

Biểu diễn các đường cong conic và ứng dụng giải toán sơ cấp

Nguyễn Quỳnh Nhật Uyên

Trường THPT Chất lượng cao Chu Văn An, Quy Nhơn, Bình Định

1 Mở đầu

Vì sự gần gũi của *biểu diễn hình học số phức* với *tọa độ của điểm trong hệ trục tọa độ Descartes* nên số phức có rất nhiều ứng dụng trong chương trình toán sơ cấp phổ thông, đặc biệt là hình học phẳng. Ở nhiều bài toán, việc giải bằng số phức thường đưa đến kết quả bất ngờ. Một trong những thao tác quan trọng trong việc giải bài toán hình học phẳng bằng số phức là biểu diễn số phức các yếu tố hình học. Các đường conic chiếm một phần quan trọng trong khung chương trình ở bậc phổ thông. Vì vậy việc tìm hiểu để đưa công cụ số phức vào việc giải các bài toán có liên quan đến các đường conic là hết sức có ý nghĩa.

Mục đích chính của bài báo này nhằm bước đầu tìm hiểu và khảo sát các biểu diễn dạng phức của các yếu tố trong hình học giải tích, cụ thể là các đường conic, từ đó giới thiệu một số bài toán về đường conic được giải bằng công cụ số phức.

Trong mục 2 chúng tôi trình bày phương trình dạng phức của đường conic tổng quát, biểu diễn một số yếu tố đặc biệt có liên quan. Dạng biểu diễn phức của các đường conic đặc biệt như ellip, parabol, hyperbol được giới thiệu trong mục 3. Đặc biệt, từ các biểu diễn đó, một số phương pháp hình thành các đường conic cũng được trình bày ở đây. Mục 4 là một số bài toán phổ thông về đường conic được giải bằng công cụ số phức. Trước đó, để hỗ trợ cho việc giải các bài toán nói trên, trong mục 1 sẽ trình bày một số công thức hình học dưới dạng phức như phương trình đường thẳng, đường tròn, khoảng cách, diện tích tam giác, ...

2 Một số yếu tố hình học giải tích

Các kết quả trong mục này có thể tìm thấy trong các tài liệu [1], [2].

Với mỗi phần tử $z = a + ib \in \mathbb{C}$, ta có thể đồng nhất với một điểm $Z(a; b)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy . Và mặt phẳng gồm các số phức $z = a + ib$ ta gọi là *mặt phẳng Gauss*.

Số phức $z = a + ib$ được gọi là *nhân* của điểm Z , và Z được gọi là *điểm ảnh* của số phức z .

Kể từ đây ta quy ước rằng mỗi điểm được ký hiệu bằng chữ in hoa và nhân của nó được ký hiệu bằng chữ thường tương ứng.

- Giả sử trong hệ trục Oxy , một đường cong (C) có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t), \end{cases}$$

với $f_1(t), f_2(t)$ là các hàm thực đối với tham số t .

Khi đó phương trình tham số phức của đường cong (C) là

$$z = x + iy = f_1(t) + if_2(t) = f(t).$$

Hàm $f(t)$ được gọi là hàm phức đối với tham số thực t .

2.1 Đường thẳng

- Phương trình tham số của đường thẳng qua 2 điểm A và B là

$$z = (1 - t)a + tb.$$

- Phương trình không tham số của đường thẳng qua 2 điểm A và B là

$$(\bar{b} - \bar{a})z - (b - a)\bar{z} + \bar{a}b - a\bar{b} = 0. \quad (1)$$

Ta cũng có các phương trình tương đương sau:

$$\frac{z - a}{b - a} = \frac{\bar{z} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}} \quad \text{hoặc} \quad \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- Từ phương trình (1) nếu ta đặt $\alpha = (\bar{a} - \bar{b})$ và $\beta = \bar{a}b - a\bar{b}$, khi đó phương trình trở thành $\alpha z - \bar{\alpha}\bar{z} + \beta = 0$ với β là một số thuần ảo. Như vậy, về mặt hình thức, ta có thể khẳng định rằng, dạng tổng quát của phương trình đường thẳng trong mặt phẳng phức có dạng

$$\alpha z - \bar{\alpha}\bar{z} + \beta = 0 \quad (2)$$

với β là một số thuần ảo.

Phương trình (2) có dạng thực là $Ax + By + C = 0$, trong đó $A = -i(\alpha - \bar{\alpha}), B = \alpha + \bar{\alpha}, C = -i\beta$, và ngược lại.

- Trong mặt phẳng Gauss, cho 2 đường thẳng d_1, d_2 có phương trình lần lượt là

$$\alpha_1 z - \bar{\alpha}_1 \bar{z} + \beta_1 = 0; \quad \alpha_2 z - \bar{\alpha}_2 \bar{z} + \beta_2 = 0.$$

Khi đó góc giữa hai đường thẳng được xác định bởi công thức sau

$$\cos \varphi = \frac{|\alpha_1 \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1 \alpha_2|}{2|\alpha_1||\alpha_2|}.$$

- Trong mặt phẳng Gauss, cho đường thẳng d có phương trình $\alpha z - \bar{\alpha}\bar{z} + \beta = 0$, một điểm Z_0 nằm ngoài đường thẳng d . Khi đó chân đường vuông góc hạ từ Z_0 có nhãn là

$$z = \frac{\alpha z_0 + \bar{\alpha} \bar{z}_0 - \beta}{2\alpha} = \frac{2\operatorname{Re}(\alpha z_0) - \beta}{2\alpha}.$$

- Trong mặt phẳng Gauss, cho đường thẳng Δ có phương trình $\alpha z - \overline{\alpha}z + \beta = 0$, và một điểm Z_0 nằm ngoài đường thẳng Δ . Khi đó khoảng cách từ điểm Z_0 đến đường thẳng Δ được xác định bởi công thức sau

$$d(z_0; \Delta) = \frac{|\alpha z_0 - \overline{\alpha}z_0 + \beta|}{2\sqrt{\alpha\overline{\alpha}}} = \frac{|2\text{Im}(\alpha z_0 + \beta)|}{2|\alpha|}.$$

2.2 Đường tròn

- Phương trình không tham số tổng quát của một đường tròn trong mặt phẳng Gauss có dạng

$$z\overline{z} + az + \overline{a}z + b = 0, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Nhân của tâm đường tròn là $-\overline{a}$ và bán kính $R = \sqrt{a\overline{a} - b}$.

- Trong mặt phẳng Gauss, phương trình

$$z = \frac{at + b}{ct + d}$$

trong đó các hằng số $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (hoặc $\in \mathbb{C}$) sao cho $ad - bc \neq 0$ và t là tham số (có thể lấy trên toàn bộ $\mathbb{R}$) biểu diễn

- một đường thẳng nếu $c = 0$ hoặc $\frac{d}{c} \in \mathbb{R}$;
- một đường tròn trong các trường hợp còn lại.

Trong trường hợp b) phương trình trên gọi là *phương trình tham số* của đường tròn.

3 Đường conic tổng quát

Định lý 1. Phương trình tham số phức của một đường conic thực trong mặt phẳng Gauss có dạng

$$z = \frac{a_0 + 2a_1t + a_2t^2}{r_0 + 2r_1t + r_2t^2} \quad (1)$$

với các hằng số $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ (hoặc $\in \mathbb{C}$) và các hằng số $r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.

Chứng minh.

Xét một conic được cho trên hệ trục Oxy , gọi Ω là một điểm bất kỳ thuộc conic. Xét một hệ trục mới $\Omega\xi\eta$ với $\Omega\xi, \Omega\eta$ lần lượt song song với $Ox; Oy$, và giả sử đường conic có phương trình

$$r_0\xi^2 + 2r_1\xi\eta + r_2\eta^2 - \alpha\xi - \beta\eta = 0$$

với $r_0, r_1, r_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Một đường thẳng d qua Ω có phương trình $\eta = t\xi, (t \in \mathbb{R})$ cắt conic tại điểm có tọa độ:

$$\begin{cases} \xi = \frac{\alpha + \beta t}{r_0 + 2r_1t + r_2t^2} \\ \eta = \frac{\alpha t + \beta t^2}{r_0 + 2r_1t + r_2t^2} \end{cases}$$

Nhân của giao điểm này trong hệ trục $O\xi\eta$ là

$$\zeta = \xi + i\eta = \frac{\alpha + (\beta + i\alpha)t + i\beta t^2}{r_0 + 2r_1t + r_2t^2}.$$

Nhân của giao điểm này trong hệ trục Oxy là

$$z = \zeta + \omega = \frac{\alpha + \omega r_0 + (\beta + i\alpha + 2\omega r_1)t + (i\beta + \omega r_2)t^2}{r_0 + 2r_1t + r_2t^2},$$

phương trình này có dạng (1).

Conic Γ có phương trình (1) là một ellip, một hyperbol hay một parabol là tùy thuộc vào biệt thức $\Delta_r = r_0r_2 - r_1^2$ của tam thức $r_0 + 2r_1t + r_2t^2$ có giá trị tương ứng dương, âm hay bằng 0. Điều này có nghĩa là, một conic có phương trình (1) là một ellip, một hyperbol hay một parabol tùy thuộc vào sự tồn tại 0, 2 hoặc 1 giá trị thực của t sao cho z là điểm tại vô cùng trong mặt phẳng Gauss.

Hệ quả 1. Phương trình (1) biểu diễn một đường tròn nếu

$$\Delta_r > 0 \quad \text{và} \quad 4\Delta_a\Delta_r - H^2 = 0,$$

với $\Delta_a = a_0a_2 - a_1^2$ và $H = a_0r_2 - 2a_1r_1 + a_2r_0$.

Chứng minh.

Thật vậy, vì $\Delta_r > 0$ nên tam thức bậc hai $r_0 + 2r_1t + r_2t^2$ có 2 nghiệm ảo. Hơn nữa, từ giả thiết $4\Delta_a\Delta_r - H^2 = 0$ ta suy ra rằng một trong hai nghiệm ảo này là nghiệm của tam thức $a_0 + 2a_1t + a_2t^2$, do vậy phương trình (1) có thể đưa về dạng

$$z = \frac{a + bt}{c + dt}.$$

Phương trình này biểu diễn một phương trình tham số của một đường tròn.

Mệnh đề 1. Gọi ϕ_1, ϕ_2 là nhân hai tiêu điểm của conic xác định bởi phương trình (1). Khi đó ϕ_1, ϕ_2 là nghiệm của phương trình

$$\Delta_r\phi^2 - H\phi + \Delta_a = 0. \quad (2)$$

Chứng minh.

Thực hiện phép chuyển về hệ trục mới với gốc tọa độ là ϕ , khi đó phương trình của conic trong hệ trục mới có dạng:

$$z_1 = z - \phi = \frac{a_0 + 2a_1t + a_2t^2}{r_0 + 2r_1t + r_2t^2} - \phi = \frac{a_0 + \phi r_0 + 2(a_1 - \phi r_1)t + (a_2 - \phi r_2)t^2}{r_0 + 2r_1t + r_2t^2}.$$

Vì ellip, hyperbol hay parabol không phải là đường tròn nên các tiêu điểm của chúng là thông thường, và do vậy tử thức phải là bình phương của một hàm tuyến tính theo t , nghĩa là

$$a_0 + \phi r_0 + 2(a_1 - \phi r_1)t + (a_2 - \phi r_2)t^2 = (a + bt)^2.$$

Hay nói cách khác, $\Delta_r = 0$. Vì vậy $(a_0 - \phi r_0)(a_2 - \phi r_2) - (a_1 - \phi r_1)^2 = 0$, hay

$$\Delta_r \phi^2 - H\phi + \Delta_a = 0.$$

Nếu conic là một parabol, khi đó tâm của conic là $\phi = \frac{\Delta_a}{H}$.

Vì tâm của conic là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tiêu điểm nên tâm của conic có nhĩn là

$$\omega = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} = \frac{H}{2\Delta_r}.$$

Hệ quả 2. Tâm của conic và tiêu điểm của conic trùng với gốc tọa độ là phụ thuộc vào $\Delta_a = 0$ hoặc $H = 0$.

Thật vậy, nếu $\Delta_a = 0$ thì $\phi_1 = 0$, vì vậy $F_1 \equiv O$. Nếu $H = 0$ thì $\omega = 0$, khi đó $\Omega \equiv O$.

4 Các trường hợp đặc biệt

Định lý 2. Phương trình tham số phức của một parabol luôn được viết dưới dạng

$$z = b_0 + 2b_1t + b_2t^2. \quad (1)$$

Chứng minh.

Giả sử parabol có phương trình dạng

$$z = \frac{a_0 + 2a_1t + a_2t^2}{r_0 + 2r_1t + r_2t^2}; \quad \Delta_r = r_0r_2 - r_1^2 = 0. \quad (2)$$

Đặt $t = \frac{r_1}{r_2} \frac{T}{1-T}$, khi đó phương trình (2) trở thành

$$z = \frac{1}{r_1^2} [a_0r_2 - 2(a_0r_2 - a_1r_1)T + (a_0r_2 - 2a_1r_1 + a_2r_0)T^2],$$

có dạng (1).

Điều ngược lại là hiển nhiên.

Mệnh đề 2. Một parabol có phương trình dạng (1) thì có phương trình trong hệ trục thực là

$$Y^2 = 4 \frac{|b_1|^2}{|b_2|^2} X. \quad (3)$$

Chứng minh.

Gọi B_0X, B_0Y là các trục chỉ phương của các vector $\overrightarrow{OB_2}, \overrightarrow{OB_1}$. Khi đó trong hệ trục mới A_0XY điểm Z có tọa độ là

$$X = |b_2|t^2, Y = 2|b_1|t,$$

và phương trình của parabol trong hệ trục mới là (3).

Hệ quả 3. Cho parabol $\mathcal{P}$ có phương trình $z = (a + ib)t + ct^2$. Khi đó phương trình của $\mathcal{P}$ trong hệ tọa độ Descartes là

$$y^2 = 4 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c^2} x. \quad (4)$$

Định lý 3. Phương trình tham số phức của một hyperbol luôn được viết dưới dạng

$$z = b_0 + b_1 t + \frac{b_2}{t}. \quad (5)$$

Chứng minh.

Giả sử phương trình của một hyperbol có dạng:

$$\frac{a_0 + 2a_1 t + a_2 t^2}{r_0 + 2r_1 t + r_2 t^2}; \quad \Delta_r = r_0 r_2 - r_1^2 < 0 \quad (6)$$

và nhãn của tâm là

$$\omega = \frac{H}{2\Delta_r} = \frac{a_0 r_2 - 2a_1 r_1 + a_2 r_0}{2\Delta_r}. \quad (7)$$

Xét các trường hợp:

1. $\mathbf{r_0 = r_2 = 0}$. Ta có $\omega = \frac{a_1}{r_1}$ và phương trình trở thành $z = \omega + \frac{a_2}{2r_1} t + \frac{a_0}{2r_1 t}$, có dạng (5). Nếu $t = 0$ hoặc $t = \infty$ thì $z = \infty$.

Gọi $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OD'}$ là hai vector có nhãn lần lượt là $\frac{a_2}{2r_1}, \frac{a_0}{2r_1}$, khi đó hai tiệm cận d và d' của parabol song song với giá của hai vector $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OD'}$.

Ngược lại, nếu chúng ta chọn hai tiệm cận đi qua tâm Ω sao cho $\overrightarrow{\Omega D_1} = t \overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega D'_1} = t \overrightarrow{\Omega D'}$ khi đó đỉnh thứ tư của hình bình hành có hai cạnh $\Omega D_1, \Omega D'_1$ là điểm Z thuộc hyperbol.

2. $\mathbf{r_1^2 + r_2^2 > 0}$. Trường hợp này có thể đưa về trường hợp 1 bởi phép thế

$$t = \frac{\alpha T + \beta}{\gamma T + \delta}; \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R},$$

khi đó phương trình (6) trở thành

$$z = \frac{a_0 \delta^2 + 2a_1 \beta \delta + a_2 \beta^2 + 2[a_0 \gamma \delta + a_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + a_2 \alpha \beta] T + \dots}{r_0 \delta^2 + 2r_1 \beta \delta + r_2 \beta^2 + 2[r_0 \gamma \delta + r_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + r_2 \alpha \beta] T + \dots} \dots + \frac{(a_0 \gamma^2 + 2a_1 \alpha \gamma + a_2 \alpha^2) T^2}{(r_0 \gamma^2 + 2r_1 \alpha \gamma + r_2 \alpha^2) T^2} \quad (8)$$

với

$$(r_0 \gamma^2 + 2r_1 \alpha \gamma + r_2 \alpha^2) = 0 \quad (9)$$

và

$$r_0 \delta^2 + 2r_1 \beta \delta + r_2 \beta^2 = 0. \quad (10)$$

Giả sử $r_0 \neq 0$. Vì $\Delta_r < 0$ nên phương trình

$$r_0\xi^2 + 2r_1\xi + r_2 = 0 \quad (11)$$

có hai nghiệm thực phân biệt ξ_1, ξ_2 . Vì $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ và từ (9), (10) ta suy ra $\frac{\gamma}{\alpha} = \xi_1; \frac{\delta}{\beta} = \xi_2$.

Còn nếu $r_0 = 0, r_2 \neq 0$, ta xét phương trình $r_0\phi^2 + 2r_1\phi + r_2 = 0$ thay vì phương trình (11).

Chọn $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = \xi_1, \delta = \xi_2$ khi đó phương trình (8) trở thành

$$z = \omega + \frac{r_0}{4\Delta_r}(a_0\xi_1^2 + 2a_1\xi_1 + a_2)T + \frac{r_0}{4\Delta_r}(a_0\xi_2^2 + 2a_1\xi_2 + a_2)\frac{1}{T}.$$

Hệ quả 4. Cho hyperbol $\mathcal{H}$ có phương trình $z = \frac{(a+ib)}{2}t + \frac{-a+ib}{2t}$. Khi đó phương trình của $\mathcal{H}$ trong hệ tọa độ Descartes là

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (12)$$

Định lý 4. Phương trình tham số phức của một ellip luôn được viết dưới dạng

$$z = c + ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}. \quad (13)$$

Chứng minh.

Giả sử phương trình tham số phức của đường cong có dạng (13). Xét phép thế $T = \tan \frac{\omega t}{2}$.

Ta có $\cos \omega t = \frac{1-T^2}{1+T^2}, \sin \omega t = \frac{2T}{1+T^2}$, do vậy

$$\begin{aligned} z &= c + ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t} = (a+b)\cos \omega t + i(a-b)\sin \omega t \\ &= c + \frac{a+b+2i(a-b)T - (a+b)T^2}{1+T^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

có dạng (1) với $\Delta_r = r_0r_2 - r_1^2 > 0$.

Ngược lại, giả sử ellip có dạng (1) với $\Delta_r = r_0r_2 - r_1^2 > 0$. Gọi $xi + i\eta$ và $\xi - i\eta$ là nghiệm phức của mẫu thức. Tương tự như biểu thức (8) ta có thể đưa phương trình về dạng (14) bằng phép biến đổi $t = \frac{T}{\xi T + \eta}$.

Hệ quả 5. Trong hệ tọa độ Descartes, ellip có phương trình

$$z = ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}. \quad (15)$$

được hình thành bằng cách quay các vector $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ quanh gốc tọa độ O theo hai hướng ngược nhau với cùng một vận tốc quay ω .

Chứng minh.

Ký hiệu $A_t = Q_{(O;\omega)}(A), B_t = Q_{(O;- \omega)}(B)$, với $Q_{(O;\omega)}(.)$ là ký hiệu phép quay tâm O với góc quay ω . Gọi Z_t là đỉnh thứ tư của hình bình hành $OA_tZ_tB_t$. Khi đó Z_t là nhân của $ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}$. Ta có điều cần chứng minh

Chú ý rằng ellip trên có tâm O , với hai tiêu cự A, B . Ta dễ dàng nhận được các hệ quả sau:

Hệ quả 6. Phương trình dạng thực của ellip (15) là

$$\frac{x_1^2}{(|a| + |b|)^2} + \frac{y_1^2}{(|a| - |b|)^2} = 1 \quad (16)$$

với $x_1 = (|a| + |b|) \cos \omega t_1$, $y_1 = (|a| - |b|) \sin \omega t_1$.

Mệnh đề 3. Tiếp tuyến với ellip (15) tại tiếp điểm Z vuông góc với $A_t B_t$.

Ta có các nhận xét sau:

- Trục chính của ellip nằm trên phân giác trong của góc $(\overrightarrow{OA_t} : \overrightarrow{OB_t})$.
- Độ dài của bán trục chính: $|OA| + |OB|$.
Độ dài của bán trục nhỏ: $|OA| - |OB|$, nếu $|OA| > |OB|$.
- Gọi Ox_1, Oy_1 lần lượt là phân giác trong và ngoài của các góc $(OA_t; OB_t)$. Khi t thay đổi, giá của hai vector $\overrightarrow{OA_t}$ và $\overrightarrow{OB_t}$ tạo thành một chùm đường thẳng có chung hai tia vuông góc Ox_1, Oy_1 . Khi OA_t, OB_t nằm trên Ox_1 chúng cùng hướng, và ngược hướng nếu chúng cùng nằm trên Oy_1 . Và trong mỗi trường hợp trên tiếp tuyến với ellip tại Z chính là đường kính OZ .
- Nếu OA_t, OB_t cắt ZN tại A'_t, B'_t , thì tiêu điểm của ellip là giao điểm F, F' của Ox_1 với đường tròn đi qua A'_t, B'_t và có tâm là giao điểm T' của Oy_1 với ZT . Ta có

$$OF^2 = OF'^2 = [|OA| + |OB|]^2 - [|OA| - |OB|]^2 = 4|OA \cdot OB| = |OA'_t| |OB'_t|.$$

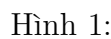
Hơn nữa, vì Ox_1 là phân giác của góc $(OA_t; OB_t)$, nên theo mệnh đề ?? ta có $(A'_t B'_t F F') = -1$ và: $OF^2 = OA'_t OB'_t = a'_t b'_t = 4a_t b_t$. Ta chú ý rằng nếu T và N là giao điểm của Ox_1 với tiếp tuyến và pháp tuyến tại Z , khi đó $(TN F F') = 1$. Từ đó suy ra một cách dựng khác của F và F' .

- Bán kính OZ' liên hợp với OZ vuông góc với $A_t B_t$ và $|OZ'| = |A_t B_t|$.

Định lý 5. ([2]) Mọi ellip đều có thể hình thành bằng sự trợ giúp của hai vector quay.

Chứng minh.

Quan sát hình vẽ 1, nếu ellip (E) có hai tiêu điểm F và F' , và trục phụ nằm trên Oy_1 . Nếu tiếp tuyến với (E) tại Z cắt Oy_1 tại T' , ta gọi A'_t, B'_t là giao điểm của pháp tuyến tại Z với đường tròn tâm T' đi qua F và F' . Gọi A_t, B_t là trung điểm của OA'_t, OB'_t . Khi quay hai tia OA_t, OB_t với hai vận tốc góc có cùng độ lớn nhưng ngược hướng nhau ta được ellip (E) . Sự hình thành này không phụ thuộc vào vận tốc góc ω .



198

Khoảng cách từ một điểm $Z \in (\mathcal{P})$ đến (d) là

$$d(Z; d) = \left| \frac{\frac{3+4i}{2}(t^2 + i8t) - \frac{3-4i}{2}(t^2 - i8t) + 46i}{2\left|\frac{3+4i}{2}\right|} \right| = \frac{|2(2t^2 + 23t + 23)|}{5}.$$

Ta có

$$2(2t^2 + 23t + 23) = 2(\sqrt{2}t + 3\sqrt{2})^2 + 10 \geq 10.$$

Do đó $d(Z; d) \geq 2$ và đẳng thức đạt được tại $t = -3$. Vậy $d(\mathcal{P}, d) = 2$ được xác định từ $M_0 = (9; -24) \in (\mathcal{P})$.

Ví dụ 3. Cho parabol $(\mathcal{P})$ có phương trình $y = \frac{1}{2}x^2$ và họ đường thẳng $\{d_m\}$ với các phương trình $2mx - 2y + 1 = 0$. Chứng minh rằng họ $\{d_m\}$ luôn đi qua tiêu điểm của $(\mathcal{P})$. Gọi A, B là hai giao điểm của $(\mathcal{P})$ với d_m . Tìm quỹ tích trung điểm của AB khi m thay đổi.

Lời giải. Phương trình dạng phức của $(\mathcal{P})$ là $z = t + i\frac{t^2}{2}$. Phương trình dạng phức của d_m là

$$(-1 + mi)z + (1 + mi)\bar{z} + i = 0.$$

Dễ kiểm tra tiêu điểm P của $(\mathcal{P})$ với nhân $\frac{i}{2}$ thỏa mãn phương trình của d_m với mọi m . Vậy d_m luôn đi qua P với mọi m . Giả sử $a = t_a + i\frac{t_a^2}{2}, b = t_b + i\frac{t_b^2}{2}$. Khi đó t_a, t_b là nghiệm của phương trình

$$(-1 + mi)(t + i\frac{t^2}{2}) + (1 + mi)(t - i\frac{t^2}{2}) + i = 0 \quad \text{hay} \quad t^2 - 2mt - 1 = 0.$$

Khi đó trung điểm W của AB có nhân

$$w = \frac{a + b}{2} = \frac{t_a + t_b}{2} + i\frac{t_a^2 + t_b^2}{2} = \frac{t_a + t_b}{2} + i\left[\left(\frac{t_a + t_b}{2}\right)^2 - \frac{t_a t_b}{2}\right] = s + i(s^2 + \frac{1}{2}).$$

Vậy quỹ tích của W là parabol có phương trình $y = x^2 + \frac{1}{2}$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Descartes cho ellip $(\mathcal{E})$. Từ gốc tọa độ vẽ hai tia vuông góc với nhau, cắt $(\mathcal{E})$ tại M và N . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OM^2}$$

là một đại lượng không đổi.

Lời giải.

Giả sử $(\mathcal{E})$ có phương trình $z = ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}$; $a, b \in \mathbb{R}$ và

$$m = ae^{i\omega t_0} + be^{-i\omega t_0} = (a + b)\cos \alpha + i(a - b)\sin \alpha; \quad \text{với } \alpha = \omega t_0.$$

Vì $ON \perp OM$ nên N thuộc đường thẳng d đi qua O và N' với $n' = im$. Vì vậy d có phương trình

$$z = t.im = it[(a + b)\cos \alpha + i(a - b)\sin \alpha] = t[(a - b)\sin \alpha + i(a + b)\cos \alpha].$$

Vì N là giao điểm của $(\mathcal{E})$ và d nên thỏa mãn

$$t[(a-b)\sin\alpha + i(a+b)\cos\alpha] = ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}$$

hay

$$\frac{1}{t^2} = \frac{(b-a)^2}{(a+b)^2} \sin^2\alpha + \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} \cos^2\alpha.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OM^2} &= \frac{1}{(a-b)^2 \sin^2\alpha + (a+b)^2 \cos^2\alpha} \left(\frac{1}{t^2} + 1 \right) \\ &= \frac{\frac{(b-a)^2}{(a+b)^2} \sin^2\alpha + \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} \cos^2\alpha}{(a-b)^2 \sin^2\alpha + (a+b)^2 \cos^2\alpha} = \frac{2(a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)^2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Descartes Oxy cho ellip $(\mathcal{E})$ có phương trình $x^2 + 4y^2 = 4$ và các điểm $M(-2, y_m), N(2, y_n)$.

1) Tìm điều kiện của y_m và y_n để MN tiếp xúc với $(\mathcal{E})$.

2) Gọi A_1, A_2 là các đỉnh của $(\mathcal{E})$ trên trục lớn. Tìm quỹ tích giao điểm K của A_1N và A_2M khi M, N di chuyển nhưng MN luôn tiếp xúc với $(\mathcal{E})$.

Lời giải. Phương trình dạng phức của $(\mathcal{E})$ là

$$z = \frac{3}{2}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t}.$$

Dễ thấy $a_1 = -2, a_2 = 2, m = -2 + iy_m, n = 2 + iy_n$ và phương trình tham số của MN là

$$z = (1-t)m + tn = (-4t+2) + i(y_n - (y_n - y_m)t).$$

1) Phương trình giao điểm của MN và $(\mathcal{E})$ là

$$\begin{aligned} (-4t+2) + i(y_n - (y_n - y_m)t) &= \frac{3}{2}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\omega t = -2t+1 \\ \sin\omega t = y_n - (y_n - y_m)t \end{cases} &\Leftrightarrow (-2t+1)^2 + (y_n - (y_n - y_m)t)^2 = 1. \end{aligned}$$

Vì MN tiếp xúc với $(\mathcal{E})$ nên phương trình trên có nghiệm duy nhất, điều này tương đương với $y_n y_m = 1$.

2) Phương trình tham số của A_1N, A_2M tương ứng là

$$\begin{aligned} z &= (1-t)a_1 + tn = (t-1)2 + t(2 + iy_n) = (4t-2) + i.nt; \\ z &= (1-t)a_2 + tm = (1-t)2 + t(-2 + iy_m) = (4t-2) + i.m(1-t). \end{aligned}$$

Tọa độ giao điểm K của A_1N và A_2M thỏa mãn $(4t-2) + i.nt = (4t-2) + i.m(1-t)$, suy ra $t = \frac{y_m}{y_m + y_n}$. Do đó

$$k = \frac{2y_m - y_n}{y_m + y_n} + i \frac{y_m y_n}{y_m + y_n} = \frac{2y_m - y_n}{y_m + y_n} + i \frac{1}{y_m + y_n}.$$

Vì $\left[\frac{2y_m - y_n}{y_m + y_n}\right]^2 = 4 - \left[\frac{4}{(y_m + y_n)^2}\right]^2$. Vậy quỹ tích của K là ellip có phương trình

$$\frac{x^2}{4} + 4y^2 = 1.$$

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Descartes Oxy cho hyperbol $(\mathcal{H})$ có phương trình $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ và đường thẳng d có phương trình $Ax + By + C = 0$.

- 1) Tìm điều kiện của A, B, C để d tiếp xúc với $(\mathcal{H})$.
- 2) Chứng minh rằng chân đường cao kẻ từ tiêu điểm của $(\mathcal{H})$ đến các đường tiệm cận nằm trên đường chuẩn của $(\mathcal{H})$.

Lời giải. Phương trình dạng phức của $(\mathcal{H})$ là

$$z = \frac{a+ib}{2}t + \frac{a-ib}{2t} = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) + i\frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

Phương trình dạng phức của d là $\frac{B+iA}{2}z - \frac{B-iA}{2}\bar{z} + iC = 0$.

Phương trình dạng phức của hai tiệm cận d_1, d_2 tương ứng là

$$\frac{a-ib}{a}z - \frac{a+ib}{a}\bar{z} = 0; \quad \frac{a+ib}{a}z - \frac{a-ib}{a}\bar{z} = 0.$$

- 1) Điều kiện để d tiếp xúc với $(\mathcal{H})$ là phương trình sau có nghiệm kép:

$$\operatorname{Im}\left[2\frac{B+iA}{2}\left(\frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) + i\frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right) + C\right] = 0,$$

tức là phương trình $(Bb - Aa)t^2 + 2Ct - (Bb + Aa) = 0$ có nghiệm kép, hay $C^2 = (Aa)^2 - (Bb)^2$.

- 2) Các tiêu điểm của $(\mathcal{H})$ là $z_1 = \sqrt{a^2 + b^2}, z_2 = -\sqrt{a^2 + b^2}$. Chân đường cao K kẻ từ z_1 đến đường tiệm cận $\frac{a-ib}{a}z - \frac{a+ib}{a}\bar{z} = 0$ có nhân

$$k = \frac{1}{2\frac{a-ib}{a}} 2\operatorname{Re}\left[\frac{a-ib}{a}\sqrt{a^2 + b^2}\right] = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Vì đường chuẩn của $(\mathcal{H})$ có phương trình $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ nên ta suy ra điều cần chứng minh.

Tài liệu

- [1] T. Andreescu and D. Andrica, *Complex Numbers from A to ... Z*, Birkhäuser, Boston - Basel - Berlin, 2004.
- [2] R. Deaux, *Introduction to the Geometry of Complex Numbers*, Dover Publications Inc., Mineola, New York, 1998.