Nhìn một số bài toán thuần túy hình học theo ”tọa độ”

Huỳnh Duy Thủy
Trường THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, Bình Định

1 Mở đầu

- Có những bài toán hình học phẳng khá "hóc búa" gây không ít khó khăn, trăn trở cho người làm toán.

Vì thế việc tìm hiểu và tường minh (ở mức độ tương đối) một giải pháp khả dĩ là kỳ vọng của tác giả.

- Sử dụng công cụ tọa độ là giải pháp được đề cập và luận bàn trong bài viết này.

* Những câu hỏi rất "tự nhiên" được đặt ra là:

- Dựa vào dấu hiệu nào , đặc điểm gì mà ta vận dụng công cụ tọa độ ?

- Với mỗi bài toán, việc xây dựng hệ trục tọa độ được hình thành qua những công đoạn nào?

- Liệu rằng có thể xác lập được một nguyên tắc chung với các bước thực hiện có trình tự trong việc vận dụng công cụ tọa độ hay không?

2 Mục đích của bài viết

Bằng sự trải nghiệm, người viết cố gắng giải đáp những câu hỏi đã đặt ra với ước vọng góp một chút suy nghĩ bé nhỏ của mình để cùng quý thầy cô tạo ra một góc nhìn đa chiều về bài toán rất phổ thông và quan trọng này.

* Những ý tưởng mà bài viết hướng tới là:

- Hình thành cô đọng lượng kiến thức thiết yếu, nền tảng làm cơ sở cho giải pháp sử dụng công cụ tọa độ.

- Xây dựng nguyên tắc xác định hệ trục tọa độ Đề các tương ứng với mỗi loại hình.

- Khám phá, phân tích nhiều lời giải trên một bài toán, nhằm bổ sung, hoàn thiện kiến thức. Từ đó hiểu bài toán một cách thấu đáo và có chiều sâu.

3 Nội dung

* Với kết cấu và yêu cầu chung của chương trình hiện nay, việc giải toán bằng công cụ tọa độ được đặc biệt nhấn mạnh.

* Các nguyên tắc cần lưu tâm khi giải bài toán hình học phẳng thuần túy bằng công cụ tọa độ.

+ Chọn hệ trục tọa độ

- Gốc tọa độ, trục tọa độ thường gắn liền với điểm và đường đặc biệt của bài toán như: tâm đường tròn, đỉnh góc vuông, trung điểm đoạn thẳng, chân đường cao ...

+ Chuyển đổi ngôn ngữ từ yếu tố hình học "thuần túy" sang ngôn ngữ tọa độ.

- Chuẩn hóa độ dài các đoạn thẳng và đơn vị trục.

- Từ đó xác định tọa độ các điểm và phương trình các đường, theo hướng hạn chế đến mức thấp nhất việc sử dụng các tham số, điều chỉnh giá trị của các tham số để nhận được những tọa độ "đẹp" giúp các phép toán trở nên đơn giản.

+ Khai thác các tính chất và phép toán liên quan đến véctơ và tọa độ như:

- Điều kiện theo tọa độ để 2 véc tơ vuông góc.

- Điều kiện theo tọa độ để 2 véc tơ cùng phương.

- Tính khoảng cách dựa theo tọa độ.

- Tính số đo của góc dựa theo tọa độ ...

+ Với việc sử dụng công cụ tọa độ, ta đã đại số hóa bài toán hình học, "biến" những quan hệ thuần túy trong hình học sang yếu tố về "lượng".

Chính vì thế "cơ hội" giải bài toán "cao hơn" và có "đường lối" hơn.

Điều này là rất quan trọng trong dạy toán, học toán.

- Với sự trợ giúp của công nghệ máy tính ta không "ngại" khâu tính toán.

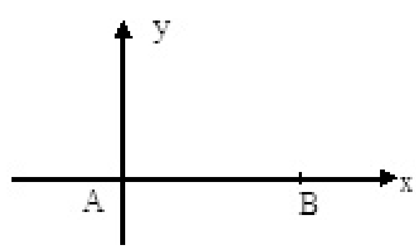
Hình thành hệ trục tọa độ trong mặt phẳng như thế nào?

* Bài toán có đơn giản hay không , phần lớn phụ thuộc vào việc hình thành hệ trục tọa độ và đơn vị trục.

* Sau đây là cách chọn hệ trục tọa độ tương ứng với những loại hình đơn giản và thường gặp.

Đoạn AB cố định

Ta chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Axy :



B thuộc tia Ax

Chuẩn hóa $AB = 1$

$A(0; 0)$

$B(1; 0)$

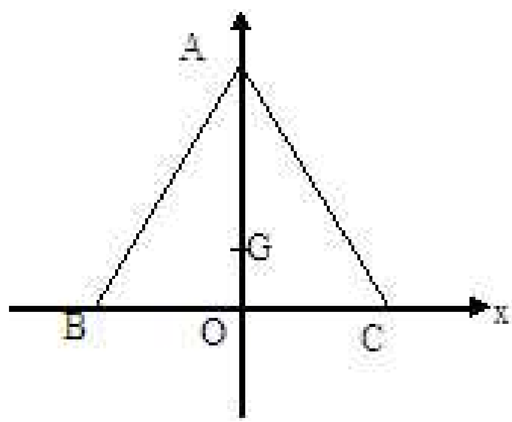
Hoặc chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Ixy. Trong đó I là trung điểm đoạn AB. B thuộc tia Ox.

Tam giác cân

* Trường hợp tam giác ABC cân tại A.
Thông thường ta xây dựng hệ trục tọa độ đề các vuông góc như sau:
- Hạ đường cao từ đỉnh của tam giác cân đến cạnh đối diện

$$AO \perp BC$$

- Chọn hệ trục tọa độ đề các vuông góc Oxy trong đó:
+ $O(0;0)$ là gốc tọa độ.
+ Đỉnh C thuộc tia Ox.
+ Đỉnh A thuộc tia Oy
Chuẩn hóa độ dài.



Đặt

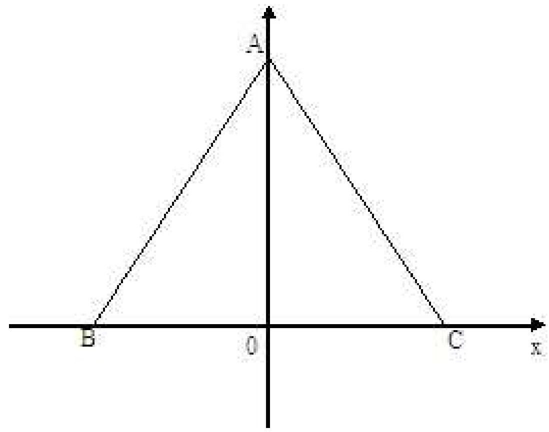
$$\begin{cases} OC = c \\ OA = a \end{cases} \qquad (a, c > 0)$$

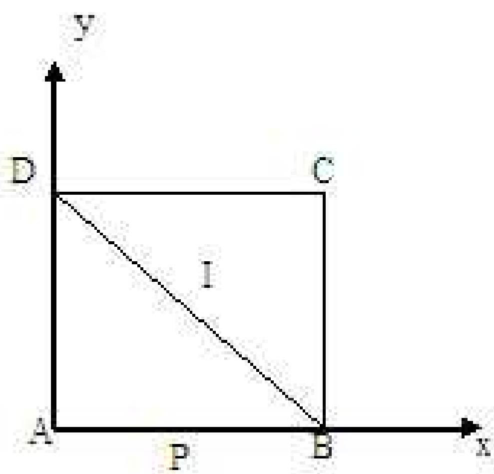
Khi đó ta nhận được $C(c;0)$ $B(-c;0)$ $A(0;a)$ $G(0;\frac{a}{3})$ (G là trọng tâm ΔABC)

Hình vuông $ABCD$

Chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Axy
B thuộc tia Ax
D thuộc tia Ay
Chuẩn hóa độ dài cạnh hình vuông bằng 2
Ta có: $A(0;0)$
$B(2;0)$
$C(2;2)$
$D(0;2)$
Tâm hình vuông $I(1;1)$
Trung điểm cạnh AB là $P(1;0)$

Hình chữ nhật


A
B
0
C
x


y
D
C
I
A
P
B
x

- Chọn một đỉnh của hình chữ nhật làm gốc tọa độ.
- Hai cạnh liên tiếp của hình chữ nhật nằm trên hai trục tọa độ.

* Chuẩn hóa độ dài:

Không mất tính tổng quát, ta đặt chiều dài chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là:

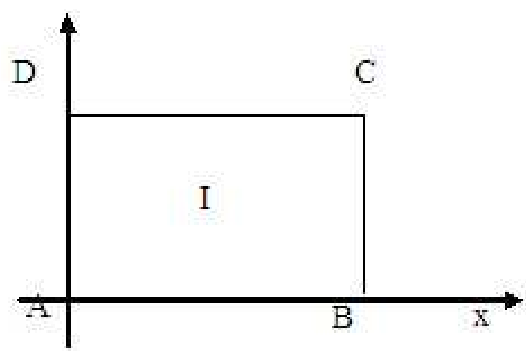
$$2a, 2b (a > b > 0).$$

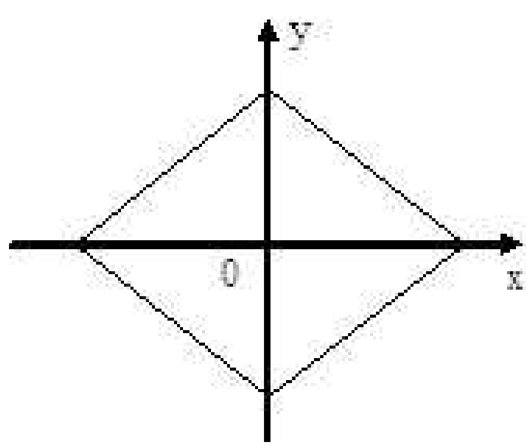
Khi đó ta nhận được những kết quả thật đẹp.

Chẳng hạn: Tâm của hình chữ nhật là $I(a, b)$. Phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật là:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2$$

Hình thoi



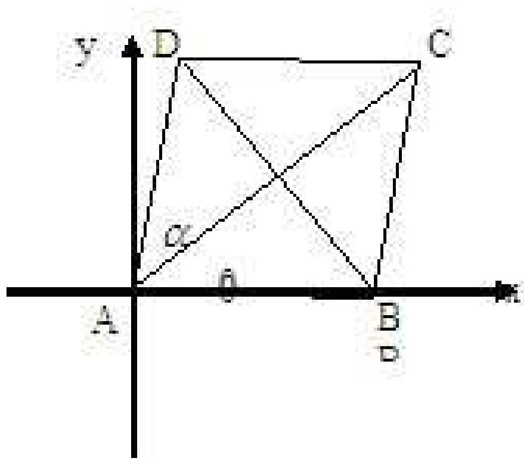


Đường tròn

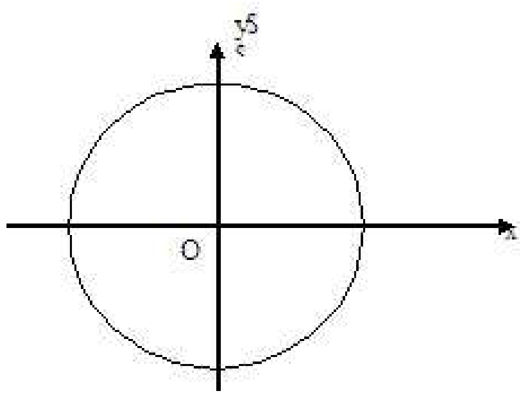
- Chọn tâm đường tròn làm gốc tọa độ.

- Chọn một đường kính làm trục tọa độ.
- Chuẩn hóa độ dài bán kính $R = 1$.
- Ta có phương trình đường tròn.

$$x^2 + y^2 = R^2$$



Hình lục giác đều



- Trong hình lục giác đều, bao giờ ta cũng chỉ ra được một đường chéo và một cạnh vuông góc với nhau.
- Xét hình lục giác đều $ABCDEF$. Đường chéo AC và cạnh AF vuông góc nhau.
- Chọn hệ trục tọa độ đề các vuông góc Axy trong đó:
+ $A(0;0)$
+ F thuộc tia Ax
+ C thuộc tia Ay
- Chuẩn hóa độ dài:

Để có những tọa độ "đẹp" không mất tính tổng quát, ta chuẩn hóa độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp lục giác đều bằng 2h.

Ta có những tọa độ "thật đẹp": $A(0,0)$

$$B(-h, \sqrt{3}h)$$
$$OA = a\sqrt{3}h$$
$$C(0; 2\sqrt{3}h)$$
$$E(3h; \sqrt{3}h)$$

Các loại hình khác

* Điều quan trọng cần nhận rõ rằng với nhiều loại hình, ta không nhất thiết phải chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc (ta vẫn có thể chọn hệ tọa độ afin).

- Thậm chí có những bài toán ta chỉ cần chọn một trục, trục còn lại không cần quan tâm tới, bài toán vẫn giải tốt.
- Còn hơn thế nữa, trên cùng một loại hình, ta có thể lựa chọn những hệ trục tọa độ khác nhau, nhưng vẫn đem lại kết quả như nhau.
- Những điều trên được trình bày trong phần bài tập minh họa.
- Như vậy việc chọn trục tọa độ không bị "gò bó", "cứng nhắc", đây lại là một ưu điểm nữa của giải pháp sử dụng công cụ tọa độ.

Những kiến thức thiết yếu trong sử dụng công cụ tọa độ

* Với việc hình thành hệ trục tọa độ trong mặt phẳng, ta giải các bài toán thường gặp sau đây bằng sử dụng công cụ tọa độ.

Bài toán: Tìm quỹ tích điểm M

Ta thực hiện như sau:

- Gọi tọa độ điểm $M(x; y)$.
- Dựa vào tính chất của điểm M có trong giả thiết, ta tính được:

$$\begin{cases} x = h(m) \\ y = g(m) \end{cases}$$

với m là tham số thực

- Khử tham số m, ta nhận được phương trình dạng $y = f(x)$.
- Khi đó, căn cứ vào điều kiện ràng buộc của tham số m ta giới hạn được quỹ tích điểm M (nếu có).

* Trường hợp, một trong hai thành phần tọa độ không phụ thuộc vào tham số m thì quỹ tích điểm M là đường thẳng nằm ngang hoặc thẳng đứng.

- Công đoạn còn lại: giới hạn quỹ tích.

Bài toán : Chứng minh đường thẳng (d) đi qua một điểm cố định

Để chứng minh đường thẳng (d) đi qua một điểm cố định ta thực hiện các bước sau:

- Viết phương trình đường thẳng (d). (Phụ thuộc vào tham số thực m)
- Biến đổi phương trình đường thẳng (d) về dạng:

$$f(x, y).m + g(x, y) = 0, \forall m \in R$$

- Tọa độ điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua khi m thay đổi là nghiệm của hệ phương trình.

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được tọa độ điểm cố định.

Bài toán: Chứng minh đường thẳng (Δ) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định

- Viết phương trình đường thẳng (Δ) (Phụ thuộc tham số thực m).
- Xác định một đường tròn (C) cố định có tâm I, bán kính R.
- Chứng minh $d(I, \Delta) = R$

Bài toán: Chứng minh điểm M di động trên một đường cố định

Để chứng minh điểm M di động trên một đường cố định, thông thường ta định hướng giải như sau:

- Viết phương trình hai đường thẳng di động đi qua điểm M.
- Giải hệ phương trình ta tọa độ giao điểm $M(x,y)$ với

$$\begin{cases} x = g(m) \\ y = f(m) \end{cases}$$

- Khử giá trị tham số m ta nhận được phương trình đường cố định là:

$$y = f(x)$$

Bài toán: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

-Ta vận dụng biểu thức tọa độ của tích vô hướng.

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

Bài toán: Chứng minh 3 điểm thẳng hàng

- Ta vận dụng điều kiện để 2 véctơ cùng phương.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (h,k) \\ \overrightarrow{AC} = (m,n) \end{cases} \begin{cases} \text{h k} \\ \text{m n} \end{cases}$$

Bài toán: chứng minh hai đường thẳng song song

- Ta vận dụng điều kiện 2 véctơ cùng phương.

Dạng bài: chứng minh hai đường thẳng vuông góc

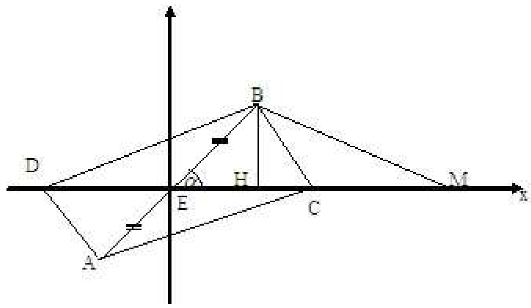
Cho tam giác $ABC.I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, D là trung điểm cạnh AB, E là trọng tâm của tam giác ACD. Chứng minh rằng: Nếu $AB = AC$ thì $IE \perp CD$.

(Đề thi vô địch Anh Quốc)

Cách giải 1: Thuần túy hình học.

- Gọi H và F lần lượt là trung điểm các cạnh BC và AC.

- ΔABC cân tại A nên $AH \perp BC$ DF là đường trung bình trong ΔABC nên $DF // BC$ Do đó
$$AH \perp DF \quad (1)$$



- Gọi N là giao điểm của AH và CD.
Ta có: N là trọng tâm ΔABC
Suy ra: $CN = 2ND$
- Gọi M là trung điểm CD
Ta có:

$$\begin{aligned} & MD = MC \\ & \Leftrightarrow MD + MN = MC + MN \\ & \Leftrightarrow (DN + MN) + MN = 2DN \\ & \Leftrightarrow DN = 2MN \\ & \Leftrightarrow \frac{MN}{DN} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Do đó :
$$\frac{ME}{EA} = \frac{MN}{DN} = \frac{1}{2}$$

Suy ra $NE // AD$
- I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC.D$ là trung điểm dây cung AB nên $DI \perp AB$ Suy ra
$$DI \perp NE \quad (2)$$

- Từ (1) và (2) suy ra : I là trực tâm ΔDEN Do đó $EI \perp CD$ (điều phải chứng minh)

Cách giải 2: Vận dụng công cụ véc tơ.
Xét tích vô hướng $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{CD}$
Ta có:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AE})(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD})\\
&= \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BD}\\
&= 0 + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI})\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CB} - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE})\overrightarrow{BD} \text{ (Vì } AI\perp CB)\\
&= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DI}.\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BD}\\
&= -\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BD} \text{ (Vì } DI\perp BD)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CB}\\
&= (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB})\overrightarrow{DE} - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE})\overrightarrow{CB}\\
&= \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{CB}\\
&= \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}\\
&= -\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})\\
&= -\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})\\
&= -\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})\left[\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AD}\right] - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\\
&= -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})\left[\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right] - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\\
&= -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\\
&= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = 0
\end{aligned}$$

Như vậy $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{CD} = 0$ Do đó: $EI\perp CD$ (điều phải chứng minh)
Cách giải 3: Sử dụng công cụ tọa độ.

Gọi O là trung điểm cạnh BC. Đặt

$$\begin{cases} OA = a \\ OC = c \end{cases} \quad (a, c > 0)$$

Chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Oxy sao cho C thuộc tia Ox, A thuộc tia Oy.

Ta có : $O(0,0)$

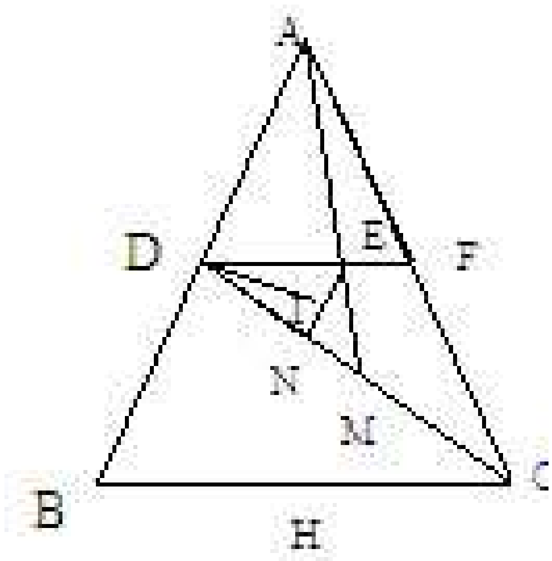
$A(0,a)$
$C(c,0)$
$B(-c,0)$
D là trung điểm cạnh AB nên $D\left(\dfrac{-c}{2},\dfrac{a}{2}\right)$
E là trọng tâm ΔACD nên $E\left(\dfrac{c}{6},\dfrac{a}{2}\right)$
ΔABC cân tại A nên tâm đường tròn ngoại tiếp $I\in OA$. Do đó $I(0,y), y>0$

$$\overrightarrow{DI}=\left(\frac{c}{2},y-\frac{a}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{BA}=(c,a)$$

Do đó, ta có:

$$\overrightarrow{EI}=\left(\frac{-c}{6},y-\frac{a}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{CD}=\left(\frac{-3c}{2},\frac{a}{2}\right)$$

Vì D là trung điểm dây AB nên $DI\perp BA$



Suy ra

$$\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{BA}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{c}{2}.c+\left(y-\frac{a}{2}\right)a=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{2}+ay-\frac{a^2}{2}=0 \qquad (3)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{CD} &= \frac{-c}{6}.\left(\frac{-3c}{2}\right) + \left(y - \frac{a}{2}\right)\frac{a}{2}\\ &= \frac{c^2}{4} + \frac{ay}{2} - \frac{a^2}{4}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{2} + ay - \frac{a^2}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}.(0) = 0 \quad \text{(do đẳng thức (3)}\end{aligned}$$

Suy ra $EI \perp CD$ (điều phải chứng minh).

* Vài điều trao đổi về 3 cách giải đã trình bày:

- Nhận xét cách giải 1:

Ta cần phát hiện tỷ lệ $\frac{ME}{EA} = \frac{MN}{DN} = \frac{1}{2}$

Với cách giải này yêu cầu người giải phải có "nhãn quan" hình học, nhạy bén, nắm chắc nhiều phương hướng chứng minh. Cách giải này tương đối phức tạp.

- Nhận xét cách giải 2:

Với cách giải này người giải phải có kỹ năng biến đổi véctơ đến mức "uyên thâm".

- Nhận xét cách giải 3:

Với việc chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Oxy, việc chứng minh $EI \perp CD$, được định hướng rõ ràng, đơn giản dựa theo biểu thức tọa độ của tích vô hướng.

Dạng bài: chứng minh đẳng thức liên quan đến độ dài đoạn thẳng

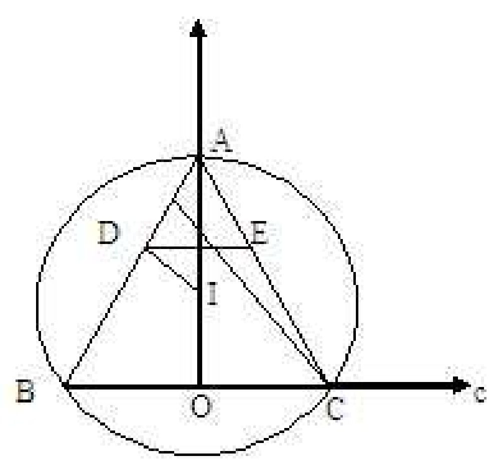
Trong tam giác ABC góc $\widehat{ACB} = 60^0 . D, E, F$ là các điểm tương ứng nằm trên các cạnh BC, AB, AC. Gọi M là giao điểm của AD và BF.

Giả sử $CDEF$ là hình thoi.

Chứng minh rằng: $DF^2 = DM.DA$.

(Đề thi chọn đội tuyển Quốc gia Singapore)

Cách giải 1: Sử dụng tam giác đồng dạng.



Ta có: $CDEF$ là hình thoi nên:

$$\begin{cases} DE//CA \\ CB//FE \end{cases}$$

Suy ra:

$$\begin{cases} \widehat{BED} = \widehat{EAF} \\ \widehat{BCA} = \widehat{BDE} = \widehat{\text{EFA}} \end{cases}$$

Do đó: $\Delta DEB \sim \Delta FAE$ Từ đó ta được:

$$\frac{DB}{DE} = \frac{FE}{FA} \tag{4}$$

Hình thoi $CDEF$ có góc $\widehat{\text{DCF}} = 60^0$ Suy ra: ΔCDF là tam giác đều. Do đó:

$$DE = FE = DF \tag{5}$$

Từ (4) và (5) suy ra:

$$\frac{DB}{DF} = \frac{DF}{FA} \tag{6}$$

Mặt khác:

$$\widehat{BDF} = \widehat{DFA} = 120^0 \tag{7}$$

Từ (6) và (7) suy ra: $\Delta BDF \sim \Delta DFA$
Do đó: $\widehat{DFB} = \widehat{FAD}$
Xét hai tam giác DMF và tam giác DFA
Có

$$\begin{cases} \widehat{FDM} chung \\ \widehat{DFB} = \widehat{FAD} \end{cases}$$

Nên $\Delta DMF \sim \Delta DFA$
Do đó: $\dfrac{DF}{DM} = \dfrac{DA}{DF}$
$\Leftrightarrow DF^2 = DM.DA$ (điều phải chứng minh)

Cách giải 2: Sử dụng công cụ tọa độ.
Không mất tính tổng quát. Ta đặt:

$$\begin{cases} CF = 1 \\ CA = a \end{cases} \quad (a > 1)$$

Chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Cxy sao cho A thuộc tia Cx.
Ta có: $C(0,0)$
$F(1,0)$
$A(a,0)$
$D\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (Do ΔCDF là tam giác đều)

$E\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Phương trình đường thẳng CD :

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{3x} - y = 0$$

Phương trình đường thẳng AE :

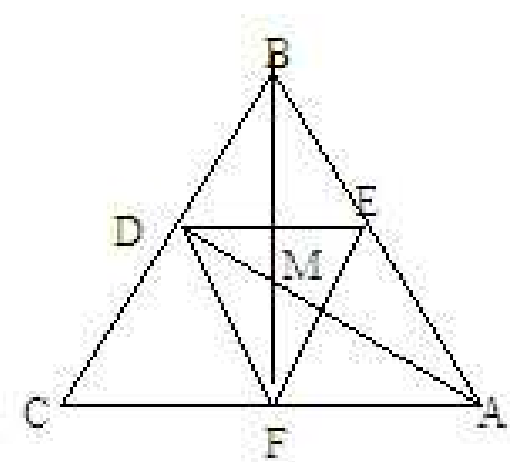
$$\frac{x-a}{\frac{3}{2}-a} = \frac{y}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}x + (2a-3)y - \sqrt{3}a = 0$$

Tọa độ giao điểm B là nghiệm của hệ phương trình.

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - y = 0 \\ \sqrt{3}x + (2a-3)y - \sqrt{3}a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2(a-1)} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}a}{2(a-1)} \end{cases}$$



Do đó, ta có:

$$B\left(\frac{a}{2(a-1)}; \frac{\sqrt{3}a}{2(a-1)}\right)$$

Phương trình đường thẳng AD :

$$\frac{x-a}{\dfrac{1}{2}-a} = \frac{y}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3}x + (2a-1)y - a\sqrt{3} = 0$$

Phương trình đường thẳng BF :

$$\frac{x-1}{\dfrac{2-a}{2(a-1)}} = \frac{y}{\dfrac{\sqrt{3}a}{2(a-1)}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3}ax + (a-2)y - \sqrt{3}a = 0$$

Tọa độ giao điểm M là nghiệm của hệ phương trình.

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + (2a-1)y - a\sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{3}ax + (a-2)y - \sqrt{3}a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a(a+1)}{2(a^2-a+1)} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}a(a-1)}{2(a^2-a+1)} \end{cases}$$

Do đó, ta có:

$$M\left(\frac{a(a+1)}{2(a^2-a+1)}, \frac{\sqrt{3}a(a-1)}{2(a^2-a+1)}\right)$$

Ta có: $DF^2 = 1$

$$DA^2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 - a + 1$$

$$DM^2 = \left[\frac{a(a+1)}{2(a^2-a+1)} - \frac{1}{2}\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{3}a(a-1)}{2(a^2-a+1)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2 = \frac{1}{a^2-a+1}$$

Suy ra:

$$DM^2.DA^2 = 1 \Leftrightarrow DM.DA = 1$$

Vậy:

$$DF^2 = DM.DA$$

* Vài điều trao đổi về 2 cách giải đã trình bày:

- Nhận xét cách giải 1:

Ở cách giải này cần phải chứng tỏ được 3 cặp tam giác đồng dạng $\Delta DEB \sim \Delta FAE$; $\Delta BDF \sim \Delta DFA$; $\Delta DMF \sim \Delta DFA$.

Việc làm này khá "lòng vòng".

- Nhận xét cách giải 2:

Với việc chọn hệ trục tọa độ Đề các Cxy, ta dễ dàng chỉ ra tọa độ các điểm D, F, A.

Công việc còn lại là xác định tọa độ điểm M, sau đó sử dụng công thức tính độ dài đoạn thẳng.

Cách giải này khá "chân phương" và rõ ràng về đường lối.

Dạng bài: - CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH. - TÌM QUỸ TÍCH TRUNG ĐIỂM ĐOẠN THẲNG.

Cho một điểm M nằm tùy ý trên đoạn thẳng AB. Dựng các hình vuông $AMCD$ và $MBEF$ về cùng một phía với AB. Các đường tròn tâm P và Q lần lượt ngoại tiếp hai hình vuông $AMCD$ và $MBEF$ cắt nhau tại M và N.

1/ Chứng minh AF và BC cắt nhau tại N.

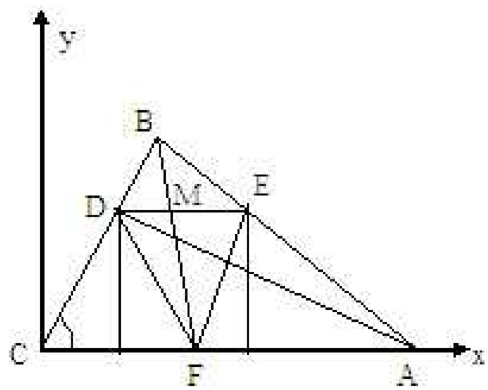
2/ Chứng minh đường thẳng MN đi qua 1 điểm cố định.

3/ Tìm quỹ tích trung điểm của PQ khi M thay đổi

(Đề thi vô địch Toán quốc tế)

Cách giải 1: Thuần túy hình học.

1. Chứng minh AF và BC cắt nhau tại N :



- Gọi K là giao điểm của AC và BF Ta có: $\widehat{KAM} = \widehat{KBM} = 45^o$

Suy ra :

$$AK \perp BF \tag{8}$$

Mặt khác

$$CM \perp AB \tag{9}$$

Từ (8) và (9) ta được F là trực tâm của ΔABC.

Do đó : $AF \perp BC$

- Gọi N' là giao điểm của AF và BC

Ta có $\widehat{AN'C} = 90^o = \widehat{AMC}$

Suy ra 4 điểm N', C, A, M cùng nằm trên một đường tròn. Do đó N' nằm trên đường tròn tâm P.

Tương tự $\widehat{BN'F} = 90^o = \widehat{\text{BEF}}$

Suy ra 4 điểm N', B, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

Do đó N' nằm trên đường tròn tâm Q. Như vậy N' là điểm chung của 2 đường tròn tâm P và Q.

Mà AF và BC không đi qua điểm M.

Do đó $N' \equiv N$

Vật AF và BC cắt nhau tại N

2/ Chứng minh đường thẳng MN đi qua 1 điểm cố định:

- Theo chứng minh trên, ta có $AF \perp BC$ tại N. Tức là $\widehat{ANB} = 90^o$

Suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác ANB là đường tròn cố định có đường kính AB.

Gọi S là giao điểm của đường trung trực đoạn AB với phần cung AB không chứa điểm N . Ta có S là điểm cố định.

- Ta có $\widehat{ANM} = \widehat{ACM} = 45^o$

Suy ra $\widehat{MNB} = \widehat{ANB} - \widehat{ANM} = 90^o - 45^o = 45^o$

Do đó: $\widehat{MNB} = \widehat{ANM} = 45^o$

Từ điều này khẳng định rằng đường thẳng MN đi qua điểm cố định S.

3/ Tìm quỹ tích trung điểm của PQ khi M thay đổi:

- Gọi K là giao điểm của AC và BF.

Ta có

$$\widehat{KPM} = \widehat{MQK} = \widehat{PMQ} = 90^o$$

nên $KPMQ$ là hình chữ nhật.

Gọi I là giao điểm của 2 đường chéo của hình chữ nhật $KPMQ$. I chính là trung điểm của PQ và KM.

- Tam giác KAB có: $\widehat{KAB} = \widehat{KBA} = 45^o$ nên ΔKAB vuông cân tại K, mà AB cố định nên K cố định.

- Gọi O và T lần lượt là trung điểm của KA và KB.

- Ta có : O và T cố định

- Ta có $OI//AM$

$IT//MB$

Mà 3 điểm A, M, B thẳng hàng nên 3 điểm O, I, T thẳng hàng.

Vì M di động trên đoạn thẳng AB ($M \neq A, M \neq B$) nên I di động trên đoạn thẳng OT ($I \neq O, I \neq T$) Vậy quỹ tích trung điểm I của PQ là đoạn thẳng OT (trừ 2 điểm O và T).

Cách giải 2: Sử dụng công cụ tọa độ.

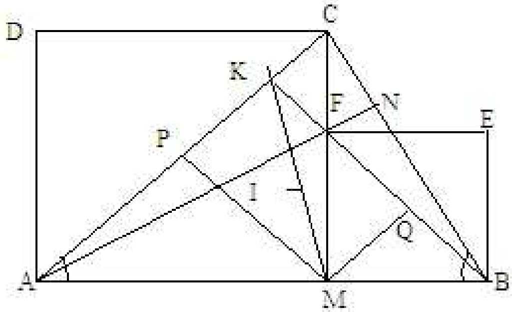
Chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Axy sao cho :

$$\begin{cases} B \in \text{Ax} \\ D \in Ay \end{cases}$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $AB = 1$.

Đặt $AM = m, 0 < m < 1$

Khi đó, ta có:$A(0,0)$ $B(1,0)$ $M(m,0)$ $C(m,m)$ $F(m,1-m)$ $E(1,1-m)$ $P\left(\frac{m}{2};\frac{m}{2}\right)$ $Q\left(\frac{m+1}{2};\frac{1-m}{2}\right)$ $D(0,m)$



1/ Chứng minh AF và BC cắt nhau tại N :

Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AF}} = (m, 1-m) \\ \overrightarrow{BC} = (m-1, m) \end{cases}$$

Suy ra:

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}.\overrightarrow{BC} = m(m-1) + (1-m)m = m^2 - m + m - m^2 = 0$$

Do đó $AF \perp BC$ - Gọi N' là giao điểm của AF và BC Ta có $\widehat{AN'C} = 90^o = \widehat{AMC}$

Suy ra 4 điểm N', C, A, M cùng nằm trên một đường tròn. Do đó N' nằm trên đường tròn tâm P.

Tương tự $\widehat{BN'F} = 90^o = \widehat{B\mathrm{EF}}$

Suy ra 4 điểm B, N', E, F cùng nằm trên một đường tròn.

Do đó N ' nằm trên đường tròn tâm Q. Như vậy N' là điểm chung của 2 đường tròn tâm P và Q.

Mà AF và BC không đi qua điểm M.

Do đó $N' \equiv N$

Vật AF và BC cắt nhau tại N

2. Chứng minh đường thẳng MN đi qua 1 điểm cố định:

Do hai đường tròn tâm P và Q cắt nhau tại M, N nên $MN \perp PQ$

Suy ra $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1-2m}{2}\right)$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng MN.

Do đó phương trình đường thẳng MN là:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(x-m) + \frac{1-2m}{2}(y-0) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + (1-2m)\,y - m = 0 \end{aligned}$$

Giả sử $S(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng MN luôn đi qua khi M di động trên đoạn AB. Ta có :

$$\begin{aligned} &x_o + (1-2m)\,y_o - m = 0, \forall m \in (0,1) \\ &(x_o + y_o) - (1 + 2y_o)\,m = 0 \forall m \in (0,1) \end{aligned}$$

Tọa độ điểm S là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_o + y_o = 0 \\ 1 + 2y_o = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = \dfrac{1}{2} \\ y_o = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

Kết luận: Đường thẳng MN đi qua điểm cố định $S\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{2}\right)$

3/ Tìm quỹ tích trung điểm của PQ khi M thay đổi
Gọi $I(x, y)$ là trung điểm của PQ Ta có:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_P + x_Q}{2} = \dfrac{2m+1}{4} \\ y = \dfrac{y_P + y_Q}{2} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Ta có

$$x = \frac{2m+1}{4} \Leftrightarrow m = \frac{4x-1}{2}$$

Mà $0 < m < 1$ Nên $0 < \dfrac{4x-1}{2} < 1 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{3}{4}$ Kết luận: Quĩ tích trung điểm của PQ là đoạn thẳng nằm trên đường thẳng có phương trình là: $y = \dfrac{1}{4}$, đoạn thẳng này song song với AB và giới hạn bởi $0 < x < \dfrac{3}{4}$.

* Vài điều trao đổi về 2 cách giải đã trình bày:

- Nhận xét cách giải 1:

Để chứng minh đường thẳng MN đi qua 1 điểm cố định, ta phải chỉ ra giao điểm S của đường trung trực đoạn AB với phần cung AB (không chứa điểm N) là một điểm cố định, hơn thế nữa còn phải chứng tỏ được $\widehat{MNB} = \widehat{ANM}$

Những điều trên dù không phức tạp tuy nhiên khó định hướng.

- Nhận xét cách giải 2:

+ Việc giải các bài toán:

. Chứng minh đường thẳng đi qua điểm cố định, tìm quỹ tích trung điểm đoạn thẳng, bằng cách sử dụng công cụ tọa độ bao giờ cũng thuận lợi hơn, bởi các bước thực hiện được định hướng bài bản, rõ ràng (điều này đã trình bày trong phần kiến thức thiết yếu).

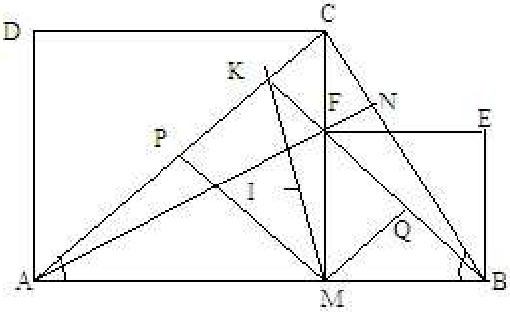
Bài toán minh họa 2 cách trục tọa độ khác nhau

Cho tam giác ABC và D là chân đường cao hạ từ A. Gọi E và F là các điểm nằm trên đường thẳng qua D sao cho $AE \perp BE$, $AF \perp CF$ và E, F không trùng D.

Giả sử M và N là các trung điểm tương ứng của BC và EF. Chứng minh rằng $AN \perp NM$.

(Olympic Châu Á Thái Bình Dương lần thứ 10)

Bài giải:



Cách giải 1: Sử dụng tam giác đồng dạng.

Ta có: $\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = 90^0$ nên tứ giác $AEDB$ nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC} \text{ (Cùng bù với } \widehat{AED}) \qquad (10)$$

$$\widehat{AFC} + \widehat{ADC} = 90^0 + 90^0 = 180^0$$

nên tứ giác ADCF nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACB} \qquad (11)$$

Từ (10) và (11) ta suy ra:

$$\Delta AEF \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{BC}} = \frac{2EN}{2BM} = \frac{EN}{BM} \qquad (12)$$

Từ (10) và (12) ta suy ra: $\Delta AEN \sim \Delta ABM$

$$\Rightarrow \widehat{ANE} = \widehat{AMB} \Rightarrow \text{ tứ giác } ANMD \text{ nội tiếp.}$$
$$\Rightarrow \widehat{ANM} + \widehat{ADM} = 180^0$$
$$\Rightarrow \widehat{ANM} = 180^0 - 90^0 = 90^0$$
$$\Rightarrow AN \perp NM$$

Cách giải 2: Sử dụng công cụ véc tơ.

Gọi I là giao điểm của AE và CF

J là giao điểm của BE và AF Ta có :

$$\begin{cases} \widehat{\mathrm{AIF}} + \widehat{\mathrm{IAF}} = 90^0 \\ \widehat{\mathrm{AJB}} + \widehat{\mathrm{IAF}} = 90^0 \end{cases}$$

Suy ra: $\widehat{\mathrm{AIF}} = \widehat{\mathrm{AJB}} = \alpha$ (Đặt bằng α) Ta có: $\widehat{\mathrm{ADB}} = \widehat{\mathrm{AEB}} = 90^0$ Nên tứ giác $ABDE$ nội tiếp được. Suy ra:

$$\widehat{\mathrm{ABE}} = \widehat{\mathrm{ADE}} \qquad (13)$$

Ta có:

$$\widehat{\mathrm{ADC}} = \widehat{\mathrm{AFC}} = 90^0$$

Nên tứ giác $ADCF$ nội tiếp được. Suy ra:

$$\widehat{\text{ACF}} = \widehat{\text{ADE}} \tag{14}$$

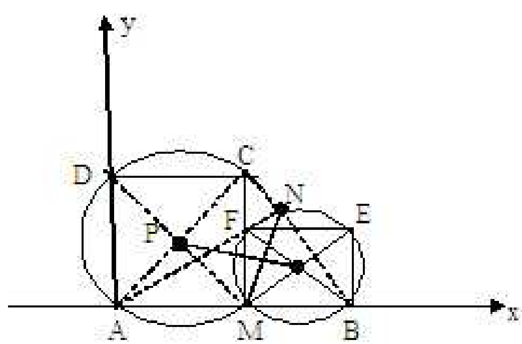
Từ (13) và (14) suy ra: $\widehat{\text{ABE}} = \widehat{\text{ACF}}$ Do đó: $\Delta ABE \sim \Delta ACF$ Từ đó, ta có:

$$\frac{AE}{\text{AF}} = \frac{BE}{CF} \Leftrightarrow AE.CF = \text{AF .BE} \tag{15}$$

Xét tích vô hướng $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MN}$
Ta có:

$$\begin{aligned}
4\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MN} &= \left(2\overrightarrow{AN}\right)\left(2\overrightarrow{MN}\right) \\
&= \left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{\text{AF}}\right)\left(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}\right) \\
&= \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CF} \\
&= 0 + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BE} + 0 \\
&= -AE.CF \cos\widehat{\text{AIF}} + \text{AF.BE} \cos\widehat{\text{AJB}} \\
&= \cos\alpha(\text{AF.BE - AE.CF}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Do đó: AN⊥MN



Cách giải 3: Sử dụng công cụ tọa độ

Đặt

$$\begin{cases} DA = a \\ DB = b \\ DC = c \end{cases} \qquad (a, b, c > 0)$$

Chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Dxy, sao cho C thuộc tia Ox, A thuộc tia Oy.

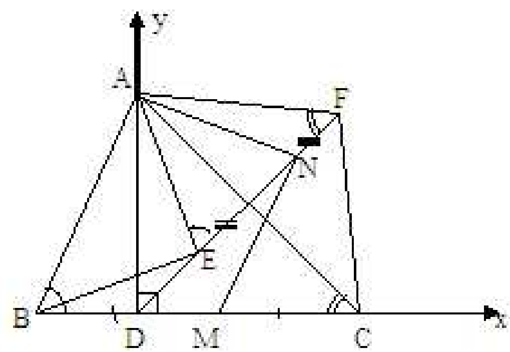
Ta có: $D(0,0)$
$A(0,a)$
$B(-b,0)$
$C(c,0)$
$E(x,y) \quad (x \neq 0, y \neq 0)$
$F(m,n) \quad (m \neq 0, n \neq 0)$
Suy ra: $M\left(\dfrac{c-b}{2}, 0\right)$

$$N\left(\frac{x+m}{2}, \frac{y+n}{2}\right)$$

Ta có :

$$\overrightarrow{AE} = (x, y-a)$$

$$\overrightarrow{BE} = (x+b, y)$$



Theo giả thiết:

$$\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BE} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BE} = 0 \Leftrightarrow x(x+b) + y(y-a) = 0 \tag{16}$$

$$\overrightarrow{\text{AF}} = (m, n-a)$$

$$\overrightarrow{\text{CF}} = (m-c, n)$$

Theo giả thiết

$$\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{CF} \Leftrightarrow \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CF} = 0 \Leftrightarrow m(m-c) + n(n-a) = 0 \tag{17}$$

Ta có:

$$\overrightarrow{DE} = (x, y)$$

$$\overrightarrow{DF} = (m, n)$$

Do 3 điểm D, E, F thẳng hàng. Nên

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} \Leftrightarrow xn = ym \tag{18}$$

Từ (16) ,(17), (18) ta được.

$$\begin{cases} m(x+b) + n(y-a) = 0 \\ x(m-c) + y(n-a) = 0 \end{cases} \tag{19}$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AN} = \left(\frac{x+m}{2}; \frac{y+n-2a}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{x+m-c+b}{2}; \frac{y+n}{2}\right)$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MN} &= (x+m)(x+m-c+b) + (y+n)(y+n-2a) \\ &= x(x+b) + y(y-a) + m(m-c) + n(n-a) + m(x+b) \\ &+ n(y-a) + x(m-c) + y(n-a) \end{aligned} \tag{20}$$

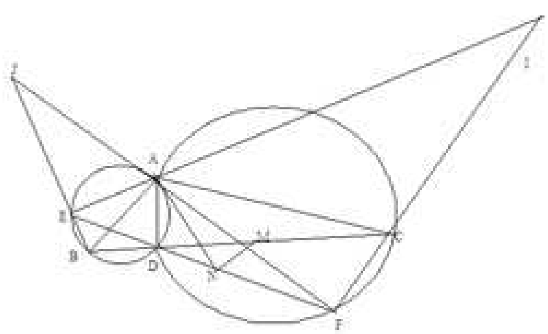
Từ (16) ,(17), (18), (20) suy ra: $4\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MN} = 0$ Do đó: $AN \perp MN$

Cách giải 4: * Cách chọn hệ trục tọa độ khác: Với cùng cách giải sử dụng công cụ tọa độ. - Ta có thể chọn hệ trục tọa độ Đề các "thoáng" hơn, mà vẫn giải bài toán rất nhanh. Chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Axy, sao cho $Ax // EF$. Ta có:$A(0,0)$

$D(d, h)$

$E(e, h)$

$F(f, h)$



- N là trung điểm đoạn EF nên $N\left(\frac{e+f}{2}, h\right)$.

- Viết phương trình các đường thẳng BE và BC. Suy ra $B\left(d+e, \frac{h-df}{h}\right)$

- Viết phương trình các đường thẳng CF và BC. Suy ra $C\left(d+f, \dfrac{h-df}{h}\right)$

- M là trung điểm đoạn BC nên ta xác định được tọa độ điểm M. - Từ đó tính được tích các hệ số góc của 2 đường thẳng AN và MN bằng -1. Kết luận: $AN \perp MN$

* Vài điều trao đổi về 4 cách giải đã trình bày:

- Nhận xét cách giải 1:

Từ sự phát hiện các cặp tam giác đồng dạng $\Delta AEF \sim \Delta ABC$, $\Delta AEN \sim \Delta ABM$.

Ta chứng minh được tứ giác $ANMD$ nội tiếp. Đây là điểm then chốt trong cách giải bài toán.

- Nhận xét cách giải 2:

Sự kết hợp giữa tính chất hình học thuần túy và các phép biến đổi trên véctơ, là một điểm "không mạnh" của học sinh.

- Nhận xét cách giải 3:

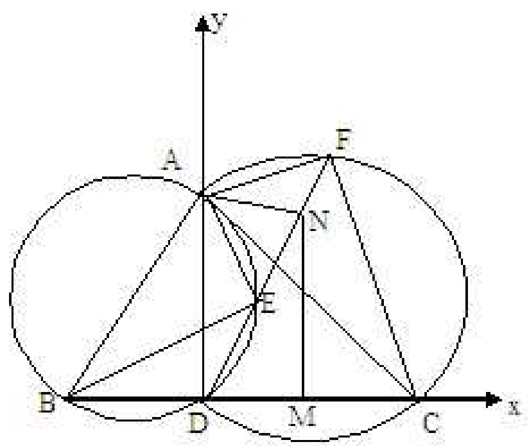
Với việc chọn hệ trục tọa độ Dxy cho ta những tọa độ đẹp, phần việc còn lại là xác định được tọa độ của 2 véctơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{MN}$, tuy nhiên tính toán "nặng".

- Nhận xét cách giải 4:

Với cách chọn hệ trục tọa độ như trên, ta không quan tâm đến sự "có mặt" của trục tung. Bài toán vẫn giải với kết quả chính xác. Đây lại là một ưu điểm nữa của giải pháp sử dụng công cụ tọa độ.

Dạng bài : Xác định vị trí của điểm

Cho tam giác đều ABC, M là trung điểm của cạnh AC, N là điểm sao cho $\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Xác định vị trí điểm I trên đường thẳng BC sao cho $\widehat{INM} = 90^0$.



Cách giải 1: Thuần túy hình học.

Đặt $AB = BC = CA = a$ Kẻ $ME \perp AB$ ta có: $ME = AM.\sin 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

$$NE = \frac{a}{3} - \frac{a}{4} = \frac{a}{12}$$

$$AE = AM.\cos 60^0 = \frac{a}{4}$$

$$MN = \sqrt{ME^2 + NE^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - \frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{6}$$

$AE < AN \left(\frac{a}{4} < \frac{a}{3}\right)$ nên E nằm giữa A và N.

$$\Rightarrow \widehat{ANM} < 90^0 \Rightarrow 180^0 - \widehat{ANM} > 180^0 - 90^0$$
$$\Rightarrow \widehat{BNM} > 90^0$$

Trên nửa mặt phẳng bờ MN chứa đoạn BC có $\widehat{MNI} < \widehat{MNB}$ nên tia NI nằm giữa tia NM và tia $NB \Rightarrow I$ nằm giữa B và C.

Ta có: $\widehat{BNI} = \widehat{NME}$ (cùng phụ với $\widehat{ENM}$) Do đó sin

$$\widehat{BNI} = \sin\widehat{NME} = \frac{NE}{NM} = \frac{\frac{a}{12}}{\frac{a\sqrt{7}}{6}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

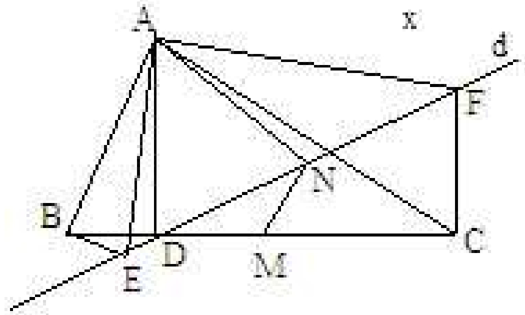
$$\cos\widehat{BNI} = \cos\widehat{NME} = \frac{ME}{MN} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{a\sqrt{7}}{6}} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$$

$$\frac{BI}{\sin\widehat{BNI}} = \frac{BN}{\sin\widehat{NIB}} \Rightarrow \frac{BI}{\frac{\sqrt{7}}{14}} = \frac{\frac{2}{3}a}{\sin(\widehat{NBI} + \widehat{BNI})}$$
$$\Rightarrow \frac{BI}{\frac{\sqrt{7}}{14}} = \frac{\frac{2}{3}a}{\sin 60^0.\cos BNI + \sin BNI \cos 60^0}$$
$$\Rightarrow \frac{BI}{\frac{\sqrt{7}}{14}} = \frac{\frac{2}{3}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{3\sqrt{21}}{14} + \frac{\sqrt{7}}{14}.\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow BI = \frac{2}{15}a$$

Vậy I nằm trên đoạn BC và cách B một khoảng bằng $\frac{2}{15}BC$.

Cách giải 2: Sử dụng công cụ tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Oxy (với O là trung điểm BC).



Đặt: $AB = BC = CA = 2a \quad (a > 0)$ Tọa độ các điểm: $O(0;0)$
$C(a;0)$
$B(-a;0)$

$$OA = AC.\sin 60^\circ = 2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow A(0;a\sqrt{3})$$

Vì M là trung điểm $AC \Rightarrow M(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2})$

$$AN = \frac{1}{3}AB \Rightarrow N\left(-\frac{a}{3};\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)$$

Ta có:

$$I \in \text{Ox} \;\Rightarrow\; \text{I (x ; 0)}$$

$$\overrightarrow{MN}\left(-\frac{5a}{6};\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$\overrightarrow{IN}\left(-\frac{a}{3}-x;\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} MN \perp NI &\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{IN} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{5a}{6}\left(\frac{a}{3}+x\right) + \frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{2a\sqrt{3}}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{5a^2}{18} + \frac{5ax}{6} + \frac{a^2}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-11}{15}a \end{aligned}$$

Vậy

$$I\left(\frac{-11}{15}a;0\right) \Rightarrow \overrightarrow{BI}\left(\frac{4}{15}a;0\right)$$

$$\overrightarrow{BC}\,(2a;0) \Rightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{2}{15}\overrightarrow{BC}$$

I xác định bởi: $\overrightarrow{BI} = \dfrac{2}{15}\overrightarrow{BC}$.

* Vài điều trao đổi về 2 cách giải đã trình bày:

- Nhận xét cách giải 1:

Để xác định được vị trí điểm I, trước hết ta phải chỉ ra rằng: điểm I nằm giữa B và C. Sau đó tính độ dài đoạn BI, các bước tính toán khá phức tạp.

- Nhận xét cách giải 2:

Với cách giải này ta chỉ cần tìm tọa độ điểm I, dựa theo biểu thức tọa độ của tích vô hướng, của 2 véctơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{IN}$, điều nầy được thực hiện khá đơn giản.

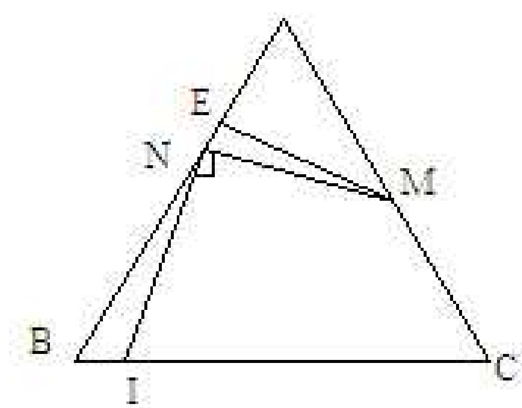
Dạng bài: chứng minh hai đường thẳng song song

Cho tam giác ABC đều, lấy M tùy ý trên cạnh BC Gọi R là điểm đối xứng của M qua AB.

P là điểm đối xứng của M qua AC. Gọi Q là đỉnh thứ 4 của hình bình hành $RMPQ$. Chứng minh $AQ//BC$.

Đề thi Olympic 30/4

Cách giải 1: Thuần túy hình học.



Gọi E, F lần lượt là giao của AB và MR, AC và MP. Gọi K là giao điểm của RQ và AB khi đó ta có: ΔKRM cân tại K. Lại có $\widehat{KRM} = \widehat{BAC} = 60^0$ (cùng bù với $\widehat{RMP}$ vì $RQPM$ là hình bình hành và $AEMF$ là tứ giác nội tiếp do $\widehat{AEM} + \widehat{\mathrm{AFM}} = 180^0$). Do đó ΔKRM là tam giác đều.

$$\Rightarrow \widehat{\mathrm{KMR}} = 60^0$$

$$\begin{aligned}\widehat{KMP} &= \widehat{RMP} - \widehat{KMR} = (180^0 - \widehat{BAC}) - \widehat{KMR}\\ &= 180^0 - 60^0 - 60^0\\ &= 60^0\end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned}\widehat{QPM} &= 180^0 - \widehat{RMP}\\ &= 180^0 - (180^0 - 60^0) = 60^\circ\end{aligned}$$

Nên

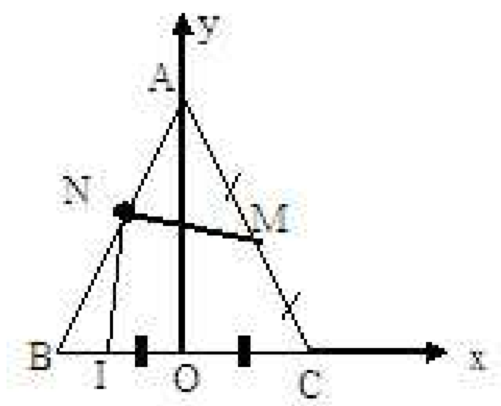
$$\widehat{KMP} = \widehat{QPM}$$

Ta có $KQPM$ là hình thang ($KQ//MP$), lại có $\widehat{KMP} = \widehat{QPM}$ nên $KQPM$ là hình thang cân đáy KQ, MP.

Mặt khác AC vuông góc với MP tại trung điểm MP nên cũng vuông góc với KQ tại trung điểm KQ.

$\Rightarrow$ Tam giác AKQ cân tại A có AC vừa là đường trung trực vừa là đường phân giác. $\Rightarrow \widehat{QAC} = \widehat{KAC} = \widehat{ACB} \Rightarrow AQ//BC$

Cách giải 2: sử dụng công cụ tọa độ



Gọi I là trung điểm BC.

$$H = MR \cap AB$$
$$K = MP \cap AC \quad \widehat{QAC} = \widehat{ACB}$$

Chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Ixy. Đặt:

$$BC = 2a (a > 0)$$
$$IM = m (m > 0)$$

Tọa độ các điểm: $M(-m; 0)$
$C(a; 0)$
$B(-a; 0)$

$A(0; a\sqrt{3})$

Phương trình đường thẳng AB :

$$\frac{x}{-a} = \frac{y - a\sqrt{3}}{-a\sqrt{3}} \Rightarrow x.a\sqrt{3} = ay - a^2\sqrt{3}$$

Giả sử $H(x; y)$ $\overrightarrow{MH}(x + m; y)$; $\overrightarrow{BA}(a; a\sqrt{3})$ Vì

$$\begin{aligned} MH \perp BA \Rightarrow \overrightarrow{MH}\overrightarrow{AB} = 0 &\Leftrightarrow a(x + m) + y.a\sqrt{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow x + y\sqrt{3} = -m \end{aligned}$$

(Phương trình đường thẳng RM).

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ.

$$\begin{cases} -x.a\sqrt{3} + ay = a^2\sqrt{3} \\ x + y\sqrt{3} = -m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x.a\sqrt{3} + ay = a^2\sqrt{3} \\ x.a\sqrt{3} + 3ay = -m.a\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow 4ay = a^2\sqrt{3} - m.a\sqrt{3} \Leftrightarrow 4y = a\sqrt{3} - m\sqrt{3} = \sqrt{3}(a - m) \\ \Leftrightarrow y = \dfrac{\sqrt{3}(a - m)}{4} \\ x = -m - y\sqrt{3} = -m - \dfrac{3(a - m)}{4} = \dfrac{-4m - 3a + 3m}{4} = \dfrac{-(m + 3a)}{4} \end{cases}$$

Vậy

$$H\left(\frac{-(m + 3a)}{4}; \frac{\sqrt{3}(a - m)}{4}\right)$$

Phương trình đường thẳng AC.

$$\frac{a}{x} = \frac{y - a\sqrt{3}}{-a\sqrt{3}} \Rightarrow -x.\sqrt{3} = y - a\sqrt{3}$$

Giả sử $K(x_1; y_1)$.

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{MK}(x_1 + m; y_1) \\ &\overrightarrow{AC}(a; -a\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Vì

$$\begin{aligned} MK \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{MK}.\overrightarrow{AC} = 0 &\Rightarrow (x_1 + m).a - y_1.a\sqrt{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 - y_1.\sqrt{3} = -m \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng MP :

$$x - y\sqrt{3} = -m$$

Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} -x.\sqrt{3} = y - a\sqrt{3} \\ x - y\sqrt{3} = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{3} + y = a\sqrt{3} \\ x\sqrt{3} - 3y = -m\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4y = \sqrt{3}(a+m) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}(a+m)}{4}$$

$$x = y\sqrt{3} - m = \frac{3(a+m)}{4} - m = \frac{3a-m}{4}$$

Vậy

$$K\left(\frac{3a-m}{4}; \frac{\sqrt{3}(a+m)}{4}\right)$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MH} + 2\overrightarrow{MK}$$

$$\overrightarrow{AM}\left(-m; -a\sqrt{3}\right)$$

$$\overrightarrow{MH}\left(\frac{3(m-a)}{4}; \frac{\sqrt{3}(a-m)}{4}\right) \Rightarrow 2\overrightarrow{MH}\left(\frac{3(m-a)}{2}; \frac{\sqrt{3}(a-m)}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{MK}\left(\frac{3(a+m)}{4}; \frac{\sqrt{3}(a+m)}{4}\right) \Rightarrow 2\overrightarrow{MK}\left(\frac{3(a+m)}{2}; \frac{\sqrt{3}(m+a)}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AQ}\,(2m; 0)$$

$$\overrightarrow{BC}(2a; 0)$$

$$\Rightarrow AQ//BC$$

* Vài điều trao đổi về 2 cách giải đã trình bày:

- Nhận xét cách giải 1:

Để chứng minh được $AQ//BC$, ta phải chứng minh $\widehat{QAC} = \widehat{ACB}$. Ý tưởng nầy là đơn giản, tuy nhiên việc thực hiện phải qua nhiều công đoạn.

- Nhận xét cách giải 2:

Với việc chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Ixy, để chứng minh $AQ//BC$, ta chỉ việc xác định tọa độ của 2 véctơ $\overrightarrow{AQ}$ và $\overrightarrow{BC}$.

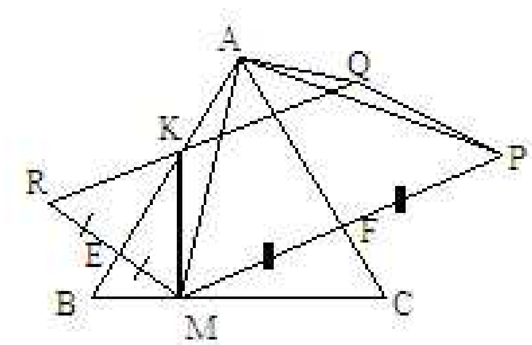
* Một điều không thể không đề cập tới là có những bài toán hình học phẳng, nếu ta giải bằng cách thuần túy truyền thống thì khó thực hiện, trong khi đó giải pháp vận dụng công cụ tọa độ vẫn khả thi.

Sau đây là những bài toán như thế.

Dạng bài: chứng minh 1 điểm di động trên 1 đường cố định

Cho hình vuông $ABCD.E$ là trung điểm $BC.M$ là điểm di động trên cạnh AB. Gọi N, P lần lượt là giao điểm của MD và MC với AE. Gọi H là giao điểm của NC và DP. I là giao điểm của đường trung trực của đoạn thẳng DH với đường thẳng vuông góc với AH tại H. Chứng minh: Khi M di động trên cạnh AB thì I di động trên một đường cố định.

Lời giải:



Chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Axy Chuẩn hóa:$AB = 1, AM = m \quad (0 < m < 1)$ Tọa độ các điểm $A(0;0)$

$B(1;0)$

$C(1;1)$

$D(0;1)$

$E(1;\frac{1}{2})$

$M(m;0)$

Phương trình đường thẳng

$$AE : \frac{x}{1} = \frac{y}{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

Phương trình đường thẳng:

$$MD : \frac{x}{m} = \frac{y-1}{-1} \Rightarrow -x = my - m \Leftrightarrow y = \frac{m-x}{m}$$

$N = MD \cap AE$. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{1}{2}x = \frac{m-x}{m} \Leftrightarrow \qquad x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2m}{m+2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}.\frac{2m}{m+2} = \frac{m}{m+2}$$

Vậy
$$N\left(\frac{2m}{m+2};\frac{m}{m+2}\right)$$
Phương trình đường thẳng MC :
$$\begin{aligned}
&\frac{x-1}{m-1}=\frac{y-1}{-1}\\
\Rightarrow &1-x=y(m-1)-(m-1)\\
\Leftrightarrow &y=\frac{m-x}{m-1}
\end{aligned}$$
$P=MC\cap AE$. Phương trình hoành độ giao điểm:
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}x=\frac{m-x}{m-1}\\
\Leftrightarrow &x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{m-1}\right)=\frac{m}{m-1}\\
\Leftrightarrow &x.\frac{m+1}{2(m-1)}=\frac{m}{m-1}\\
\Rightarrow &x=\frac{2m}{m+1}\\
\Rightarrow &y=\frac{m}{m+1}
\end{aligned}$$
Vậy $P\left(\frac{2m}{m+1};\frac{m}{m+1}\right)$ Phương trình đường thẳng NC :
$$\begin{aligned}
&\frac{x-1}{\frac{2m}{m+2}-1}=\frac{y-1}{\frac{m}{m+2}-1}\\
\Leftrightarrow &x.\frac{-2}{m+2}+\frac{2}{m+2}=y.\frac{m-2}{m+2}+\frac{2-m}{m+2}\\
\Leftrightarrow &x.\frac{-2}{m+2}+\frac{m}{m+2}=y.\frac{m-2}{m+2}\\
\Rightarrow &y=x.\frac{-2}{m-2}+\frac{m}{m-2}
\end{aligned}$$
Phương trình đường thẳng DP
$$\begin{aligned}
&\frac{x}{\frac{2m}{m+1}}=\frac{y-1}{\frac{m}{m+1}-1}\\
\Leftrightarrow &x.\frac{-1}{m+1}=y.\frac{2m}{m+1}-\frac{2m}{m+1}\\
\Leftrightarrow &y=x.\frac{-1}{2m}+1
\end{aligned}$$

$H = NC \cap DP$. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\begin{aligned}
&x.\frac{-1}{2m} + 1 = x.\frac{-2}{m-2} + \frac{m}{m-2} \\
\Leftrightarrow &x\left(\frac{2}{m-2} - \frac{1}{2m}\right) = \frac{2}{m-2} \\
\Leftrightarrow &x.\frac{3m+2}{2m(m-2)} = \frac{2}{m-2} \\
\Leftrightarrow &x = \frac{4m}{3m+2}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow y = x.\frac{-1}{2m} + 1 = \frac{4m}{3m+2}.\frac{-1}{2m} + 1 = \frac{3m}{3m+2}$

Vậy $H\left(\frac{4m}{3m+2}; \frac{3m}{3m+2}\right)$

Ta thấy điểm H luôn thuộc đường thẳng cố định $y = \frac{3}{4}x, D$ là 1 điểm cố định và ta có $ID = IH$. (Vì I thuộc đường trung trực DH) nên I di động trên Parabol cố định nhận đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$ làm đường chuẩn và D là tiêu điểm.

* Vài điều trao đổi về cách giải đã trình bày:

Ý tứ về cách giải sử dụng công cụ tọa độ ở bài toán nầy thật đơn giản và rõ ràng. Do H là giao điểm của NC và DP nên để xác định tọa độ điểm H, ta chỉ việc viết phương trình 2 đường thẳng NC và DP.

Từ kết quả

$$H\left(\frac{4m}{3m+2}, \frac{3m}{3m+2}\right)$$

ta suy ra được điểm H thuộc đường thẳng cố định (d) : $3x - 4y = 0$. Mặt khác: $A \in (d)$

Ta có: $ID = IH = d(I; (d))$. Từ đây có được kết luận bài toán.

Người viết cũng đã thử giải bài toán nầy bằng phương pháp thuần túy hình học, tuy nhiên để có được kết quả "đẹp" như trên là điều không dễ dàng, bởi việc phát hiện ra tiêu điểm và đường chuẩn của Parabol là việc làm không thường xuyên trong hình học thuần túy.

4 Kết luận

* Với việc xử lý các tính chất, quan hệ hình học bằng phép toán đại số, đã làm phong phú hơn "hành trang" của người dạy toán, học toán, bằng một giải pháp mạnh "giải pháp sử dụng công cụ tọa độ".