Một số định lý hình học qua phép nghịch đảo

Nguyễn Hữu Tâm
Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định

"Inversion originated in the middle of the nineteenth century and was first researched extensively by Liouville (1847) [Lio]. Its great importance for elementary geometry is clear if we consider that it makes it possible to transform certain exercises in which circles are concerned and in particular many constructions, into less complicated ones where one or more circles have been replaced by a line. For similar reasons, inversion was soon applied by physicists, for example by Thomson in the theory of electric fields [Tho1], [Tho2]. The transformation is also important from a more theoretical point of view. In analogy with what we have seen for a..ne and projective geometry, a conformal geometry or inversive geometry was developed, which only studies such notions and properties that are not only invariant for rigid motions and similarities, but also for inversions. ..." - **Bottema** -

1 Định nghĩa và một số tính chất cơ bản của phép nghịch đảo

1.1 Định nghĩa phép nghịch đảo

Định nghĩa 1. *Trong mặt phẳng cho một điểm O cố định và số thực $k \neq 0$. Phép biến hình f biến điểm M thành điểm M' sao cho $\overline{OM}.\overline{OM'} = k$ được gọi là phép nghịch đảo cực O, phương tích k và thường được ký hiệu là $f(O,k)$.*

Nếu $k > 0$ thì M, M' ở cùng phía so với O. Khi đó tập hợp điểm bất động (điểm kép) của $f(O,k)$ là đường tròn tâm O, bán kính $\sqrt{k}$, đường tròn này được gọi là *đường tròn nghịch đảo* của phép nghịch đảo $f(O,k)$.

Nếu $k < 0$ thì M, M' ở khác phía so với O. Khi đó phép nghịch đảo không có điểm kép thực nào.

Khi điểm M càng gần cực O thì ảnh của nó, $f(M)$ càng xa cực O và ngược lại, $f(O) = \infty, f(\infty) = O$.

1.2 Một số tính chất cơ bản của phép nghịch đảo

Dưới đây là một số tính chất cơ bản có thể được kiểm tra dễ dàng dựa vào định nghĩa của phép nghịch đảo.

Tính chất 1. *Nếu phép nghịch đảo $f(O,k)$ có phương tích $k > 0$ thì mọi đường tròn đi qua hai điểm tương ứng M và $M' = f(M)$ đều trực giao với đường tròn nghịch đảo của f.*

Nhận xét: Từ tính chất này ta thấy qua phép nghịch đảo phương tích dương, mọi đường tròn trực giao với đường tròn nghịch đảo thì biến thành chính nó.

Tính chất 2. *Cho phép nghịch đảo $f(O,k)$ với $k > 0$. Nếu có hai đường tròn cùng trực giao vơi đường tròn nghịch đảo và chúng cắt nhau tại hai điểm M, M' thì hai điểm này là ảnh của nhau qua phép nghịch đảo đã cho.*

Tính chất 3. *Đối với một phép nghịch đảo $f(O,k)$ bất kỳ, hai điểm M, N cùng với ảnh của chúng, $M' = f(M), N' = f(N)$ nằm trên cùng một đường tròn.*

Tính chất 4. *Nếu M', N' là ảnh của M, N qua phép nghịch đảo $f(O,k)$ thì*

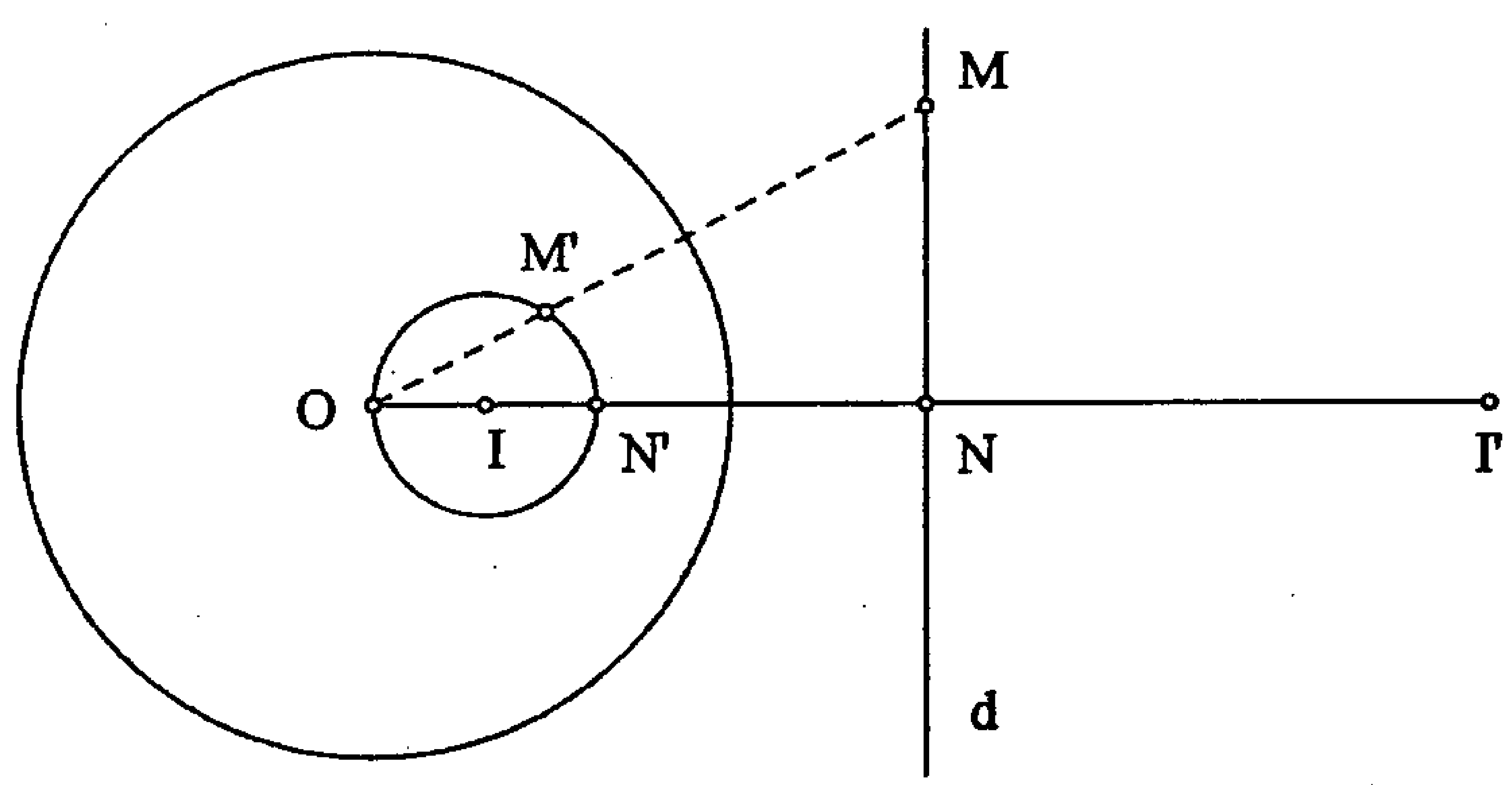
$$\widehat{OM'N'} = \widehat{ONM}; \qquad M'N' = |k|\frac{MN}{OM.ON}.$$

Nhận xét: Từ tính chất này ta suy ra kết quả sau. Nếu phép nghịch đảo $f(O,k)$ biến đường tròn (I,R) thành đường tròn (I',R') thì ta có công thức sau

$$R' = \frac{|k|}{|\mathcal{P}_{O/(I)}|}.R$$

Tính chất 5. *Phép nghịch đảo bảo tồn góc giữa hai đường cong.*

Tính chất 6. *Phép nghịch đảo biến một đường thẳng d không đi qua cực nghịch đảo O thành một đường tròn đi qua cực nghịch đảo. Ngược lại, một đường tròn đi qua cực nghịch đảo thì có ảnh là một đường thẳng không đi qua cực nghịch đảo.*



Hình 1:

Chứng minh. Gọi N là hình chiếu của O lên đường thẳng d và N' là ảnh của nó qua phép nghịch đảo $f(O,k)$. Lấy một điểm M bất kỳ trên d và giả sử $M' = f(M)$, khi đó vì các điểm M, M', N, N' đồng viên nên ta có

$$(M'M, M'N') = (NM, NN') = \frac{\pi}{2}$$

Do đó M' thuộc đường tròn đường kính ON'.

Phần ngược lại của định lý được chứng minh dựa vào những lập luận tương tự.

Nhận xét. i) Phép chứng minh của định lý trên cũng cho ta cách để xác định ảnh và tạo ảnh của một đường thẳng không đi qua cực nghịch đảo.

ii) Nếu $I' = f(I)$ thì I' và cực O đối xứng nhau qua đường thẳng d. Thât vậy, từ $\overline{OI}.\overline{OI'} = \overline{ON}.\overline{ON'} = \overline{ON}.2\overline{OI}$ ta suy ra N là trung điểm của OI'.

iii) Nếu đường thẳng và đường tròn không tiếp xúc thì chúng có thể xem là ảnh của nhau trong hai phép nghịch đảo. Còn nếu chúng tiếp xúc nhau thì chỉ có một phép nghịch đảo biến đường thẳng thành đường tròn và ngược lại.

Tính chất 7. *Qua một phép nghịch đảo, một đường tròn không đi qua cực nghịch đảo biến thành một đường tròn không đi qua cực nghịch đảo.*

Tính chất 8. *Cho (O,R) và (O',R') là hai đường tròn phân biệt cho trước. Giả sử I, J là tâm vị tự trong và tâm vị tự ngoài của hai đường tròn.*

a) Nếu hai đường tròn không bằng nhau và không tiếp xúc thì có hai phép nghịch đảo biến đường tròn này thành đường tròn kia là $f(I,k_1)$ và $f(J,k_2)$. Trong đó $k_1 = \dfrac{R'}{R}.\mathcal{P}_{I/(O)}, k_2 = -\dfrac{R'}{R}.\mathcal{P}_{J/(O)}$.

b) Nếu hai đường tròn bằng nhau và không tiếp xúc thì có đúng một phép nghịch đảo biến đường tròn này thành đường tròn kia là $f(J,k_2)$ với $k_2 = -\dfrac{R'}{R}.\mathcal{P}_{J/(O)}$.

c) Nếu hai đường tiếp xúc nhau và không bằng nhau thì khi đó tiếp điểm là tâm vị tự nhưng không phải là cực nghịch đảo và chỉ có một phép nghịch đảo với cực là tâm vị tự còn lại, biến đường tròn này thành đường tròn kia.

d) Nếu hai đường tròn bằng nhau và tiếp xúc nhau thì không có phép nghịch đảo nào biến đường tròn này thành đường tròn kia.

Tính chất 9. *Cho hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ không có điểm chung. Khi đó tồn tại một phép nghịch đảo biến hai đường tròn này thành hai đường tròn đồng tâm.*

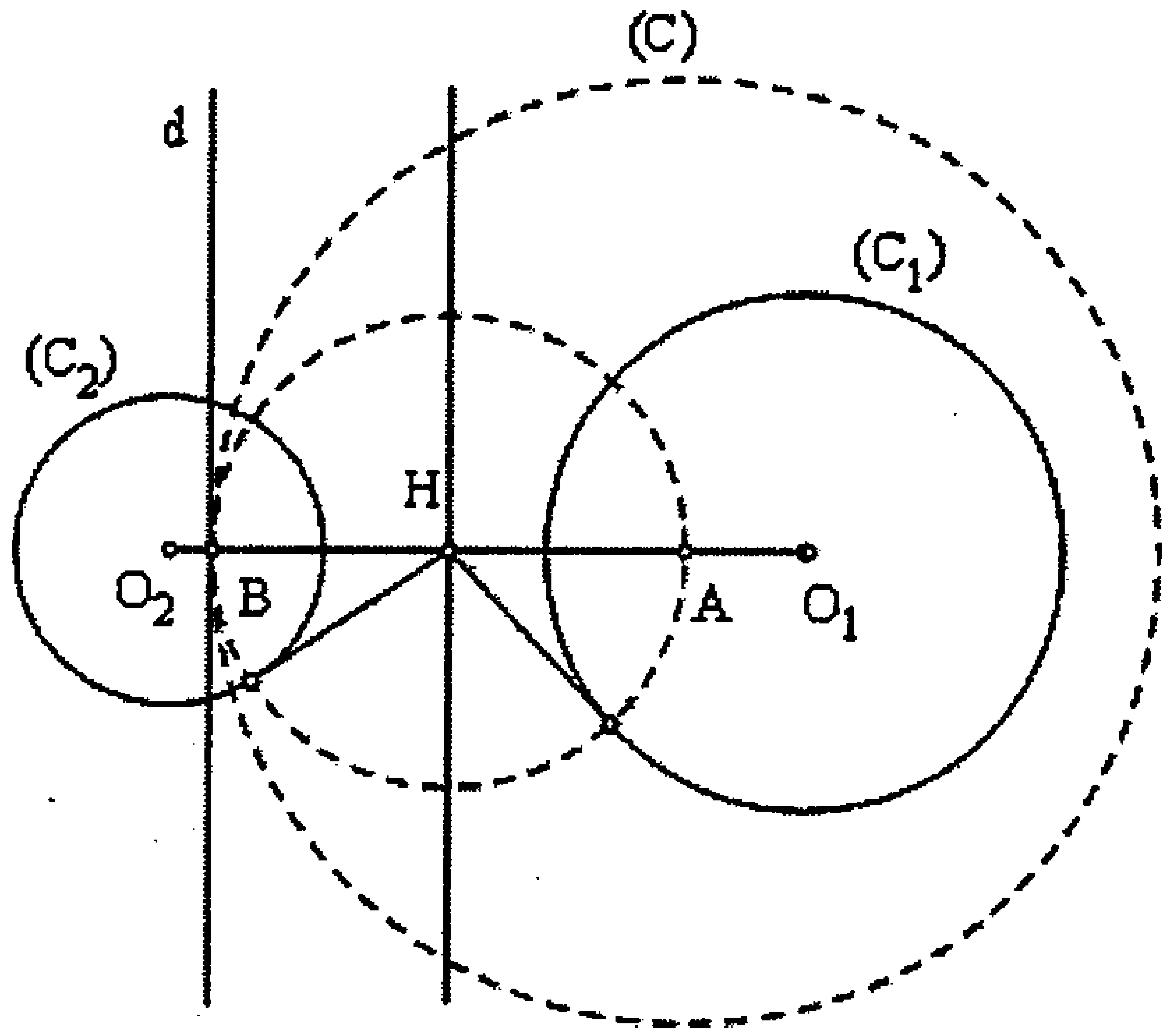
Chứng minh. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm hai đường tròn $(C_1), (C_2)$. Giả sử trục đẳng phương của hai đường tròn cắt O_1O_2 tại H, đường tròn $C(H, \mathcal{P}_{H/C_i})$ cắt O_1O_2 tại A, B. Xét phép nghịch $f(A, AB^2)$, khi đó $f(C)$ là đường thẳng d qua B và vuông góc với O_1O_2. Vì (C_1) trực giao với (C) nên $f(C_1)$ trực giao với d, do đó tâm của $f(C_1)$ nằm trên d, đồng thời cũng thuộc O_1O_2. Vậy tâm của $f(C_1)$ trùng với B. Tương tự, tâm của $f(C_2)$ cũng trùng B.

2 Một số định lý hình học qua phép nghịch đảo

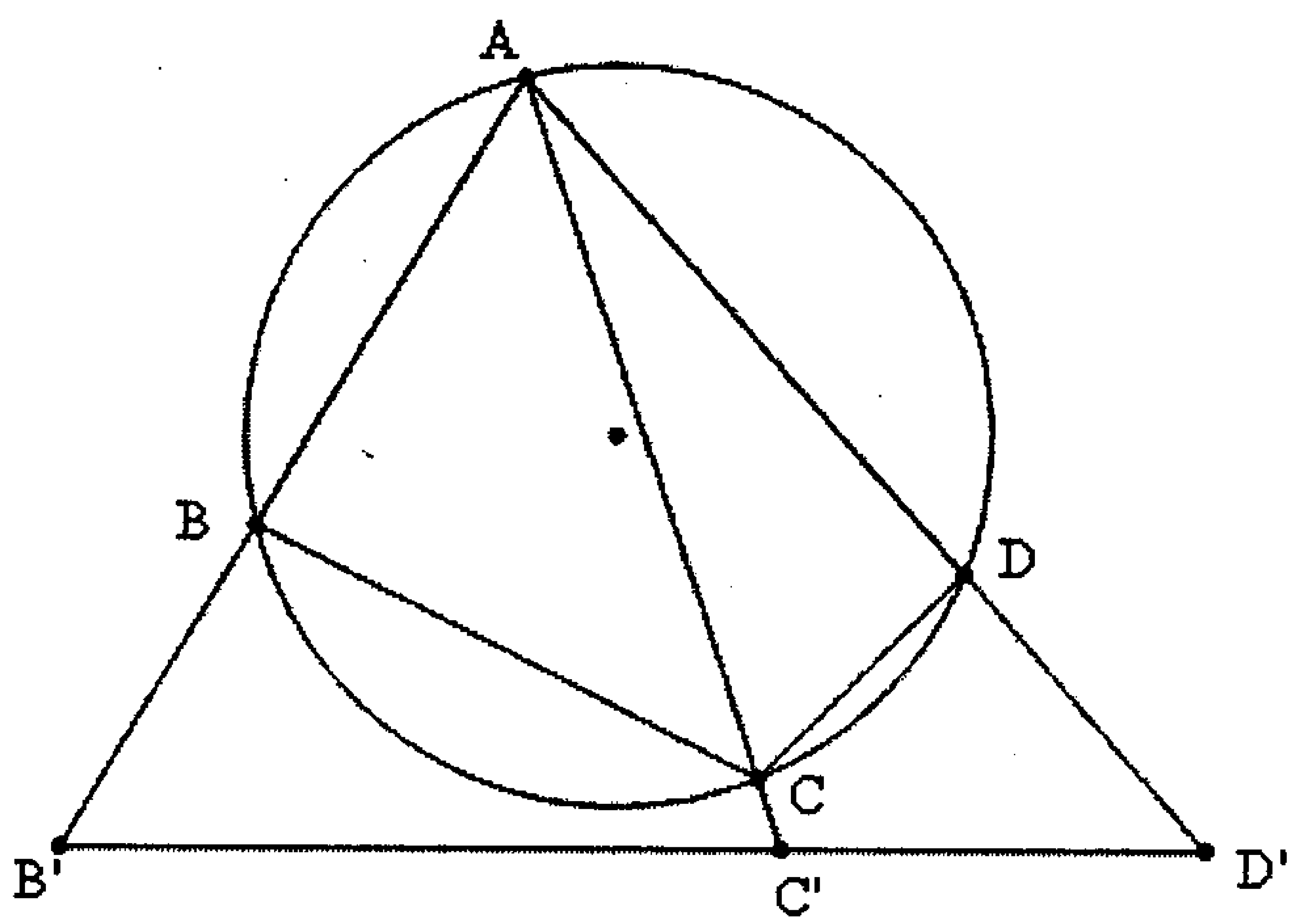
2.1 Dùng phép nghịch đảo chứng minh một số định lý hình học

2.1.1 Định lý Ptolemy

Định lí 1. *Điều kiện cần và đủ để một tứ giác lồi nội tiếp được trong một đường tròn là tích hai đường chéo của nó bằng tổng của tích hai cạnh đối diện.*



Hình 2:



Hình 3:

Chứng minh. Giả sử $ABCD$ là tứ giác lồi. Xét phép nghịch đảo cực A, phương tích k bất kỳ. Giả sử ảnh của B, C, D qua phép nghịch đảo $f(A, k)$ lần lượt là B', C', D'. Khi đó tứ giác $ABCD$ nội tiếp được khi và chỉ khi B', C', D' thẳng hàng. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$B'D' = B'C' + C'D' \Leftrightarrow |k|\frac{BD}{AB.AD} = |k|\frac{BC}{AB.AC} + |k|\frac{CD}{AC.AD}$$

Nhân hai vế cho $AB.AC.AD$ và thu gọn ta được đẳng thức tương đương

$$AC.BD = AD.BC + AB.CD.$$

Nhận xét. Định lý Ptolemy có thể được chứng minh bằng nhiều cách khác nhau. Tuy nhiên cách chứng minh bằng phép nghịch đảo như trên cho phép ta có thể mở rộng kết quả như sau:

Điều kiện cần và đủ để đa giác lồi $A_1, A_2 ... A_n, n \geq 4$ nội tiếp đường tròn là

$$\sum_{i=2}^{n-1} A_iA_{i+1}\Big(\prod_{k\neq 1} A_1A_k\Big) = A_2A_n.A_1A_3...A_1A_{n-1}.$$

2.1.2 Định lý Poncelet

Ta đã biết rằng nếu tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R) và ngoại tiếp đường tròn (I, r) (ta nói tam giác ABC lưỡng tiếp hai đường tròn) thì $IO^2 = R^2 - 2rR$. Ngược lại, nếu hai đường tròn (O, R) và (I, R) thỏa mãn hệ thức trên thì ta cũng chứng minh được tồn tại (hơn nữa tồn tại vô số) tam giác vừa nội tiếp (O) vừa ngoại tiếp (I) (xem [3]).

Rõ ràng mọi tam giác luôn lưỡng tiếp được hai đường tròn, nhưng đối với một $n-$ giác bất kỳ, $n \geq 4$ thì không phải như vậy. Trường hợp $n = 4$, điều kiện cần và đủ để tồn tại một tứ giác nội tiếp đường tròn (O, R) và ngoại tiếp đường tròn (I, r) là

$$\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}$$

trong đó d là khoảng cách giữa hai tâm O và I (xem [3]).

Trong trường hợp tổng quát, nếu cho trước hai đường tròn, điều kiện nào để tồn tại một đa giác lưỡng tiếp hai đường tròn. Ngược lại, nếu giả sử hai đường tròn cho trước lần lượt nội tiếp và ngoại tiếp một đa giác nào đó thì giữa các bán kính R, r và khoảng cách hai tâm O và I có liên hệ gì? Đây vẫn đang là bài toán mở. Tuy nhiên ta có kết quả sau.

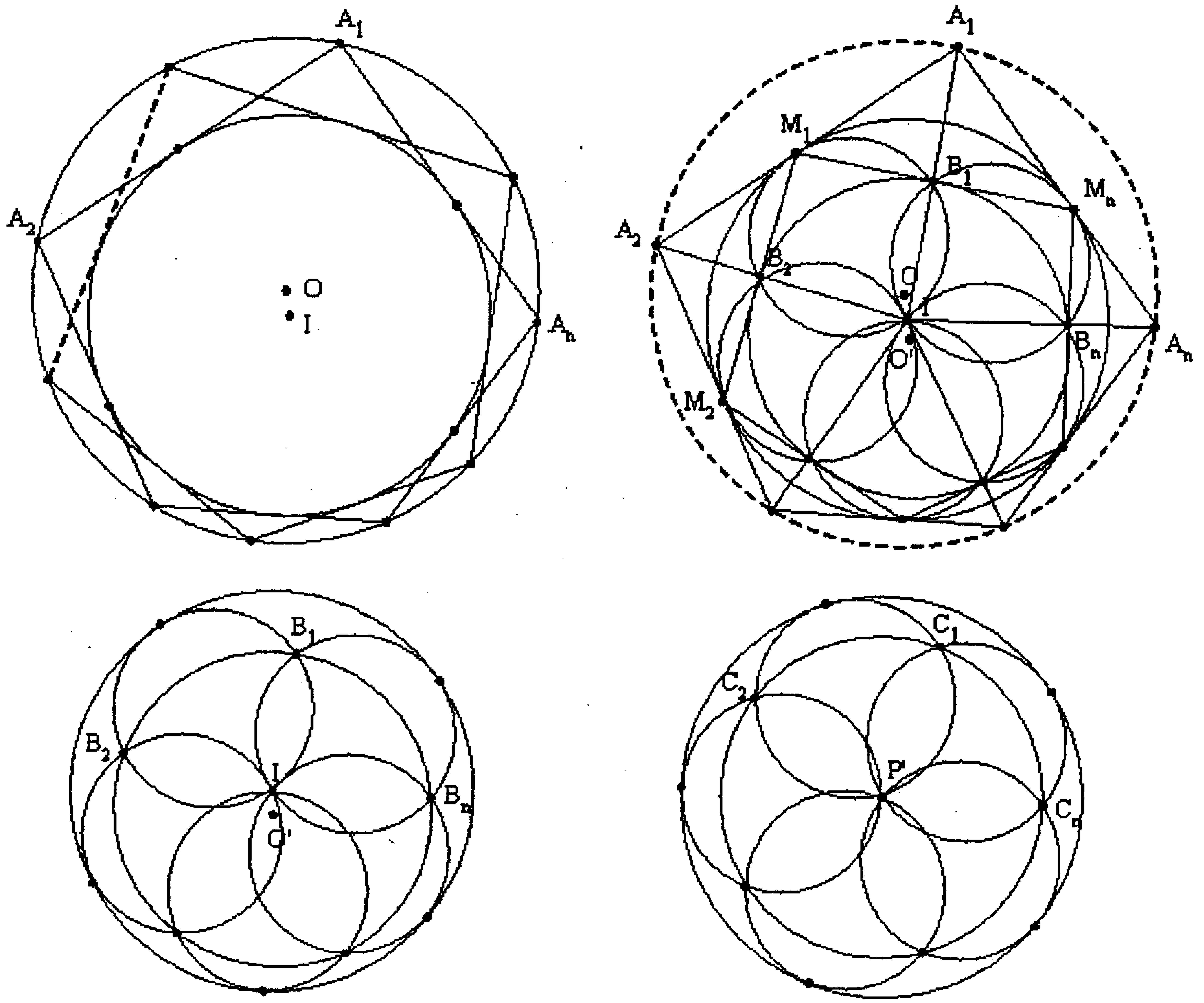
Định lí 2. *Cho hai đường tròn (O) và (I) sao cho tồn tại một n- giác vừa nội tiếp (O) vừa ngoại tiếp (I). Khi đó có vô số n- giác như thế, hơn nữa mọi điểm trên (O) đều có thể lấy làm đỉnh của một trong những n- giác đó (mọi tiếp tuyến của (I) đều có thể chọn làm đường thẳng chứa cạnh của một trong những n-giác đó).*

Định lý Poncelet đã rất hấp dẫn và lôi cuốn sự quan tâm không chỉ các nhà hình học như Jacob Steiner (1796 - 1863), Michel Chasles (1793 - 1880), Arthur Cayley (1821 - 1895) mà cả những nhà toán học ở nhiều lĩnh vực nghiên cứu khác nhau, trong đó có những nhà toán học lớn như Henri Lebesgue (1875 - 1941), Jean Dieudonné (1906 - 1992) và Serge Lang.

Kết qủa của định lý vẫn còn đúng nếu thay hai đường tròn thành hai conic. Có nhiều cách chứng minh định lý này, kể cả sơ cấp lẫn cao cấp. Bài viết này trình bày một chứng minh mới bằng phép nghịch đảo.

Chứng minh. Giả sử đa giác $A_1A_2...A_n$ nội tiếp trong đường tròn (O, R) và ngoại tiếp đường tròn (I, r). Các cạnh $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$ lần lượt tiếp xúc với (I) tại $M_1, M_2, ..., M_n$. Gọi $B_1, B_2, ..., B_n$ lần lượt là trung điểm của $M_nM_1, M_1M_2, ..., M_{n-1}M_n$, khi đó ta có

$$\overline{IB_1}.\overline{IA_1} = \overline{IB_2}.\overline{IA_2} = ... = \overline{IB_n}.\overline{IA_n} = r^2$$



Hình 4:

Xét phép nghịch đảo đối với đường tròn (I, r), $f(I, r^2)$ thì các điểm A_i có ảnh là $B_i, i = 1, 2, ..., n$. Các đường thẳng $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$ lần lượt biến thành các đường tròn $(IB_1B_2), (IB_2B_3), ..., (IB_nB_1)$ tiếp xúc trong với (I) lần lượt tại $M_1, M_2, ..., M_n$. Đường tròn (O) biến thành đường tròn (O') đi qua các điểm B_i.

Giả sử trục đẳng phương d của hai đường tròn (O') và (I) cắt $O'I$ tại H, đường tròn tâm H bán kính bằng $\mathcal{P}_{H/(I)}$ cắt đường thẳng $O'I$ tại hai điểm P, Q. Khi đó theo Tính chất 9, phép nghịch đảo cực Q, phương tích k xác định, biến hai đường tròn (O') và (I) thành hai đường tròn đồng tâm P', với P' là ảnh của P qua phép nghịch đảo $f(Q, k)$ nói trên. Lúc này các điểm B_i có ảnh là C_i nằm trên đường tròn $f_{(Q,k)}((O'))$, các đường tròn $(IB_1B_2), (IB_2B_3), ..., (IB_nB_1)$ có ảnh là các đường tròn $(IC_1C_2), (IC_2C_3), ..., (IC_nC_1)$ tiếp xúc trong với đường tròn tâm P'. Dễ thấy $C_1C_2...C_n$ là đa giác đều.

Dùng phép quay tâm P', góc quay α bất kỳ thì các đường tròn $(IC_1C_2), (IC_2C_3), ..., (IC_nC_1)$ biến thành các đường tròn $(ID_1D_2), (ID_2D_3), ..., (ID_nD_1)$ tiếp xúc với đường tròn (P'). Sau đó lấy ảnh qua phép nghịch đảo $f(Q, k)$ rồi tiếp tục lấy ảnh qua phép nghịch đảo $f(I, r^2)$ thì các đường tròn $(ID_1D_2), (ID_2D_3), ..., (ID_nD_1)$ biến thành n giác lưỡng tiếp hai đường tròn (O) và (I) ban đầu.

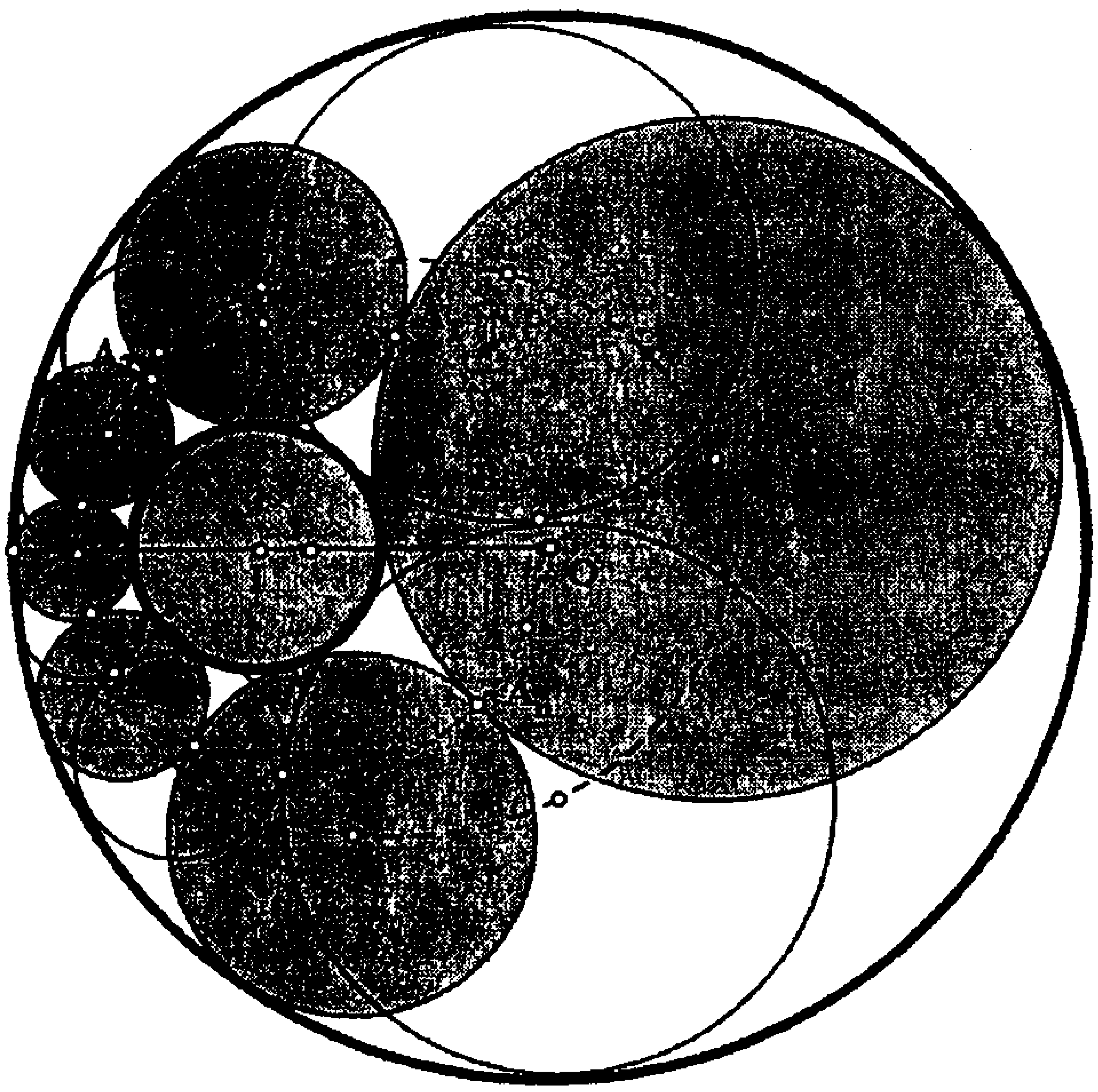
Vậy, có vô số n giác nội tiếp (O, R) và ngoại tiếp (I, r).

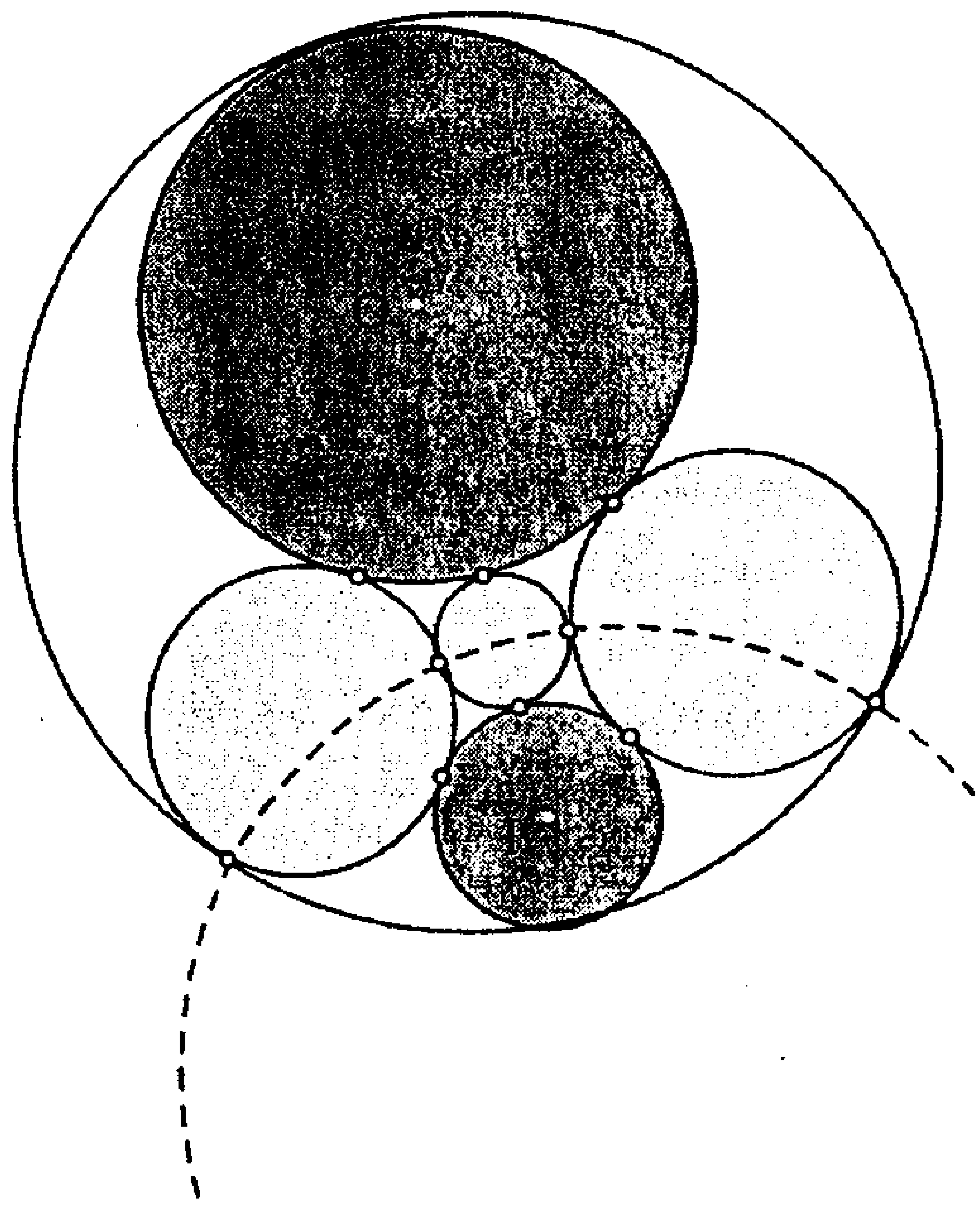
Bây giờ từ Định lý Poncelet ta thay các đỉnh của n - giác lưỡng tiếp hai đường tròn $(I), (O)$ bởi một họ n đường tròn $(C_1), (C_2), \dots (C_n), n \geq 3$ tiếp xúc vòng quanh nhau $((C_i)$ tiếp xúc ngoài với $(C_{i+1}), i = 1, \dots n, (C_{n+1}) \equiv (C_1))$ và n đường tròn này cùng tiếp xúc ngoài với (I) và tiếp xúc trong với (O). Vấn đề đặt ra là nếu đã có một họ gồm n đường tròn thỏa mãn các điều kiện trên thì phải chăng cũng có vô số họ gồm n đường tròn như thế? Câu trả lời là khẳng định, ta có định lý sau.

2.1.3 Định lý Porism's Steiner

Định lí 3. *Giả sử hai đường tròn (I) và (O) lồng nhau sao cho tồn tại một họ n đường tròn $(C_1), (C_2), \dots (C_n), n \geq 3$ tiếp xúc vòng quanh nhau $((C_i)$ tiếp xúc ngoài với $(C_{i+1}), i = 1, \dots n, (C_{n+1}) \equiv (C_1))$ và n đường tròn này cùng tiếp xúc ngoài với (I) và tiếp xúc trong với (O). Khi đó có vô số họ gồm n đường tròn như vậy.*

Chứng minh. Cách chứng minh của định lý này cũng tương tự như chứng minh của Định lý Poncelet ở trên. Xét phép nghịch đảo biến hai đường tròn (O) và (I) thành hai đường tròn đồng tâm K, khi đó họ n đường tròn đã cho biến thành n đường tròn bằng nhau, tiếp xúc ngoài vòng quanh nhau và cùng tiếp xúc với hai đường tròn $(O), (I)$. Bằng một phép quay tâm K với góc α tùy ý, ta có thể tạo ra vô số họ gồm n đường tròn tạo thành chuỗi đóng như vậy. Từ đó suy ra điều cần chứng minh.





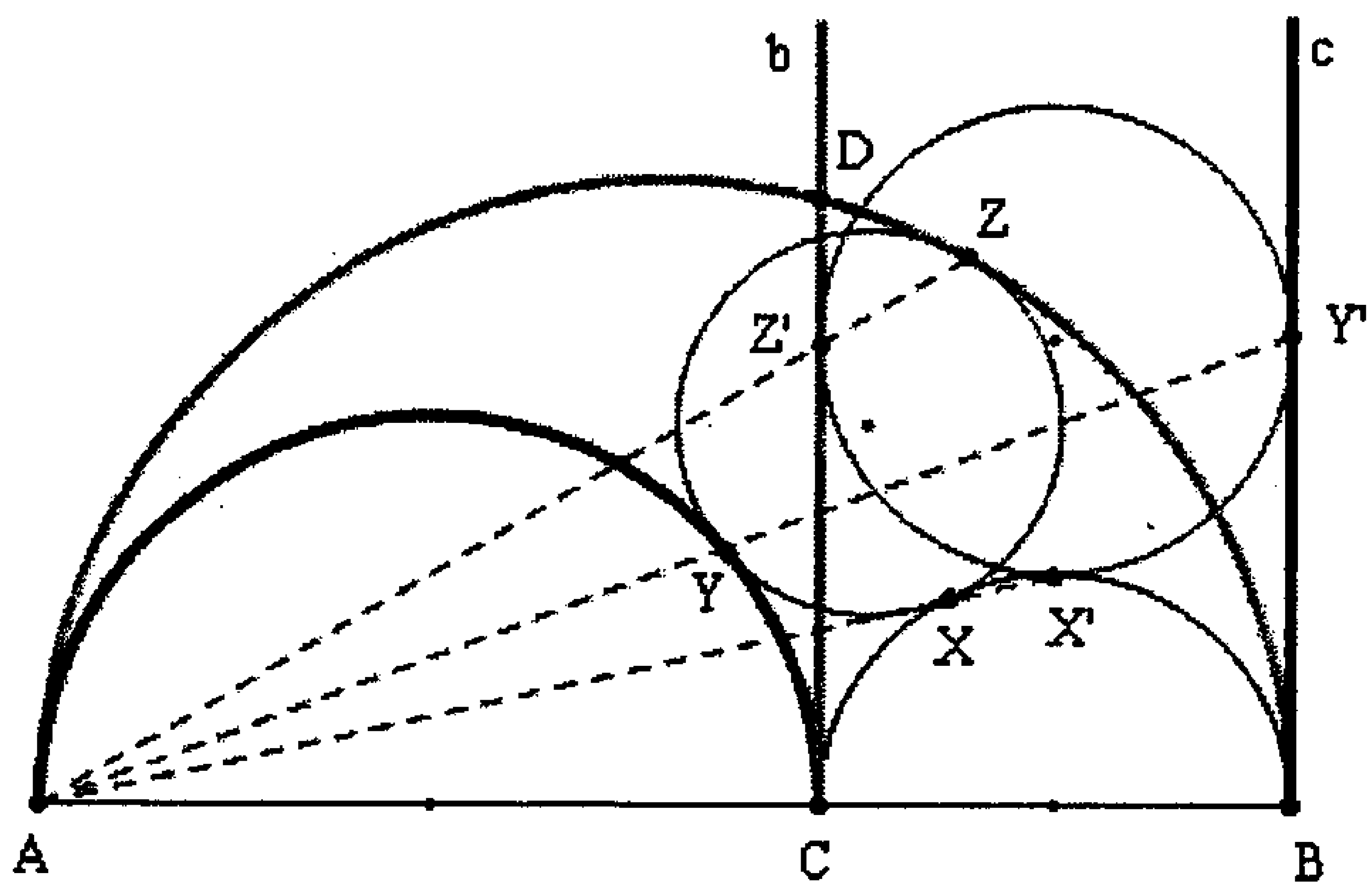
Hình 5:

Nhận xét. i) Định lý trên có thể xem là một kết quả mở rộng của Định lý Poncelet theo một nghĩa hoàn toàn chấp nhận được khi ta thay các đỉnh $A_i, i = 1, \dots, n$ của đa giác $A_1 \ldots A_n$ lưỡng tiếp hai đường tròn (I), (O) bởi n đường tròn tiếp xúc vòng quanh nhau và cùng tiếp xúc với $(I), (O)$.

ii) Theo cách chứng minh trên thì kết quả của định lý vẫn đúng nếu xét trường hợp hai đường tròn (I) và (O) ở ngoài nhau.

2.1.4 Dựng đường tròn nội tiếp một Arbelos

Bài toán 1. *Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng với C thuộc đoạn AB và ba nửa đường tròn đường kính AB, BC, CA cùng nằm về một phía đối với đường thẳng ABC. Hãy dựng đường tròn (O) tiếp xúc với cả ba nửa đường tròn đã cho.*



Hình 6:

Nhận xét. Các đường tròn đường kính AB, AC tiếp xúc nhau tại A, do đó nếu xét một phép nghịch đảo cực A thì hai đường tròn này trở thành hai đường thẳng b, c lần lượt qua C, B và song song nhau. Nếu chọn phương tích nghịch đảo $k = \overline{AB}.\overline{AC}$ thì đường tròn đường kính BC biến thành chính nó, hơn nữa lúc đó b và c vuông góc với đường thẳng AB tại C, B.

Lời giải. Xét phép nghịch đảo cực A, phương tích $k = \overline{AB}.\overline{AC}$. Khi đó, các đường tròn đường kính AB, AC lần lượt biến thành các đường thẳng b, c lần lượt vuông góc với đường thẳng AB tại C, B; đường tròn đường kính BC biến thành chính nó.

Giả sử đường tròn cần dựng đã dựng được và tiếp xúc với ba nửa đường tròn đã cho tại X, Y, Z (hình vẽ), qua phép nghịch đảo $f(A, k)$, đường tròn (XYZ) biến thành đường tròn tiếp xúc với đường tròn đường kính BC, các đường thẳng c, b lần lượt tại X', Y', Z'. Trong đó, X', Y', Z' lần lượt là ảnh của X, Y, Z. Từ đó ta có cách dựng sau.

- Dựng đường tròn tiếp xúc với nửa đường tròn đường kính BC, các nửa đường thẳng c, b lần lượt tại X', Y', Z'. Đường tròn này có tâm nằm trên nửa đường thẳng trung trực của BC và cách đường thẳng BC một đoạn bằng độ dài đoạn BC.
- Dựng các giao điểm X, Y, Z của AX', AY', AZ' với các nửa đường tròn đường kính BC, CA, AB theo thứ tự đó.
- Đường tròn qua X, Y, Z là đường tròn cần dựng. Thật vậy, theo cách dựng thì rõ ràng đường tròn (XYZ) là ảnh của đường tròn $(X'Y'Z')$. Do đó theo tính chất của phép nghịch đảo thì đường tròn (XYZ) tiếp xúc với ba nửa đường tròn đã cho.

2.2 Nhìn lại một số định lý hình học qua phép nghịch đảo

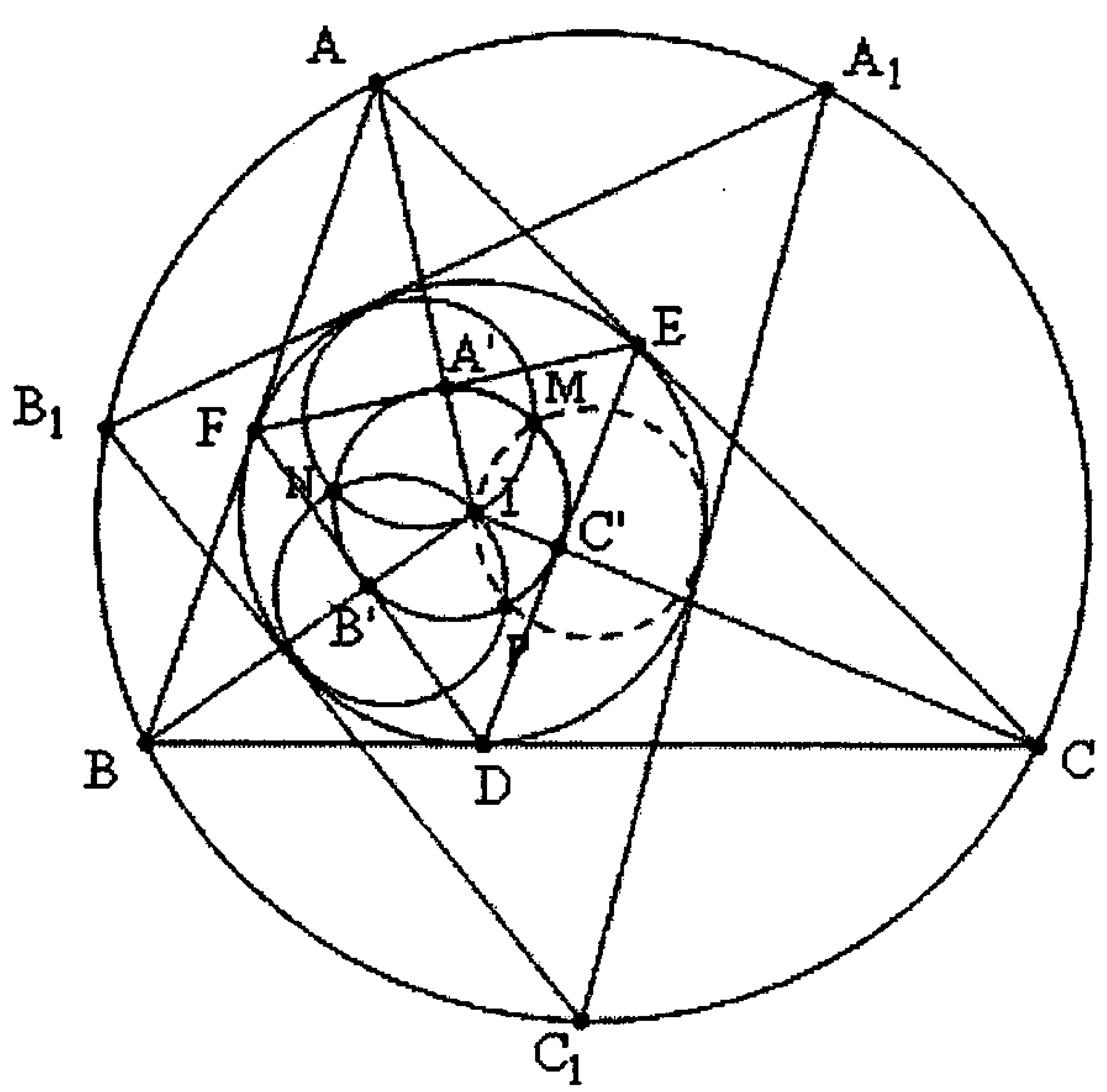
2.2.1 Định lý Poncelet cho tam giác

Định lí 4. *Giả sử tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O,R) và ngoại tiếp đường tròn (I,r). Từ một điểm A_1 bất kỳ trên (O) vẽ dây A_1B_1 của (O) tiếp xúc với (I), từ B_1 lại vẽ dây B_1C_1 tiếp xúc với (I). Khi đó C_1A_1 cũng tiếp xúc với (I).*

Bây giờ gọi D,E,F lần lượt là các tiếp điểm của (I) với các cạnh AB,BC,CA và A',B',C' lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(IA,EF),(IB,FD),(IC,DE)$. Khi đó ta có

$$IA.IA' = IB.IB' = IC.IC' = r^2$$

Do đó nếu xét phép nghịch đảo cực I phương tích r^2 thì A,B,C biến thành A',B',C';



Hình 7:

đường tròn (I) biến thành chính nó, còn đường tròn (O) biến thành đường tròn qua A',B',C'. Các đường thẳng AB,BC,CA thì lần lượt biến thành các đường tròn đi qua I và tiếp xúc với (I) tại F,D,E. Từ đó ta thu được định lý sau đây:

Định lí 4'. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I,r). Giả sử D,E,F lần lượt là các tiếp điểm của (I) với các cạnh AB,BC,CA. Gọi A',B',C' lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(IA,EF),(IB,FD)$, (IC,DE). Vẽ một đường tròn qua I và tiếp xúc với (I), cắt đường tròn $(A'B'C')$ tại M,N; đường tròn qua I,N tiếp xúc với (I) cắt $(A'B'C')$ tại N,P. Khi đó đường tròn (IMP) cũng tiếp xúc với (I).*

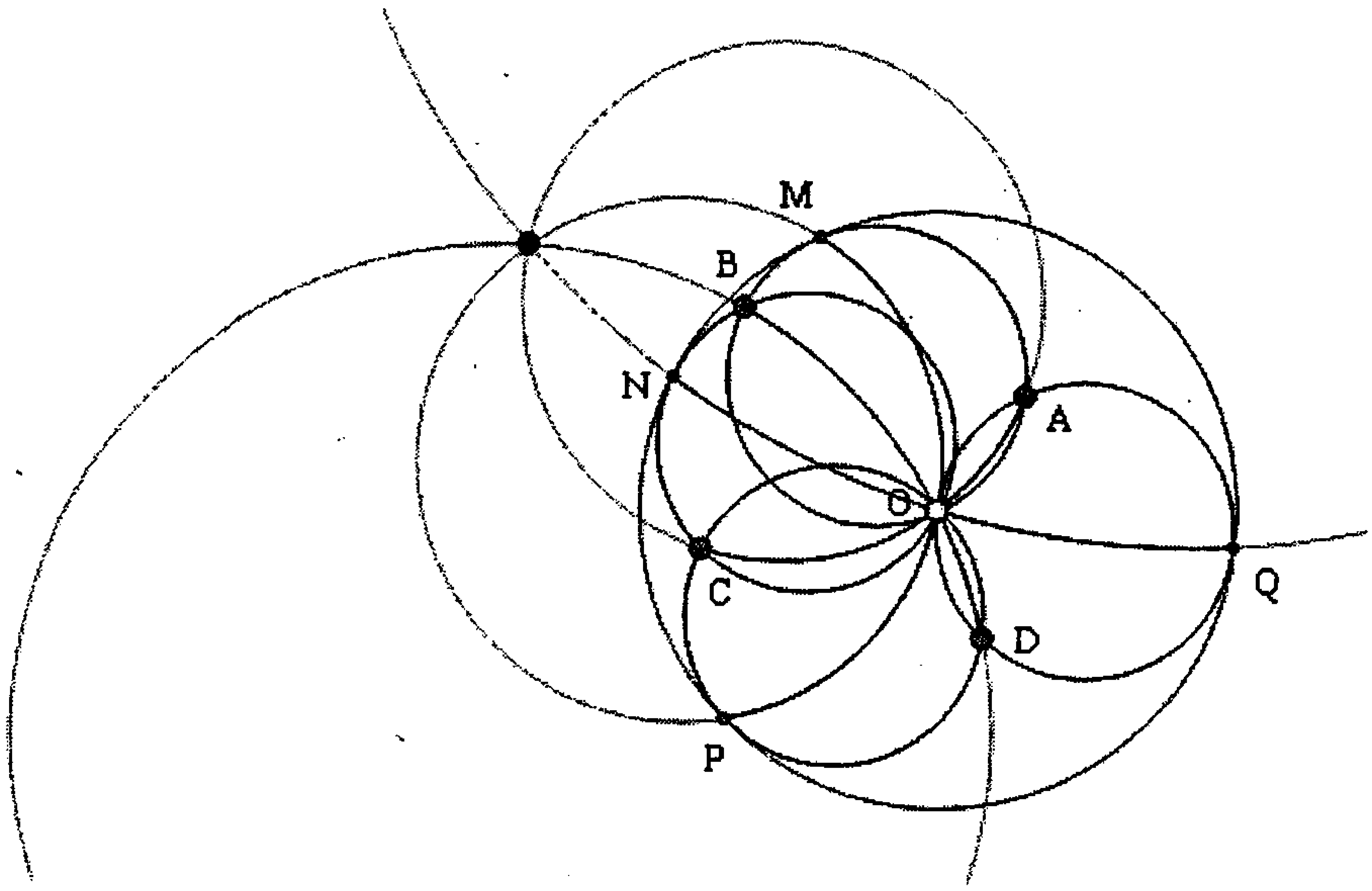
2.2.2 Định lý Newton

Định lí 5. *Nếu tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O,R), các tiếp điểm trên các cạnh AB,BC,CD,DA lần lượt là M,N,P,Q thì khi đó các đường thẳng AC,BD,MP,NQ*

đồng quy tại một điểm.

Xét phép nghịch đảo cực (O) với phương tích R^2, ta thu được định lý sau.

Định lí 5'. *Cho đường (O), bốn đường tròn $(C_1), (C_2), (C_3), (C_4)$ đi qua O và lần lượt tiếp xúc trong với (O) tại M, N, P, Q sao cho (C_1) lần lượt cắt $(C_2), (C_4)$ tại B, A; (C_3) lần lượt cắt $(C_2), (C_4)$ tại C, D. Khi đó bốn đường tròn $(ACO), (BDO), (MPO)$, (NQO) đồng quy tại một điểm thứ hai khác O.*



Hình 8:

2.2.3 Định lý về điểm Gergonne

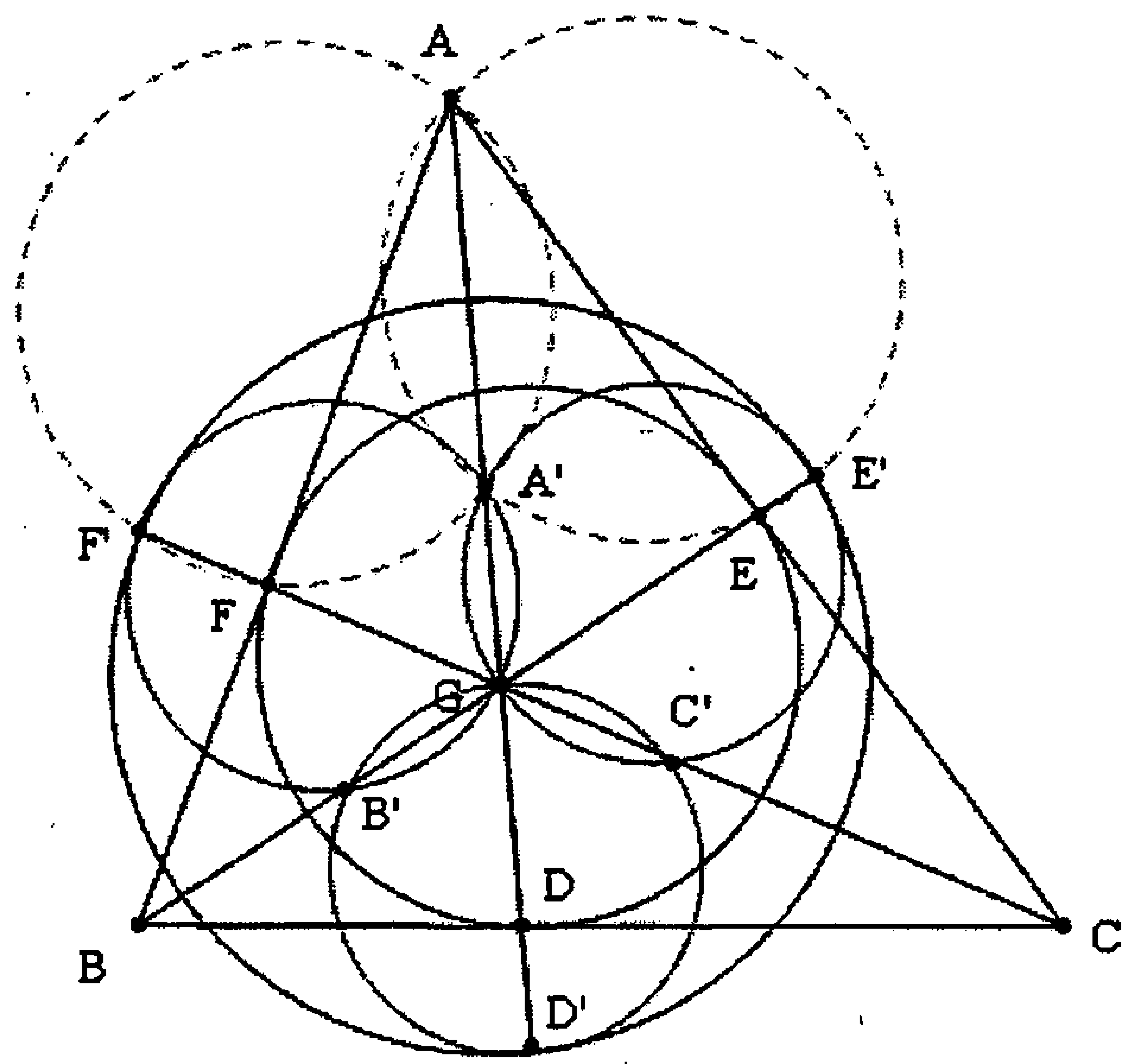
Định lí 6. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) với các tiếp điểm trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Khi đó AD, BE, CF đồng quy tại một điểm G gọi là điểm Gergonne.*

Xét phép nghịch đảo cực G phương tích k bất kỳ, ta thu được định lý sau.

Định lí 6'. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) với các tiếp điểm trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Một đường tròn (C) bất kỳ, qua A, F, cắt GF, GA thứ tự tại F', A'. Đường tròn $(AA'E)$ cắt GE tại E'. Các đường tròn $(GA'F'), (GA'E')$ lần lượt cắt GB, GC tại B', C' (khác G), đường tròn $(GB'C')$ cắt GD tại D'. Khi đó*

a) Các tứ giác $ABB'A', BCC'B', CAA'C'$ nội tiếp.

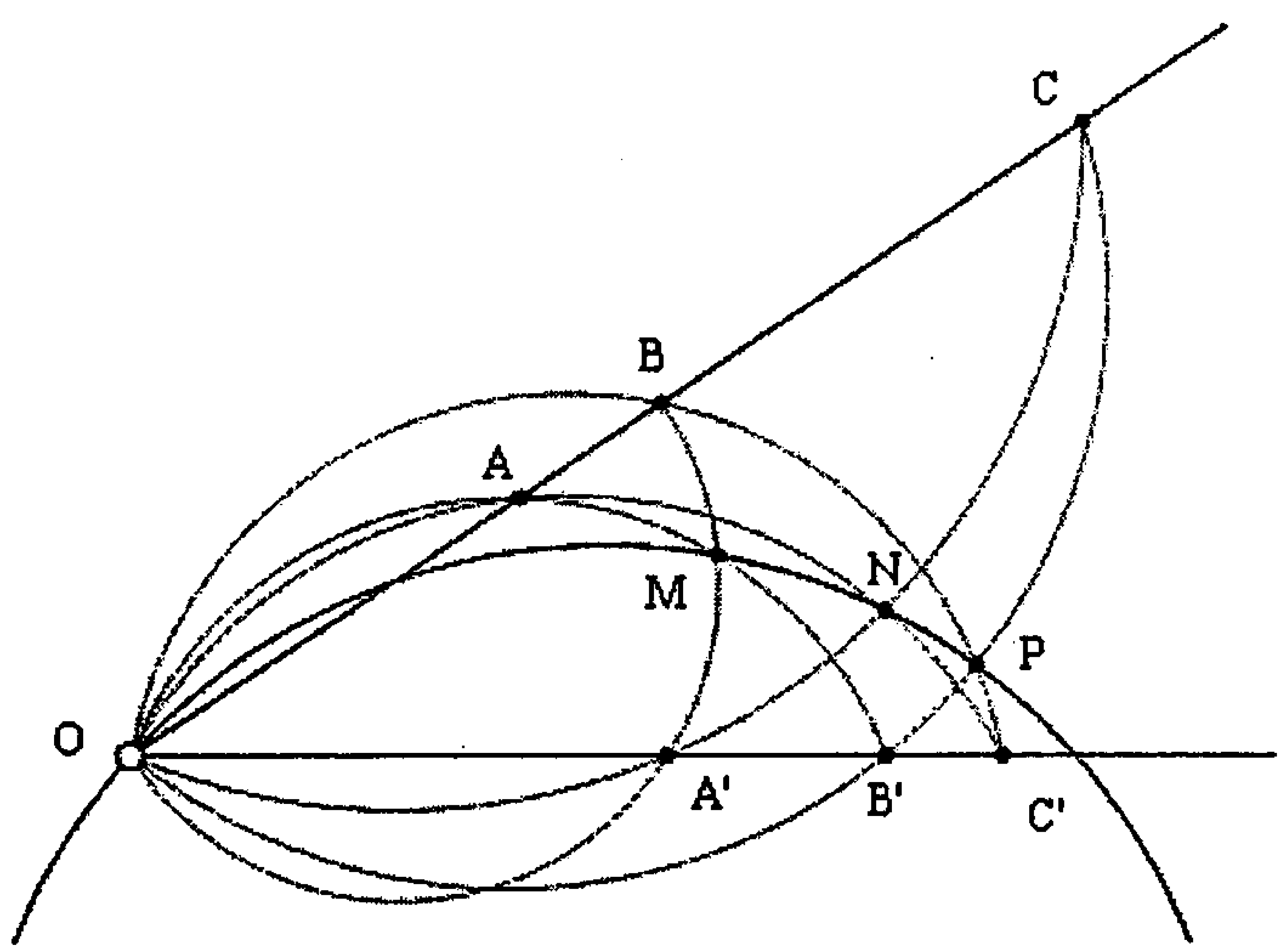
b) Đường tròn $(D'E'F')$ tiếp xúc với các đường tròn $(GA'B'), (GB'C'), (GC'A')$ lần lượt tại F', D', E'.



Hình 9:

2.2.4 Định lý Pappus

Định lí 7. . *Nếu A, B, C lần lượt nằm trên đường thẳng d và A', B', C' lần lượt nằm trên đường thẳng d' thì khi đó giao điểm của các cặp đường thẳng $(AB', A'B)$, $(AC', A'C)$, $(BC', B'C)$ thẳng hàng.*



Hình 10:

Giả sử d cắt d' tại O. Xét phép nghịch đảo cực O, phương tích k bất kỳ, ta được định lý sau.

Định lí 7'. *Cho điểm O cố định và hai đường thẳng d, d' thay đổi luôn qua O. Trên d lấy ba điểm A, B, C phân biệt, trên d' lấy ba điểm A', B', C' phân biệt. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm thứ hai của các cặp đường tròn (OAB') và $(OA'B)$; (OAC') và $(OA'C)$; (OBC') và $(OB'C)$. Khi đó đường tròn (MNP) luôn đi qua một điểm cố định khi d, d' thay đổi.*

Tiếp đến, chúng ta thử khai thác kết quả của định lý Lyness.

2.2.5 Định lý Lyness

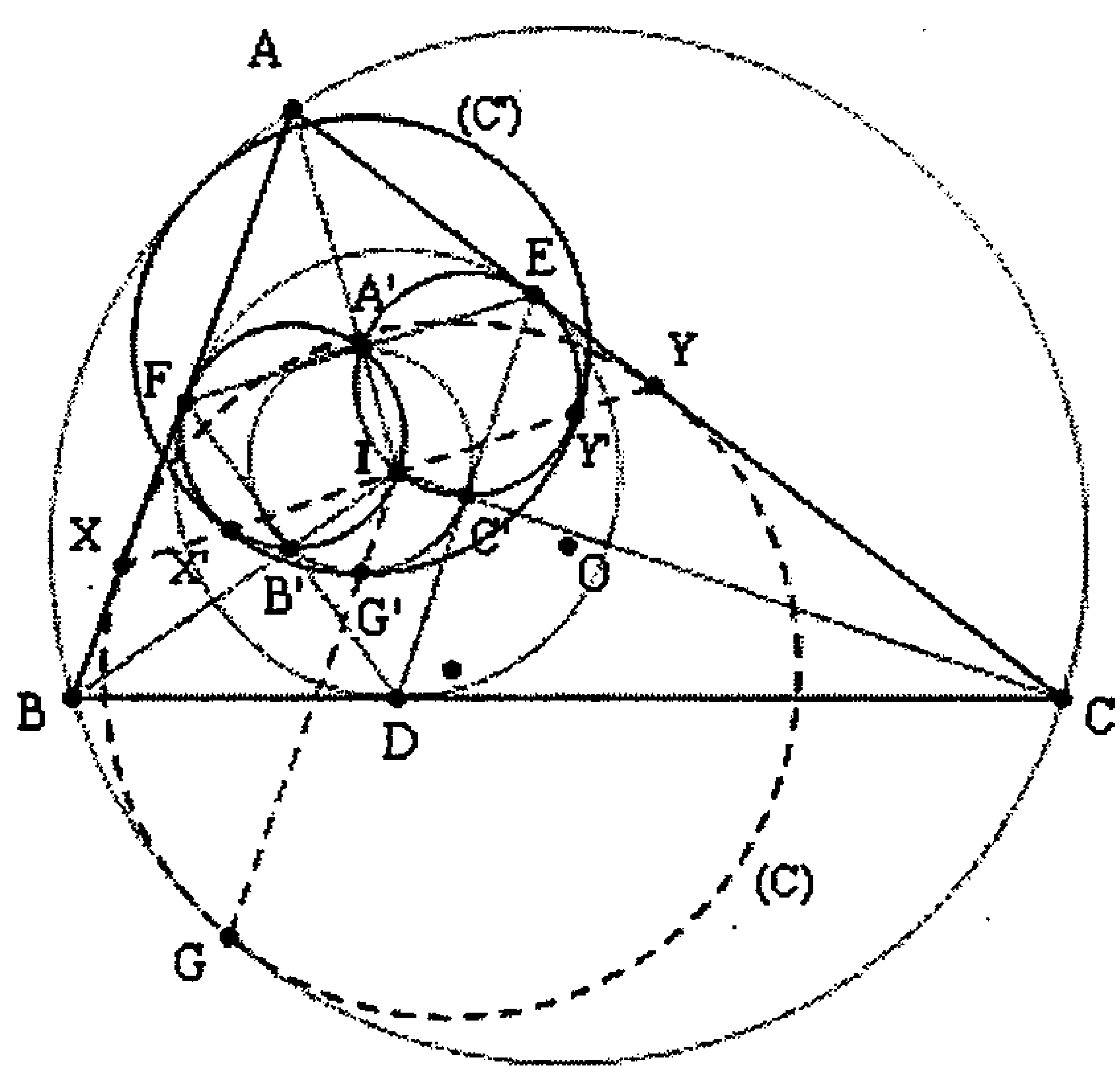
Định lí 8. *Nếu đường tròn (C) tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại G và tiếp xúc với các cạnh AB, AC của tam giác lần lượt tại X, Y thì tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên XY.*

Giả sử (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của EF, FD, DE. Bây giờ xét phép nghịch đảo đối với đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC.

Định lí 8'. *Cho đường tròn tâm I tiếp xúc trong với các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC tại D, E, F. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của EF, FD, DE. Đường tròn (Γ) tiếp xúc ngoài với các đường tròn $(A'B'C'), (IA'B'), (IA'C')$ lần lượt tại G', X', Y'. Khi đó*

a) Các điểm I, X', Y' thẳng hàng.

b) Nếu gọi X, Y lần lượt là giao điểm của $X'Y'$ với AB, AC và G là giao điểm của IG' với đường tròn (ABC) thì đường tròn (GXY) tiếp xúc trong với đường tròn (ABC) tại G.



Hình 11:

Tài liệu

[1] Nguyễn Mộng Hy, *Các phép biến hình trong mặt phẳng*, NXB Giáo Dục, 1997.

[2] V.V. Praxolov, *Các bài toán về hình học phẳng, Tập II*, NXB Hải Phòng, 2002.

[3] Trần Văn Tấn, *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề hình học 11*, NXB Giáo Dục, 2008.

[4] Đỗ Thanh Sơn, *Phép biến hình trong mặt phẳng*, NXB Giáo Dục, 2004.

[5] Nguyễn Đăng Phất, Nguyễn Hữu Tâm, *Mở rộng các định lý Steiner, Frégier và Poncelet*, Tạp chí Khoa học ĐH Quy Nhơn, 2009.

[6] Tạp chí toán học và tuổi trẻ năm 2006, 2007

[7] Tài liệu từ Internet.