac{\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}-\frac{\tan\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}}\right)+\frac{\tan\frac{B}{2}}{1+\tan^2\frac{B}{2}}\\&=\sqrt{3}\left(\sin^2\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\sin C\right)+\frac{1}{2}\sin B\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos A-\sin C)+\frac{1}{2}\sin B\\&=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\cos A-\sin B+\sqrt{3}\sin C\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\geq-\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Suy ra

$$\min Q=\frac{2\sqrt{3}-5}{4},\quad\text{khi}\ \begin{cases}A=B=\frac{\pi}{6}\\C=\frac{2\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=2\sqrt{3}-3\\c=7-4\sqrt{3}\end{cases}.$$

Bài toán 4. Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện: $ab+bc+ca = abc$
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab}.$$

Nhận xét

Tương tự như các biến đổi trên, ta biến đổi giả thiết và bất đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$ab+bc+ca = abc \Leftrightarrow \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} = \sqrt{\frac{bc}{a}}\sqrt{\frac{ca}{b}}\sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

Và

$$\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab} = \frac{1}{1+\frac{bc}{a}} + \frac{1}{1+\frac{ca}{b}} + \frac{1}{1+\frac{ab}{c}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức 3, cho ta có lời giải sau.

Lời giải

Ta có:

$$ab+bc+ca = abc \Leftrightarrow \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} = \sqrt{\frac{bc}{a}}\sqrt{\frac{ca}{b}}\sqrt{\frac{ab}{c}} \tag{15}$$

Đặt:

$$\sqrt{\frac{bc}{a}} = \tan A,\ \sqrt{\frac{ca}{b}} = \tan B,\ \sqrt{\frac{ab}{c}} = \tan C;\ \ A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Từ giả thiết (15) và hệ thức1, ta có $A+B+C = \pi$ Áp dụng bất đẳng thức 3, ta có:

$$\begin{aligned}&\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab} = \frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{1}{1+\tan^2 B} + \frac{1}{1+\tan^2 C}\\ &= \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Suy ra

$$\min P = \frac{3}{4} \text{ khi } a = b = c = 3.$$

Bài toán 5. Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện: $ab+bc+ca = abc$.
Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+bc} + \sqrt{3}\left(\frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab}\right) \geq \frac{4\sqrt{3}-3}{4}.$$

Nhận xét

Với giả thiết tương tự như giả thiết của bài toán4, nhưng việc chứng minh bất đẳng thức đã cho không đối xứng với các biến a, b, c. Ta biến đổi giả thiết và bất đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$ab + bc + ca = abc \Leftrightarrow \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} = \sqrt{\frac{bc}{a}}\sqrt{\frac{ca}{b}}\sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

Và

$$\frac{a}{a+bc} + \sqrt{3}\left(\frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab}\right) = \frac{1}{1+\frac{bc}{a}} + \sqrt{3}\left(\frac{1}{1+\frac{ca}{b}} + \frac{1}{1+\frac{ab}{c}}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức 8, cho ta có lời giải sau.
Lời giải Ta có:

$$ab + bc + ca = abc \Leftrightarrow \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} = \sqrt{\frac{bc}{a}}\sqrt{\frac{ca}{b}}\sqrt{\frac{ab}{c}} \tag{16}$$

Đặt:

$$\sqrt{\frac{bc}{a}} = \tan A,\ \sqrt{\frac{ca}{b}} = \tan B,\ \sqrt{\frac{ab}{c}} = \tan C;\ A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Từ giả thiết (16) và hệ thức1, ta có $A + B + C = \pi$

Áp dụng bất đẳng thức 8, ta có:

$$\frac{a}{a+bc} + \sqrt{3}(\frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab}) = \frac{1}{1+\tan^2 A} + \sqrt{3}(\frac{1}{1+\tan^2 B} + \frac{1}{1+\tan^2 C})$$
$$= \cos^2 A + \sqrt{3}(\cos^2 B + \cos^2 C) = \frac{1}{2}\left(\cos 2A + \sqrt{3}(\cos 2B + \cos 2C)\right) + \frac{1}{2} + \sqrt{3}$$
$$\geq -\frac{5}{4} + \frac{1}{2} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}-3}{4}$$

Vậy

$$\frac{a}{a+bc} + \sqrt{3}\left(\frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab}\right) \geq \frac{4\sqrt{3}-3}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} A = \frac{\pi}{6} \\ B = C = \frac{5\pi}{12} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 7 + 4\sqrt{3} \\ b = c = \frac{3+2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Bài toán 6. Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện: $abc + a + b = c$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} - \frac{c^2}{c^2+1}.$$

Nhận xét

* Ta biến đổi giả thiết và biểu thức Q về dạng:

$$abc+a+b=c \Leftrightarrow a.b+b.\frac{1}{c}+\frac{1}{c}.a=1.$$

Và

$$Q=\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}-\frac{1}{1+\frac{1}{c^2}}.$$

Khi đó thực hiện phép đặt ẩn phụ đưa bài toán về tìm giá trị lớn nhất của một biểu thức lượng giác như sau và áp dụng bất đẳng thức 4, ta có lời giải.

Lời giải

Từ điều kiện ta có:

$$a.b+b.\frac{1}{c}+\frac{1}{c}.a=1 \tag{17}$$

Đặt:

$$a=\tan\frac{A}{2},\ b=\tan\frac{B}{2},\ \frac{1}{c}=\tan\frac{C}{2};\ A,B,C\in(0;\pi).$$

Từ giả thiết (17) và hệ thức 2, ta có $A+B+C=\pi$

Với cách đặt trên thì

$$Q=\frac{\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}+\frac{\tan\frac{B}{2}}{1+\tan^2\frac{B}{2}}-\frac{1}{1+\tan^2\frac{C}{2}}=\frac{1}{2}(\sin A+\sin B-\cos C)-\frac{1}{2}$$
$$\le\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

Suy ra

$$\max Q=\frac{1}{4},\ \text{khi}\ \begin{cases} A=B=\dfrac{\pi}{6} \\ C=\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}\rightarrow\begin{cases} a=b=2-\sqrt{3} \\ c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

Bài toán 7. Cho ba số thực dương a,b,c thay đổi thỏa mãn điều kiện: $abc+a+b=c$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q=\frac{2(1+ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}+\frac{c}{1+c^2}.$$

Nhận xét

Tương tự cách biến đổi như bài toán 6, áp dụng bất đẳng thức 5, ta có lời giải.

Lời giải

Từ điều kiện ta có:

$$a.b+b.\frac{1}{c}+\frac{1}{c}.a=1 \tag{18}$$

Đặt:

$$a=\tan\frac{A}{2},\ b=\tan\frac{B}{2},\ \frac{1}{c}=\tan\frac{C}{2};\ A,B,C\in(0;\pi).$$

Từ giả thiết (18) và hệ thức 2, ta có $A+B+C=\pi$

Với cách đặt trên thì

$$Q\le\frac{2+a^2+b^2}{(1+a^2)(1+b^2)}+\frac{c}{1+c^2}=\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}$$

$$=\frac{1}{1+\tan^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\tan^2\frac{B}{2}}+\frac{\tan\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}}=1+\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\sin C)\le 1+\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Suy ra

$$\max Q=1+\frac{3\sqrt{3}}{4},\ \text{khi}\ \begin{cases}A=B=\dfrac{\pi}{6}\\ C=\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}\to\begin{cases}a=b=2-\sqrt{3}\\ c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

Bài toán 8. Cho ba số thực dương a,b,c thay đổi thỏa mãn điều kiện: $ab=1+bc+ca$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q=\dfrac{a^2}{a^2+1}+\dfrac{b^2}{b^2+1}+\dfrac{c}{c^2+1}$

Nhận xét

* Khi thay đổi giả thiết của các bài toán 6,7,8 bởi các giả thiết khác ta được các bài toán mới mà cách giải không thay đổi.

* Ta thực hiện phép biến đổi giả thiết

$$ab=1+bc+ca\Leftrightarrow\frac{1}{a}.\frac{1}{b}+\frac{1}{b}.c+c.\frac{1}{a}=1.$$

* Áp dụng bất đẳng thức 5 ta có cách giải của bài toán như sau.

Lời giải Từ điều kiện ta có:

$$\frac{1}{a}.\frac{1}{b}+\frac{1}{b}.c+c.\frac{1}{a}=1\tag{19}$$

Đặt:

$$\frac{1}{a}=\tan\frac{A}{2},\ \frac{1}{b}=\tan\frac{B}{2},\ c=\tan\frac{C}{2};\ A,B,C\in(0;\pi).$$

Từ giả thiết (19) và hệ thức 2, ta có $A+B+C=\pi$

Với cách đặt trên và áp dụng bất đẳng thức 5, ta có

$$Q=\frac{1}{1+\tan^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\tan^2\frac{B}{2}}+\frac{\tan\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}}=\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\frac{1}{2}\sin C$$

$$=\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\sin C)+1$$

$$\le\frac{3\sqrt{3}}{4}+1$$

Suy ra

$$\max Q = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 1,\ \text{ khi } \left\{ \begin{array}{l} A = B = \dfrac{\pi}{6} \\ C = \dfrac{2\pi}{3} \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{l} a = b = 2 + \sqrt{3} \\ c = \sqrt{3} \end{array} \right.$$

Bài toán 9. Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện: $ab = 1 + bc + ca$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{3}}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} - \frac{\sqrt{3}.c}{c^2+1}.$$

Lời giải

Từ điều kiện ta có:

$$\frac{1}{a}.\frac{1}{b} + \frac{1}{b}.c + c.\frac{1}{a} = 1 \tag{20}$$

Đặt:

$$\frac{1}{a} = \tan\frac{A}{2}, \frac{1}{b} = \tan\frac{B}{2}, c = \tan\frac{C}{2};\ A, B, C \in (0;\pi).$$

Từ giả thiết (20) và hệ thức 2, ta có $A + B + C = \pi$

Với cách đặt và áp dụng bất đẳng thức 6, ta có

$$P = \frac{\sqrt{3}\tan^2\dfrac{A}{2}}{1+\tan^2\dfrac{A}{2}} + \frac{\tan\dfrac{B}{2}}{1+\tan^2\dfrac{B}{2}} - \frac{\sqrt{3}\tan\dfrac{C}{2}}{1+\tan^2\dfrac{C}{2}} = \sqrt{3}\sin^2\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\sin B - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos A) + \frac{1}{2}\sin B - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C = -\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos A + \sin C) + \frac{1}{2}\sin B + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\geq \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{4}$$

Suy ra

$$minP = \frac{2\sqrt{3}-5}{4},\ \text{ khi } \left\{ \begin{array}{l} A = B = \dfrac{\pi}{6} \\ C = \dfrac{2\pi}{3} \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{l} a = b = 2 + \sqrt{3} \\ c = \sqrt{3} \end{array} \right.$$

Bài toán 10. Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện: $ab = 1 + bc + ca$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^2+1} + \frac{\sqrt{3}}{b^2+1} - \frac{\sqrt{3}}{c^2+1}.$$

Lời giải

Từ điều kiện ta có:

$$a.b.\frac{1}{c} = a + b + \frac{1}{c} \tag{21}$$

Đặt:
$$a = \tan A,\ b = \tan B,\ \frac{1}{c} = \tan C;\ A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$
Từ giả thiết (21) và hệ thức 1, ta có $A + B + C = \pi$

Với cách đặt và áp dụng bất đẳng thức 8, ta có
$$P = \frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{\sqrt{3}}{1+\tan^2 B} - \frac{\sqrt{3}\tan^2 C}{1+\tan^2 C} = \cos^2 A + \sqrt{3}\cos^2 B - \sqrt{3}\sin^2 C$$
$$= \frac{1}{2}(1+\cos 2A) + \frac{\sqrt{3}}{2}(1+\cos 2B) - \frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos 2C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2A + \sqrt{3}(\cos 2B + \cos 2C))$$
$$\geq \frac{1}{2} - \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}$$

Suy ra
$$\min P = -\frac{3}{4},\ \text{khi} \begin{cases} A = \dfrac{\pi}{6} \\ B = C = \dfrac{5\pi}{12} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ b = 2+\sqrt{3} \\ c = 2-\sqrt{3} \end{cases}$$

Bài toán 11. Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện: $abc = a+b+c+2$

Chứng minh rằng:
$$2\left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}\right) \leq 4 + abc.$$

Nhận xét

sử dụng phép biến đổi
$$abc = a+b+c+2 \Leftrightarrow \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} + 2\frac{1}{abc} = 1.$$
Ta nhận thấy do a, b, c là ba số thực dương, suy ra:
$$\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab} \in (0; 1).$$
áp dụng bất đẳng thức 9, ta có lời giải bài toán.

Lời giải

Từ điều kiện ta có:
$$\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} + 2\frac{1}{abc} = 1.$$
Do a, b, c là ba số thực dương, suy ra:
$$\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab} \in (0; 1).$$
Đặt
$$\frac{1}{\sqrt{bc}} = \cos A, \frac{1}{\sqrt{ca}} = \cos B, \frac{1}{\sqrt{ab}} = \cos C;\ A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Từ điều kiện bài toán, ta có:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A.\cos B.\cos C = 1 \tag{22}$$

Từ giả thiết (22) và hệ thức 3, ta có $A + B + C = \pi$
Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức

$$2\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C}\right) \leq 4 + \frac{1}{\cos A \cos B \cos C}$$
$$\Leftrightarrow 2(\cos B \cos C + \cos C \cos A + \cos A \cos B) \leq 4\cos A \cos B \cos C + 1$$

Bất đẳng thức trên đúng, được suy ra từ bất đẳng thức 9.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$A = B = C = \frac{\pi}{3} \leftrightarrow a = b = c = 2.$$

Bài toán 12. Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện: $ab+bc+ca+abc = 4$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = ab + bc + ca + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

Nhận xét Ta biến đổi giả thiết về dạng:

$$\frac{bc}{4} + \frac{ca}{4} + \frac{ab}{4} + 2\sqrt{\frac{bc}{4}}\sqrt{\frac{ca}{4}}\sqrt{\frac{ab}{4}} = 1.$$

Và do a, b, c là các số thực dương nên suy ra: $bc, ca, ab \in (0; 4)$
Lời giải
Đặt

$$\sqrt{bc} = 2\cos A, \sqrt{ca} = 2\cos B, \sqrt{ab} = 2\cos C;\ A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Từ điều kiện bài toán, ta có:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A.\cos B.\cos C = 1 \tag{23}$$

Từ giả thiết (23) và hệ thức 3, ta có: $A + B + C = \pi$
Khi đó áp dụng bất đẳng thức 2, ta có:

$$\begin{aligned} P &= 4\left(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C\right) + 2(\cos A + \cos B + \cos C) \\ &= 4(1 - 2\cos A \cos B \cos C) + 2\left(1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) \\ &= 6 + 8\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \cos A \cos B \cos C\right) \geq 6 \end{aligned}$$

Vậy $\min P = 6$ khi $A = B = C = \frac{\pi}{3} \leftrightarrow a = b = c = 1$

Bài toán 13. Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện: $a+b+c+1 = 4abc$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{\sqrt{4bc-1}}{bc} + \frac{\sqrt{4ca-1}}{ca} + \frac{1}{ab}.$$

Nhận xét

* Nhìn vào giả thiết của bài toán ta rất khó hình dung ra đây là bài toán có mối quan hệ với các đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác.

* Nhưng nếu sử dụng phép biến đổi:

$$a+b+c+1 = 4abc \Leftrightarrow \frac{1}{4bc} + \frac{1}{4ca} + \frac{1}{4ab} + 2\frac{1}{8abc} = 1.$$

Và nhận thấy a, b, c là ba số thực dương, suy ra:

$$\frac{1}{4bc}, \frac{1}{4ca}, \frac{1}{4ab} \in (0;1).$$

Từ đó ta có cách đặt để đưa Q về dạng lượng giác mà việc tìm giá trị lớn nhất của Q đơn giản chỉ dùng công thức biến đổi lượng giác và sử dụng bất đẳng thức 7.

Ta có lời giải sau.

Lời giải

Từ điều kiện ta có:

$$\frac{1}{4bc} + \frac{1}{4ca} + \frac{1}{4ab} + 2\frac{1}{8abc} = 1.$$

Do a, b, c là ba số thực dương, suy ra:

$$\frac{1}{4bc}, \frac{1}{4ca}, \frac{1}{4ab} \in (0;1).$$

Đặt

$$\frac{1}{\sqrt{bc}} = 2\cos A, \frac{1}{\sqrt{ca}} = 2\cos B, \frac{1}{\sqrt{ab}} = 2\cos C; \ A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Từ điều kiện bài toán, ta có:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A.\cos B.\cos C = 1 \quad (24)$$

Từ giả thiết (24) và hệ thức 3, ta có $A + B + C = \pi$

Với cách đặt trên ta có:

$$Q = \frac{\sqrt{4bc-1}}{bc} + \frac{\sqrt{4ca-1}}{ca} + \frac{1}{ab} = 4\cos^2 A.\sqrt{\frac{1}{\cos^2 A} - 1} + 4\cos^2 B.\sqrt{\frac{1}{\cos^2 B} - 1} + 4\cos^2 C$$
$$= 2\sin 2A + 2\sin 2B - 4\sin^2 C + 4 \quad (25)$$

Mặt khác:

$$\sin 2A + \sin 2B - 2\sin^2 C \le 2\sin C - 2\sin^2 C = -2\left(\sin C - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \le \frac{1}{2} \quad (26)$$

Từ (25) và (25) suy ra:

$$Q \le 2.\frac{1}{2} + 4 = 5 \Rightarrow \max Q = 5 \text{ khi } \begin{cases} A = B = \dfrac{5\pi}{12} \\ C = \dfrac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ c = 2\sqrt{3} + 3 \end{cases}$$

Bài toán 14. (Iran-2005). Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} = 2.$$

Chứng minh rằng: $ab + bc + ca \le \dfrac{3}{2}$

Nhận xét

* Nhìn vào giả thiết của bài toán ta rất khó hình dung ra đây là bài toán có mối quan hệ với các đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác.

* Nhưng nếu sử dụng phép biến đổi từ giả thiết:

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 + 2(abc)^2 = 1.$$

Và nhận thấy a, b, c là ba số thực dương, suy ra:

$$ab, bc, ca \in (0; 1).$$

Đặt

$$bc = \cos A, ca = \cos B, ab = \cos C;\ A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Từ điều kiện bài toán, ta có:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A.\cos B.\cos C = 1 \tag{27}$$

Từ giả thiết (27) và hệ thức 3, ta có $A + B + C = \pi$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh đưa về bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác:

$$\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đúng, dầu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a = b = c = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Nhận xét

• Trên đây ta chỉ ứng dụng ba hệ thức lượng giác và chín bất đẳng thức trong tam giác để xây dựng và chứng minh 14 bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một biểu thức đại số có điều kiện ràng buộc ban đầu.

• Hoàn toàn tương tự ta cũng có thể xây dựng và chứng minh được các bất đẳng thức đại số có điều kiện ràng buộc ban đầu xuất phát từ các hệ thức lượng giác và các bất đẳng thức lượng giác khác trong tam giác.

Tài liệu tham khảo

[1]. Nguyễn văn Mậu, "*Bất đẳng thức, định lí và áp dụng*", Nhà xuất bản Giáo dục, 2006.

[2]. Nguyễn văn Mậu, Phạm Thị Bạch Ngọc, "*Một số bài toán chọn lọc về lượng giác*", Nhà xuất bản Giáo dục, 2002.

[3]. Một số Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.