

TỨ DIỆN

VẤN ĐỀ I: CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC VỀ CHÓP TAM GIÁC

Ví dụ 1: Cho tứ diện ABCD có $AD \perp (ABC)$, $AC = AD = 4\text{cm}$, $AB = 3\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$.
Tính khoảng cách từ A đến (BCD) .

Giải:

$\triangle ABC$ vuông tại A

Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho:

$A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $C(0;4;0)$,

$D(0;0;4)$

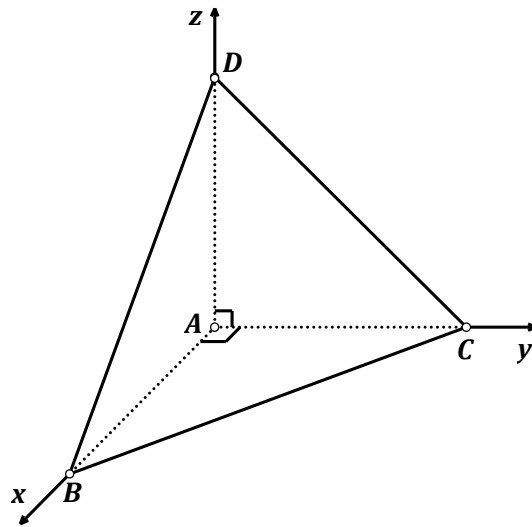
Phương trình mặt phẳng (BCD) :

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x + 3y + 3z - 12 = 0$$

Khoảng cách từ A đến (BCD) .

$$d[A, (BCD)] = \frac{|-12|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 3^2}} = \frac{12}{\sqrt{34}}$$



Ví dụ 2: Cho hình chóp tam giác đều SABC cạnh đáy là a. Gọi M, N là trung điểm SB, SC. Tính theo a diện tích $\triangle AMN$ biết $(AMN) \perp (SBC)$.

Giải:

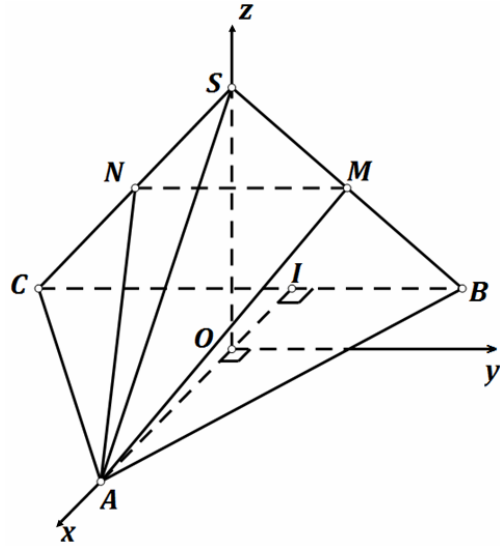
Gọi O là hình chiếu của S trên $(ABC) \Rightarrow O$ là trọng tâm $\triangle ABC$

Gọi I là trung điểm BC

$$\text{Ta có } AI = BC \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}, OI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz: $O(0;0;0)$, $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0; 0\right)$, $S(0;0;h)$ ($h, a > 0$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow I & \left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; 0 \right), B \left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a}{2}; 0 \right), C \left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; 0 \right) \\ \Rightarrow \vec{n}_{(AMN)} & = [\vec{AM}, \vec{AN}] = \left(\frac{ah}{4}; 0; \frac{5a^2\sqrt{3}}{24} \right) \\ \Rightarrow \vec{n}_{(SBC)} & = [\vec{SB}, \vec{SC}] = \left(-ah; 0; \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \right) \\ (AMN) & \perp (SBC) \Rightarrow \vec{n}_{(AMN)} \cdot \vec{n}_{(SBC)} = 0 \\ \Rightarrow h & = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \\ \Rightarrow S_{\Delta AMN} & = \frac{1}{2} \left| [\vec{AM}, \vec{AN}] \right| = \frac{a^3\sqrt{10}}{16} \end{aligned}$$



Ví dụ 3: Cho hình chóp SABC có đáy là ΔABC vuông tại C, $SA \perp (ABC)$, $CA = a$, $CB = b$, $SA = h$. Gọi D là trung điểm AB.

1. Tính cosin góc φ giữa AC và SD.
2. Tính $d(AC, SD)$, $d(BC, SD)$.

Giải:

Trong (ABC) vẽ tia $Ax \perp AC$.

Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho: $A(0;0;0)$, $C(0;a;0)$, $S(0;0;h)$

$$\Rightarrow B(b;a;0), D\left(\frac{b}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$$

1. Tính cosin góc φ giữa AC và SD .

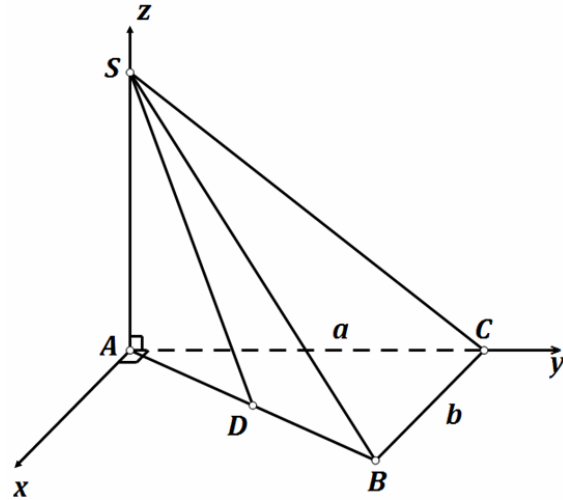
Ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (0; a; 0) \\ \overrightarrow{SD} = \left(\frac{b}{2}; \frac{a}{2}; -h\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SD}|}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{SD}|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 4h^2}}$$

2. Tính $d(AC, SD)$, $d(BC, SD)$.

$$d(BC, SD) = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{SD}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{ha}{\sqrt{a^2 + 4h^2}}$$

$$d(AC, SD) = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SD}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{hb}{\sqrt{b^2 + 4h^2}}$$



Ví dụ 4: Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a . Trên đường thẳng $d \perp (ABC)$ tại A lấy điểm M .

Gọi I là hình chiếu của trọng tâm G của $\triangle ABC$ trên (BCM) .

1. Chứng minh I là trực tâm $\triangle BCM$.

2. GI cắt d tại N . Chứng minh tứ diện $BCMN$ có các cặp cạnh đối vuông góc.

3. Chứng minh $AM \cdot AN$ không đổi khi M di động trên d .

Giải:

Trong mặt phẳng (ABC) vẽ $Ay \perp AB$. Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho:

$$A(0;0;0), B(a;0;0), M(0;0;m), C\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right) \Rightarrow G\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}; 0\right)$$

1. Chứng minh I là trực tâm $\triangle BCM$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp MA \\ BC \perp GI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (GIA)$$

$$\Rightarrow BC \perp AI$$

Tương tự $MC \perp BI \Rightarrow I$ là trực tâm $\triangle BCM$

2. Chứng minh tứ diện BCMN có các cặp cạnh đối vuông góc.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BC} = -\frac{a}{2}(1; -\sqrt{3}; 0)$$

$$\Rightarrow (AMI): x - \sqrt{3}y = 0$$

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(a; a\sqrt{3}; -2m)$$

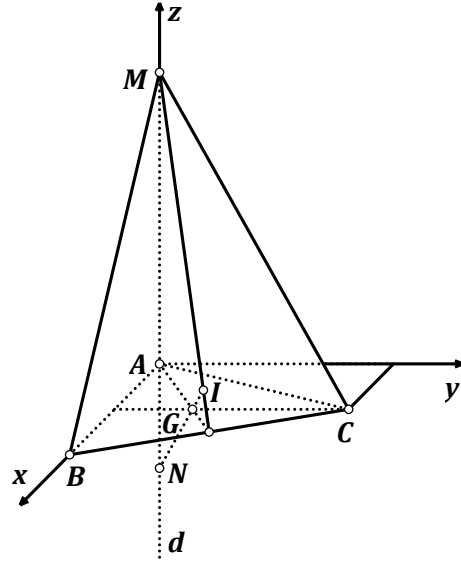
$$\Rightarrow (BGI): ax + a\sqrt{3}y - 2mz - a^2 = 0$$

$$GI = (AMI) \cap (BGI) = \begin{cases} x - \sqrt{3}y = 0 \\ ax + a\sqrt{3}y - 2mz - a^2 = 0 \end{cases}$$

$$N \in d \Rightarrow N(0; 0; n) \text{ và } N \in GI \Rightarrow n = -\frac{a^2}{2m} \Rightarrow N\left(0; 0; -\frac{a^2}{2m}\right)$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{MN} = 0, \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CN} = 0, \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$$

Vậy $BC \perp MN, BM \perp CN, BN \perp CM$.



Ví dụ 5: Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc. $AC = 2OB$, $BC = 2OA$. Vẽ $OM \perp AC$ tại M, $ON \perp BC$ tại N.

1. Chứng minh $MN \perp OC$.

2. Tính $\cos \widehat{MON}$.

3. D là trung điểm AB. Chứng minh $\frac{\tan^4 \widehat{OCD}}{\tan^4 \widehat{OCA}} + \frac{MN}{AB} = 1$.

Giải:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} OA^2 + OC^2 = AC^2 \\ OB^2 + OC^2 = BC^2 \end{cases} \Rightarrow 4OB^2 - OA^2 = 4OA^2 - OB^2 \Rightarrow OA = OB$$

$$\text{Đặt } OA = a = OB \Rightarrow OC = a\sqrt{3}$$

Chọn trục hệ tọa độ Oxyz sao cho: $O(0; 0; 0)$, $A(a; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $C(0; 0; a\sqrt{3})$

1. Chứng minh $MN \perp OC$.

$$\overrightarrow{AC} = -a(1; 0; -\sqrt{3})$$

Phương trình tham số của AC :

$$\begin{cases} x = a + t \\ y = 0 \\ z = -\sqrt{3}t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow M(a + t; 0; -\sqrt{3}t)$$

$$OM \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{3a}{4}; 0; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right), \overrightarrow{BC} = -a(0; 1; -\sqrt{3})$$

Phương trình tham số của

$$BC: \begin{cases} x = 0 \\ y = a + t \\ z = -\sqrt{3}t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow N(0; a + t; -\sqrt{3}t)$$

$$ON \perp BC = \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow t = -\frac{a}{4} \Rightarrow N\left(0; \frac{3a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \Rightarrow MN \perp OC$$

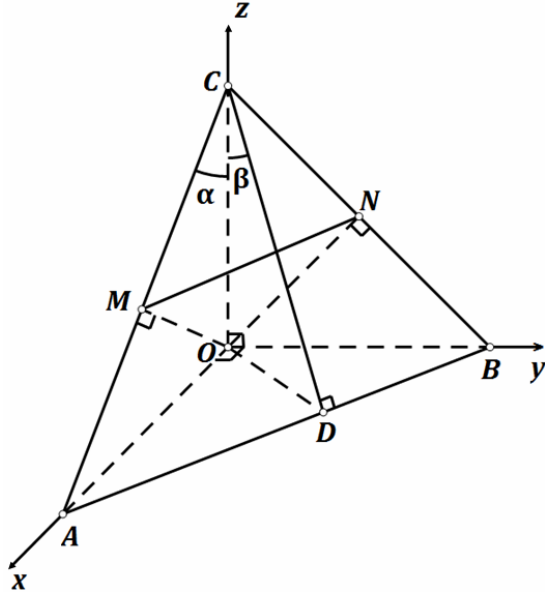
2. Tính $\cos \widehat{MON}$: $\cos \widehat{MON} = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}{OM \cdot ON} = \frac{1}{4}$

3. D là trung điểm AB. Chứng minh $\frac{\tan^4 \widehat{OCD}}{\tan^4 \widehat{OCA}} + \frac{MN}{AB} = 1$.

Đặt $\beta = \widehat{OCD}$, $\alpha = \widehat{OCA}$, $OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp OD$

$$OD = \frac{1}{2}AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \Rightarrow \begin{cases} \tan \beta = \frac{OD}{OC} \\ \tan \alpha = \frac{OA}{OC} \end{cases} \Rightarrow \frac{\tan^4 \beta}{\tan^4 \alpha} = \left(\frac{OD}{OA}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{MN}{AB} = \frac{\frac{3a\sqrt{2}}{4}}{a\sqrt{2}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\tan^4 \beta}{\tan^4 \alpha} + \frac{MN}{AB} = 1$$



Ví dụ 6: Cho hình chóp SABC có cạnh đáy là a đường cao SH = h. Mặt phẳng (α) qua AB và $(\alpha) \perp SC$.

1. Tìm điều kiện của h để (α) cắt cạnh SC tại K. Tính diện tích ΔABK .

2. Tính h theo a để (α) chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Chúng tỏ khi đó tâm mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp trùng nhau.

Giải:

Trong mặt phẳng (ABC) vẽ $H_y \perp HA$.

Chọn hệ trục tọa độ Hxyz sao cho: $H(0;0;0)$, $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3};0;0\right)$, $S(0;0;h)$

$$\Rightarrow B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{a}{2};0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};-\frac{a}{2};0\right)$$

1. Tìm điều kiện của h để (α) cắt cạnh SC tại K. Tính diện tích ΔABK .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{SC} = -\frac{1}{6}(a\sqrt{3}; 3a; 6h)$$

$$\Rightarrow (\alpha): a\sqrt{3}x + 3ay + 6hz - a^2 = 0$$

Phương trình tham số của

$$SC: \begin{cases} x = a\sqrt{3}t \\ y = 3at \\ z = h + 6ht \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$$SC \cap (\alpha) \Rightarrow t = \frac{-6h^2 + a^2}{12a^2 + 36h^2}$$

$$\Rightarrow K\left(\frac{a^3\sqrt{3} - 6\sqrt{3}ah^2}{12a^2 + 36h^2}; \frac{3a^3 - 18ah^2}{12a^2 + 36h^2}; \frac{18a^2h}{12a^2 + 36h^2}\right)$$

$$K \in SC \Leftrightarrow z_C < z_K < z_S \Leftrightarrow 0 < \frac{18a^2h}{12a^2 + 36h^2} < h \Leftrightarrow h > \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Cách 1:

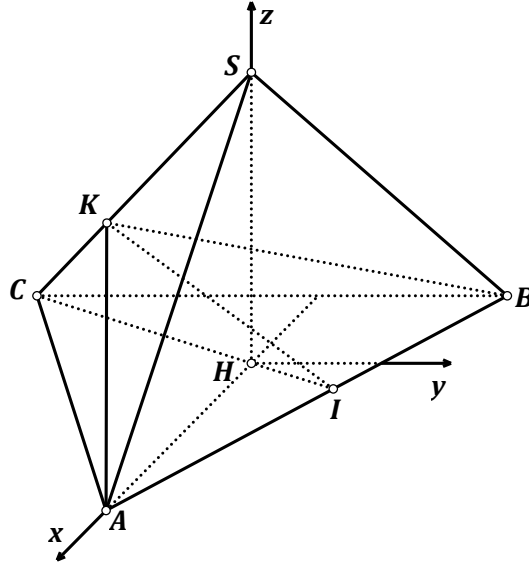
$$S_{\Delta ABK} = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AK} \right] \right| = \frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2 + 3h^2}}$$

Cách 2:

$$\text{Gọi I là trung điểm AB} \Rightarrow I\left(\frac{a\sqrt{3}}{12}; \frac{a}{4}; 0\right) \Rightarrow IK \perp SC, IK \perp AB$$

$$IK = \frac{\left| \left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SI} \right] \right|}{SC} = \frac{3ah}{2\sqrt{a^2 + 3h^2}} \Rightarrow S_{\Delta ABK} = \frac{1}{2} IK \cdot AB = \frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2 + 3h^2}}$$

2. Tính h



(α) chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau khi K là trung điểm của SC.

$$\Rightarrow IC = IS \Leftrightarrow \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2 + 12h^2}{12} \Leftrightarrow h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Khi đó: $\triangle CAB = \triangle SAB \Rightarrow SA = SB = a$

$$SC^2 = SH^2 + CH^2 = \frac{2a^2}{3} + \frac{a^2}{3} \Rightarrow SC = a$$

$\Rightarrow$ Chóp SABC đều.

Vậy, tâm mặt cầu ngoại tiếp và tâm mặt cầu nội tiếp của SABC trùng nhau.

Ví dụ 7: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ . Trên Δ lấy hai điểm A và B với $AB = a$. Trong (P) lấy điểm C, trong (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp ABCD và $d[A, (BCD)]$ theo a.

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho: $A(0;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(0;0;a)$, $D(a;a;0)$

Phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z = 0$

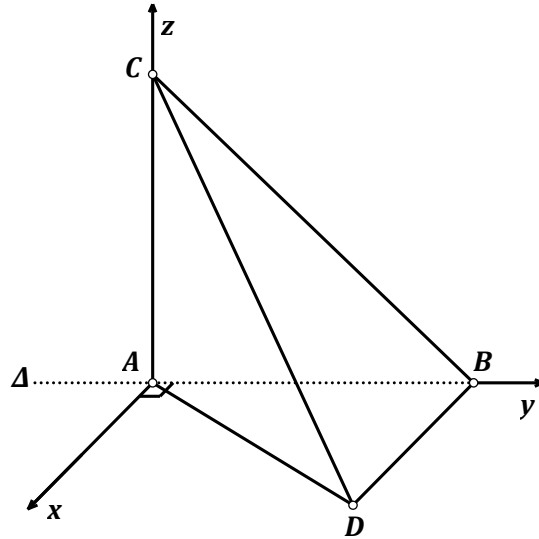
$$B, C, D \in S \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2\beta a \\ a^2 = 2\gamma a \\ 2a^2 = 2\alpha a + 2\beta a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{a}{2} \\ \beta = \frac{a}{2} \\ \gamma = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{n}_{(BCD)} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = a^2(0;1;1)$$

$$\Rightarrow (BCD): y + z - a = 0$$

$$\Rightarrow d[A, (BCD)] = \frac{a}{\sqrt{2}}$$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài tập 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = a$, $AC = 2a$. Trên đường thẳng vuông góc (ABC) tại A lấy điểm S sao cho $SA = 3a$. AD là đường cao tam giác $\triangle ABC$. E, F là trung điểm của SB, SC . H là hình chiếu của A trên EF .

1. Chứng minh H là trung điểm của SD .
2. Tính cosin góc CP giữa hai mặt phẳng $(ABC), (ACF)$.
3. Tính thể tích hình chóp $A.BCFE$.

Bài tập 2: Cho tứ diện $SABC$. $\triangle ABC$ vuông tại A có $AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SB = a\sqrt{2}$, $SB \perp (ABC)$. Qua B vẽ $BH \perp SA$, $BK \perp SC$ ($H \in SA, K \in SC$).

1. Chứng minh $SC \perp (BHK)$.
2. Tính diện tích $\triangle BHK$.
3. Tính góc giữa (ASC) và (SCB)

Bài tập 3: Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. H là hình chiếu của O trên (ABC) .

1. Chứng minh $\triangle ABC$ có ba góc nhọn.
2. Chứng minh H là trực tâm $\triangle ABC$.
3. Chứng minh $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.
4. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các mặt phẳng $(OAB), (OBC), (OAC)$ với mặt phẳng (ABC) . Chứng minh rằng $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Bài tập 4: Cho tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC = a$ và đôi một vuông góc. $OH \perp (ABC)$ tại H . Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của H lên các mặt $(OBC), (OAC), (OAB)$.

1. Tính thể tích tứ diện $HA_1B_1C_1$.
2. Gọi S là điểm đối xứng H qua O . Chứng minh tứ diện $SABC$ đều.
3. Chứng minh OH không vuông góc $(A_1B_1C_1)$.

Bài tập 5: Cho tứ diện $OABC$ và OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = a$,

$OB = a\sqrt{2}$, $OC = c$ ($a, c > 0$). Gọi D là đỉnh đối diện O của hình chữ nhật $OADB$, M là trung điểm BC mặt phẳng (α) qua A và M cắt (OCD) theo đường thẳng vuông góc AM .

1. Gọi E là giao điểm (α) với OC . Tính OE .
2. Tính khoảng cách từ C tới mặt phẳng (α) .
3. Tính diện tích thiết diện tạo bởi (α) và chóp $C.OADB$.

Bài tập 6: Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc.

OA = a, OB = b, OC = c.

1. Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp (S) của OABC. Tính bán kính r của (S).
2. Gọi M, N, P là trung điểm BC, CA, AB. Chứng minh rằng góc giữa (NOM) của (OMP) là vuông khi và chỉ khi $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Bài tập 7: Trên 3 tia Ox, Oy, Oz vuông góc từng đôi một lấy các điểm A, B, C sao cho OA = a, OB = b, OC = c. Gọi H, G là trực tâm, trọng tâm ΔABC .

1. Tính OH, OG và $S_{\Delta ABC}$ theo a, b, c.
2. Chứng minh ΔABC có ba góc nhọn và $a^2 \tan A = b^2 \tan B = c^2 \tan C$.

Bài tập 8: Cho ΔABC đều cạnh a. Trên đường thẳng $d \perp (ABC)$ tại A lấy điểm S, SA = h.

1. Tính $d[A, (SBC)]$ theo a và h.
2. Đường thẳng $\Delta \perp (SBC)$ tại trực tâm H của ΔSBC , chứng tỏ Δ luôn đi qua điểm cố định khi S di động trên d.
3. Δ cắt d tại S'. Tính h theo a để SS' nhỏ nhất.

Bài tập 11: Cho tứ diện SABC có ΔABC vuông cân tại B, AB = a, $SA \perp (ABC)$ và

$SA = a\sqrt{2}$. Gọi D là trung điểm của AC.

1. Chứng minh khoảng cách từ A đến (SBC) gấp đôi khoảng cách từ D đến (SBC).
2. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc SC, (α) cắt SC và SB tại M và N.
- Chứng minh ΔAMN là thiết diện giữa (α) và tứ diện SABC.
- Tính thể tích hình chóp SAMN.
3. Tính cosin góc φ giữa mặt phẳng (ASC) và (SCB)

Bài tập 15: Cho ΔABC đều có đường cao AH = 2a. Gọi O là trung điểm của AH. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại O lấy điểm S sao cho OS = 2a.

1. Tính góc cosin φ góc giữa (BSA) và (SAC)
2. Trên đoạn OH lấy điểm I. Đặt $OI = m$ ($0 < m < a$). Mặt phẳng (α) qua I vuông góc với AH cắt các cạnh AB, AC, SC, SB tại M, N, P, Q.
- Tính diện tích thiết diện MNPQ theo a và x.
- Tìm m để diện tích MNPQ là lớn nhất.

Bài tập 20: Cho tứ diện SABC có ΔABC vuông cân tại B, AB = a, $SA \perp (ABC)$ và SA = a. AH $\perp$ SB tại H, AK $\perp$ SC tại K.

1. Chứng minh rằng HK $\perp$ SC.

2. Gọi $I = HK \cap BC$. Chứng minh rằng B là trung điểm của CI .

3. Tính sin góc φ giữa SB và (AHK) .

4. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp $SABC$.

Bài tập 21: Trong mặt phẳng (α) có góc vuông $\widehat{xOy}$. M, N lần lượt di động trên cạnh Ox, Oy sao cho $OM + ON = a$. Trên đường thẳng vuông góc với (α) tại O lấy điểm S sao cho $OS = a$.

1. Tìm vị trí M, N để thể tích $SOMN$ lớn nhất.

2. Khi thể tích $SOMN$ lớn nhất, hãy tính:

- $d[O, (SMN)]$.

- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $SOMN$.

3. Khi M, N di động sao cho $OM + ON = a$ chứng minh $\widehat{OSM} + \widehat{OSN} + \widehat{MSN} = 90^\circ$.

VẤN ĐỀ I: CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC VỀ CHÓP TAM GIÁC

Bài tập 1: Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho: $A(0;0;0), B(a;0;0), C(0;2a;0)$,

$S(0;0;3a), E\left(\frac{a}{2};0;\frac{3a}{2}\right), F\left(0;a;\frac{3a}{2}\right)$

1. Chứng minh H là trung điểm của SD .

Ta có: $\overrightarrow{FE} = \left(\frac{a}{2}; -a; 0\right) = \frac{a}{2}(1; -2; 0)$

Phương trình tham số của

$$FE: \begin{cases} x = t \\ y = a - 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = \frac{3a}{2} \end{cases}$$

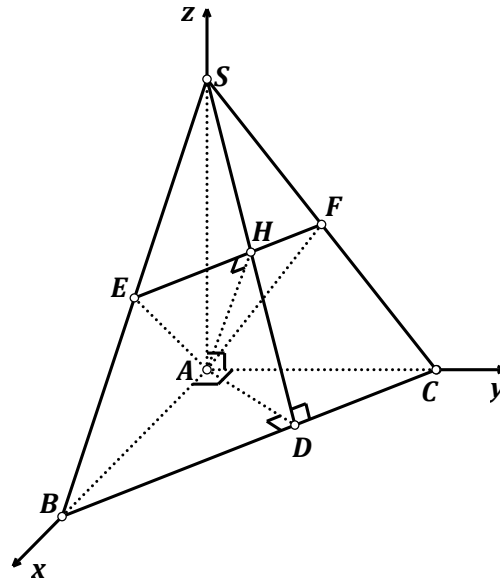
$$H \in FE \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(t; a - 2t; \frac{3a}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{AH} \Rightarrow t = \frac{2a}{5} \Rightarrow H\left(\frac{2a}{5}; \frac{a}{5}; \frac{3a}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow SH \perp BC$$

Mà $\begin{cases} SD \perp BC \quad (BC \perp AD, BC \perp SA) \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow H \in SD \Rightarrow H$ là trung điểm của SD do EF là

đường trung bình trong $\Delta SBC \Rightarrow D\left(\frac{4a}{5}; \frac{2a}{5}; 0\right)$.



2. Tính cosin góc CP giữa hai mặt phẳng $(ABC), (ACF)$.

Ta có $BC \perp (SAD) \Rightarrow FE \perp (SAD)$ do FE song song với BC

$$\begin{cases} (SAD) \cap (ABC) = AD \\ (SAD) \cap (AEF) = AH \end{cases} \Rightarrow \cos \varphi = \left| \cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AH}) \right| \Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{|(4; 2; 15)(2; 1; 0)|}{\sqrt{16 + 4 + 224}\sqrt{4 + 1 + 0}} = \frac{2}{7}$$

3. Tính thể tích hình chóp A.BCFE.

$$\text{Ta có } V_{ASEF} = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AE}] \cdot \overrightarrow{AF} \right| = \frac{a^3}{4}, V_{ASBC} = \frac{1}{6} AS \cdot AB \cdot AC = a^3$$

$$\text{Vậy } V_{A.BCFE} = V_{ASBC} - V_{ASEF} = \frac{3a^3}{4}$$

$$\text{Chú ý: } S_{ASEF} = \frac{1}{4} S_{ASBC} \Rightarrow V_{ASEF} = \frac{1}{4} V_{ASBC} = \frac{a^3}{4}$$

Bài tập 2: Trong (ABC) , vẽ $Bx \perp BA$. Ta có: $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow \triangle BAS$

vuông cân tại B $\Rightarrow H$ là trung điểm của SA.

Chọn hệ trục tọa độ

$$Bxyz: B(0; 0; 0), A(0; a\sqrt{2}; 0), S(0; 0; a\sqrt{2}), C(a; a\sqrt{2}; 0), H\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$$

1. Chứng minh $SC \perp (BHK)$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{SC} = a(1; \sqrt{2}; -\sqrt{2})$$

Phương trình tham số của

$$SC: \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{2}t \\ z = a\sqrt{2} - \sqrt{2}t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

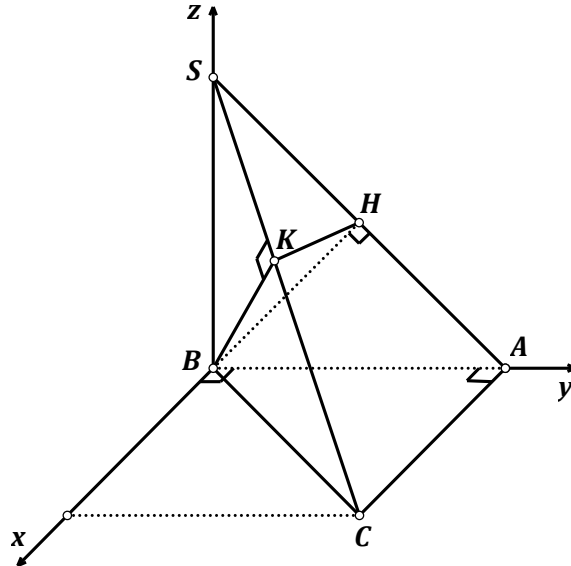
$$\Rightarrow K(t; \sqrt{2}t; a\sqrt{2} - \sqrt{2}t)$$

$$BK \perp SC \Leftrightarrow \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow K\left(\frac{2a}{5}; \frac{2\sqrt{2}a}{5}; \frac{3a\sqrt{2}}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \Rightarrow BH \perp SC$$

$$\Rightarrow SC \perp (BHK)$$



$$2. \text{ Tính diện tích } \triangle BHK: S_{\triangle BHK} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BK}] \right| = \frac{a^2 \sqrt{13}}{10}$$

$$3. \text{Ta có } SC \perp (BHK) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp HK \\ SC \perp KB \end{cases} \Rightarrow \widehat{BKH} = (\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KH})$$

$$\Rightarrow \cos(\widehat{KB, KH}) = \frac{\overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{KH}}{KB \cdot KH} = \frac{3}{5\sqrt{6}}$$

Bài tập 3: Chọn hệ trục Oxyz sao cho: $O(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$.

1. Chứng minh $\triangle ABC$ có ba góc nhọn.

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 > 0 \Rightarrow \widehat{BAC}$ là góc nhọn

Tương tự $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ là góc nhọn

Vậy $\triangle ABC$ có ba góc nhọn.

2. Chứng minh H là trực tâm $\triangle ABC$.

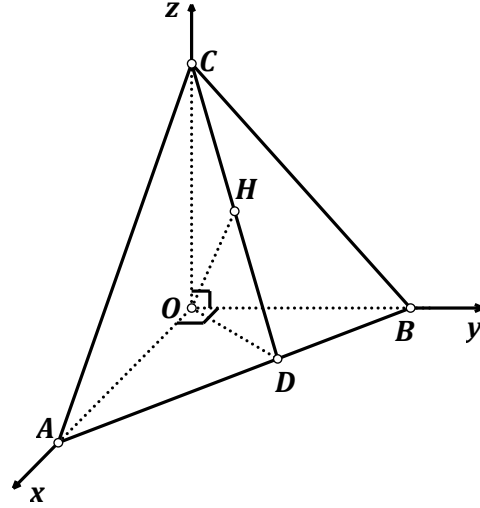
Ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow bcx + acy + abz - abc = 0$$

$$OH \perp (ABC) \Rightarrow \vec{u}_{OH} = \vec{n}_{(ABC)} = (bc; ac; ab)$$

Phương trình tham số của

$$OH: \begin{cases} x = bct \\ y = act \\ z = abt \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$



Thay x, y, z vào phương trình (ABC) ta được:

$$(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)t = abc \Rightarrow t = \frac{abc}{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}$$

$$\Rightarrow H \left(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}; \frac{a^2bc^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}; \frac{a^2b^2c}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} = \frac{a^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} (-ab^2 - ac^2; bc^2; b^2c) \\ \overrightarrow{BH} = \frac{b^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} (ac^2; -a^2b - bc^2; a^2c) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow H \text{ là trực tâm } \triangle ABC.$$

3. Chứng minh $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

$$OH = d[O, (ABC)] = \frac{|-abc|}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2c^2}$$

$$\text{Mà } \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

4. Chứng minh rằng $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

$$\text{Nhận xét: } |\cos \alpha| = \left| \cos \left[\widehat{(OAB), (ABC)} \right] \right| = \left| \cos \left[\vec{n}_{(OAB)}, \vec{n}_{(ABC)} \right] \right|$$

$$\text{Gọi } \vec{n} = \vec{n}_{(ABC)} = (bc; ac; ab), \vec{n}_1 = \vec{n}_{(OAB)} = \vec{k} = (0; 0; 1),$$

$$\vec{n}_2 = \vec{n}_{(OBC)} = \vec{i} = (1; 0; 0), \vec{n}_3 = \vec{n}_{(OAC)} = \vec{j} = (0; 1; 0)$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \cos^2 \left(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}} \right) + \cos^2 \left(\widehat{\vec{n}_2, \vec{n}} \right) + \cos^2 \left(\widehat{\vec{n}_3, \vec{n}} \right)$$

$$= \frac{a^2b^2}{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2} + \frac{b^2c^2}{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2} + \frac{a^2c^2}{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2} = 1$$

Vậy $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Bài tập 4: Chọn hệ trục tọa độ Oxyz: O(0;0;0), A(a;0;0), B(0;a;0), C(0;0;a)

1. Tính thể tích tứ diện $HA_1B_1C_1$.

Do $OA = OB = OC$ nên $OABC$ là

hình chóp tam giác đều đỉnh

O. $OH \perp (ABC)$ tại H $\Rightarrow$ H là

$$\text{trọng tâm } \triangle ABC \Rightarrow H \left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3} \right)$$

$$HC_1 \perp (AOB) \Rightarrow C_1 \left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; 0 \right)$$

$$A_1 = \left(0; \frac{a}{3}; \frac{a}{3} \right), B_1 \left(\frac{a}{3}; 0; \frac{a}{3} \right)$$

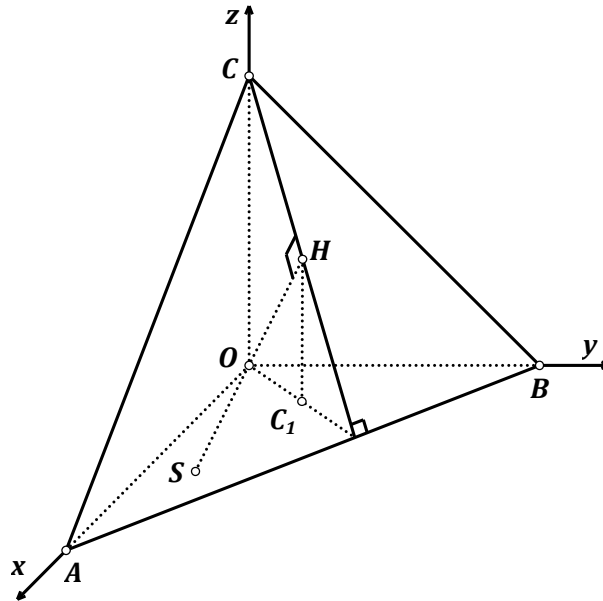
$$\Rightarrow \vec{HA_1} = \left(-\frac{a}{3}; 0; 0 \right),$$

$$\vec{HB_1} = \left(0; -\frac{a}{3}; 0 \right), \vec{HC_1} = \left(0; 0; -\frac{a}{3} \right)$$

$$\Rightarrow V_{HA_1B_1C_1} = \frac{a^3}{162}$$

2. Chứng minh tứ diện $SABC$ đều.

Ta có $AB = AC = BC = a\sqrt{2}$



$$O \text{ là trung điểm } SH \Rightarrow S\left(-\frac{a}{3}; -\frac{a}{3}; -\frac{a}{3}\right) \Rightarrow SA = \sqrt{\left(\frac{4a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Tương tự } SB = SC = a\sqrt{2} \Rightarrow SA = SB = SC = AB = AC = BC = a\sqrt{2}$$

Vậy tứ diện SABC đều.

3. Chứng minh OH không vuông góc $(A_1B_1C_1)$.

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \left(\frac{a}{3}; -\frac{a}{3}; 0\right), \overrightarrow{A_1C_1} = \left(\frac{a}{3}; 0; -\frac{a}{3}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}] = \left(\frac{a^2}{9}; \frac{a^2}{9}; 0\right)$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{OH} = \left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}] \not\perp \overrightarrow{OH}$$

Vậy $OH \not\perp (A_1B_1C_1)$

Bài tập 5: Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho:

$$O(0;0;0), A(a;0;0), B(0;a\sqrt{2};0), C(0;0;c) \Rightarrow M\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{c}{2}\right)$$

1. Tính OE.

Gọi I là tâm

OADB, $G = CI \cap AM \Rightarrow G$ là

trọng tâm $\triangle ABC$

$$\Rightarrow G\left(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; \frac{c}{3}\right)$$

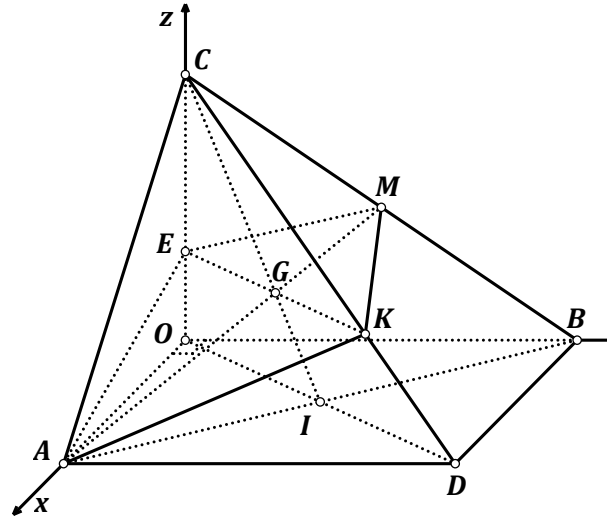
$$E \in OC \Rightarrow E(0;0;e)$$

Ta có: $(\alpha) \cap (OCD) = EG$

$$\Rightarrow \overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

$$\Rightarrow e = \frac{c}{3} \Rightarrow E\left(0;0;\frac{c}{3}\right)$$

$$\Rightarrow OE = \frac{c}{3}$$



2. Tính khoảng cách từ C tới mặt phẳng (α) .

$$\vec{n}_{(\alpha)} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{EG}] = -\frac{a}{6}(c\sqrt{2}; -c; 3a\sqrt{2}) \Rightarrow (\alpha): c\sqrt{2}x - cy + 3a\sqrt{2}z - ac\sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow d[C, (\alpha)] = \frac{2ac\sqrt{2}}{\sqrt{18a^2 + 3c^2}}$$

3. Tính diện tích thiết diện tạo bởi (α) và chóp C.OADB.

Trong (OCD) gọi $K = EG \cap CD \Rightarrow$ Thiết diện là tứ giác AKME

Do $\frac{CE}{CO} = \frac{CG}{CI} = \frac{2}{3}$ nên: $EG \parallel OD \Rightarrow EK \parallel OD \Rightarrow G$ là trung điểm EK

$$\Rightarrow S_{AKME} = 2S_{AAEM} = EG \cdot AM = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6a^2 + c^2}}{2}$$

Bài tập 6:

Trọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho: $O(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$

1. Tính bán kính r của (S) .

$$V_{IOAB} + V_{IOBC} + V_{IOCA} + V_{IABC} = V_{OABC}$$

$$\frac{r}{3}(S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OCA} + S_{\Delta ABC}) = \frac{abc}{6}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}$$

$$\frac{r}{6}(ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}) = \frac{abc}{6}$$

$$r = \frac{abc}{ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}$$

2.

Ta có: $M\left(0; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$, $N\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{c}{2}\right)$, $P\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; 0\right)$

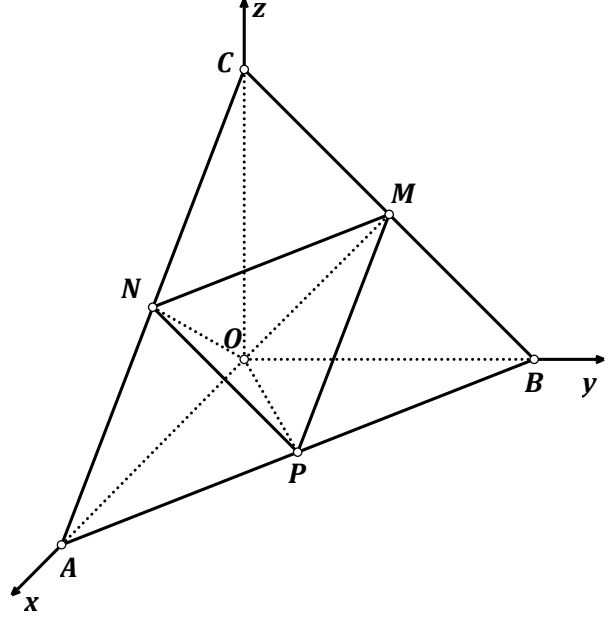
$$\vec{n}_{(OMN)} = [\vec{OM}, \vec{ON}] = \left(\frac{bc}{4}; \frac{ac}{4}; -\frac{ab}{4}\right),$$

$$\vec{n}_{(OMP)} = [\vec{OM}, \vec{OP}] = \left(-\frac{bc}{4}; \frac{ac}{4}; -\frac{ab}{4}\right)$$

$$\text{Giả thiết, suy ra } \vec{n}_{(OMN)} \cdot \vec{n}_{(OMP)} = 0 \Leftrightarrow -\frac{b^2c^2}{16} + \frac{a^2c^2}{16} + \frac{a^2b^2}{16} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Bài tập 7:

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho: $O(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$



1. Tính OH, OG và $S_{\Delta ABC}$ theo a, b, c.

$$G\left(\frac{a}{3}; \frac{b}{3}; \frac{c}{3}\right) \Rightarrow OG = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AB \perp CH \\ AB \perp OC \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB \perp (OCH) \Rightarrow AB \perp OH$$

$$\text{Tương tự: } AC \perp OH$$

$$\Rightarrow OH \perp (ABC) \Rightarrow OH = d[O, (ABC)]$$

$$(ABC): bcx + acy + abz - abc = 0$$

$$\Rightarrow OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}$$

2. Chứng minh ΔABC có ba góc nhọn và $a^2 \tan A = b^2 \tan B = c^2 \tan C$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-a; b; 0) \cdot (-a; 0; c) = a^2 > 0 \Rightarrow \cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} > 0 \Rightarrow A \text{ nhọn.}$$

Tương tự B, C nhọn.

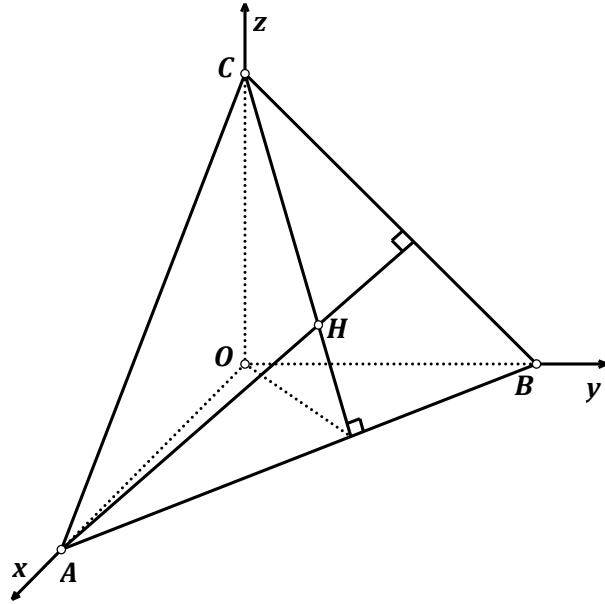
$$\text{Ta có: } \begin{cases} \sin A = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB \cdot AC} \\ \cos A = \frac{AB \cdot AC}{AB \cdot AC} \end{cases} \Rightarrow \tan A = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB \cdot AC} \Rightarrow a^2 \tan A = 2S_{\Delta ABC}$$

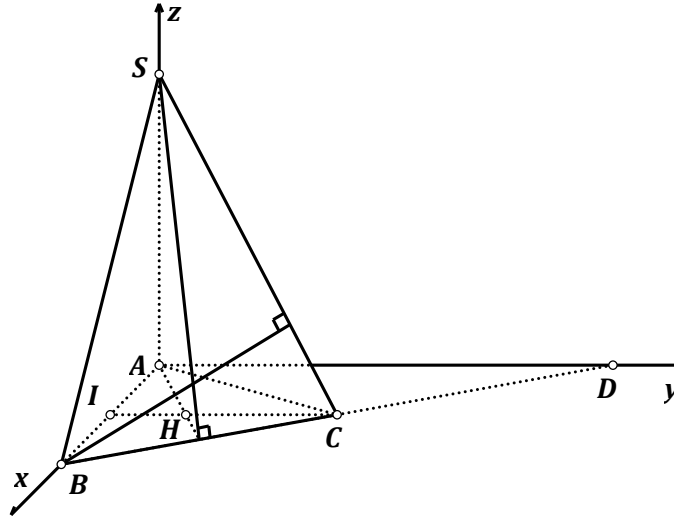
Tương tự cho $b^2 \tan B = c^2 \tan C$.

Bài tập 8: Gọi I là trung điểm AB. Trong (ABC) vẽ $Ay \perp AB$

$$\text{Ta có: } CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Chọn hệ trục tọa độ } Axyz \text{ sao cho: } A(0;0;0), B(a;0;0), S(0;0;h) \Rightarrow C\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$





1. Tính $d[A, (SBC)]$ theo a và h .

Gọi $D = BC \cap Ay \Rightarrow D(0; a\sqrt{3}; 0) \Rightarrow (SBC) \equiv (SBD)$

$$\Rightarrow (SBC): h\sqrt{3}x + hy + a\sqrt{3}z - ah\sqrt{3} = 0 \Rightarrow d[A, (SBC)] = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4h}}$$

2. Chứng tỏ Δ luôn đi qua điểm cố định khi S di động trên d .

Gọi $(\alpha) \equiv (S, \Delta), (\beta) \equiv (B, \Delta)$

Ta có: $(\alpha) \perp BC, (\beta) \perp SC$ ($SH \perp BC, \Delta \perp BC, BH \perp SC, \Delta \perp SC$)

$$\overrightarrow{BC} = -\frac{a}{2}(1; -\sqrt{3}; 0), \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}(a; a\sqrt{3}; -2h) \Rightarrow (\alpha): x - \sqrt{3}y = 0, (\beta): a(x - a) + a\sqrt{3}y - 2hz = 0$$

$$\Rightarrow (\Delta): \begin{cases} x - \sqrt{3}y = 0 \\ a(x - a) + a\sqrt{3}y - 2hz = 0 \end{cases}$$

Δ qua điểm cố định khi h thay đổi.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{3}y = 0 \\ z = 0 \\ x - \sqrt{3}y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{a}{2\sqrt{3}} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta \text{ qua } G\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2\sqrt{3}}; 0\right) \text{ cố định}$$

3. Tính h theo a để SS' nhỏ nhất.

$$\text{Ta có: } S' \in d \Rightarrow S'(0; 0; s'), S' \in \Delta \Rightarrow -2hs' - a^2 = 0 \Rightarrow s' = -\frac{a^2}{2h}$$

$$\Rightarrow S' \left(0; 0; -\frac{a^2}{2h} \right) \Rightarrow SS' = h + \frac{a^2}{2h} \leq 2\sqrt{h \frac{a^2}{2h}} = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow SS'_{\min} = a\sqrt{2} \Leftrightarrow h = \frac{a^2}{2h} \Leftrightarrow h = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Bài tập 11: Trong mặt phẳng (ABC) , vẽ $Ay \perp AB$.

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $S(0;0;a\sqrt{2})$

$$\Rightarrow D\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$$

1. Chứng minh khoảng cách từ A đến (SBC) gấp đôi khoảng cách từ D đến (SBC) .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{BS} = -a(1;0;-\sqrt{2}) \\ \overrightarrow{BC} = a(0;1;0) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(SBC)} = (\sqrt{2};0;1) \Rightarrow (SBC): \sqrt{2}x + z - a\sqrt{2} = 0$$

$$d[A, (SBC)] = \frac{|-a\sqrt{2}|}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3}, \quad d[D, (SBC)] = \frac{\left| \frac{a\sqrt{2}}{2} - a\sqrt{2} \right|}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Vậy, khoảng cách từ A đến (SBC) gấp đôi khoảng cách từ D đến (SBC) .

2.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{SC} = a(1;1;-\sqrt{2}) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = (1;1;-\sqrt{2}) \Rightarrow (\alpha): x + y - \sqrt{2}z = 0$$

$$\text{Phương trình tham số của } SB: \begin{cases} x = a + t \\ y = 0 \\ z = -\sqrt{2}t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ qua } B \text{ và } \vec{u} = \overrightarrow{BS}.$$

$$\Rightarrow a + t + 2t = 0 \Rightarrow t = -\frac{a}{3} \Rightarrow N\left(\frac{2a}{3}; 0; \frac{a\sqrt{2}}{3}\right) \Rightarrow M \text{ là trung điểm } SC \Rightarrow M\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$$

- Chứng minh ΔAMN là thiết diện giữa (α) và tứ diện $SABC$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{NS} \cdot \overrightarrow{NB} = \left(-\frac{2a}{3}; 0; \frac{2a\sqrt{2}}{3}\right) \cdot \left(\frac{a}{3}; 0; -\frac{a\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{2a^2}{3} < 0 \Rightarrow N \text{ thuộc cạnh } SB \text{ và } M$$

trung điểm cạnh SC

Vậy ΔAMN là thiết diện giữa (α) và tứ diện $SABC$.

- Tính thể tích hình chóp $SAMN$.

$$V_{SAMN} = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AM}] \cdot \overrightarrow{AN} \right| = \frac{1}{6} \left| \left((0;0;a\sqrt{2}), \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) \right) \cdot \left(\frac{2a}{3}; 0; \frac{a\sqrt{2}}{3} \right) \right| = \frac{a^3\sqrt{2}}{18}$$

3. Tính cosin góc φ giữa mặt phẳng (ASC) và (SCB)

$$\text{Ta có } (AMN) \perp SC \Rightarrow \begin{cases} AM \perp SC \\ MN \perp SC \end{cases} \Rightarrow \varphi = (\widehat{MA, MN}) \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MN}}{MA \cdot MN} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Bài tập 15: Gọi D là trung điểm AB $\Rightarrow OD \perp OH$

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = \frac{4a}{\sqrt{3}} \Rightarrow OD = \frac{1}{4}BC = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho: $O(0;0;0)$, $D\left(\frac{a}{\sqrt{3}};0;0\right)$, $H(0;a;0)$, $S(0;0;2a)$

$$\Rightarrow A(0;-a;0), B\left(\frac{2a}{\sqrt{3}};a;0\right), C\left(-\frac{2a}{\sqrt{3}};a;0\right)$$

1. Tính góc cosin φ góc giữa (BSA) và (SAC)

Vẽ $BE \perp SA$ tại

$$E \Rightarrow CE \perp SA \Rightarrow \varphi = \widehat{BEC}$$

$$\overrightarrow{SA} = (0;a;2a) = a(0;1;2)$$

Phương trình tham số của

$$SA: \begin{cases} x = 0 \\ y = -a + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t \end{cases}$$

Phương trình mặt phẳng

$$(BCE): y - a + 2z = 0$$

$$\Rightarrow -2a + t + 4t = 0 \Rightarrow t = \frac{2a}{5}$$

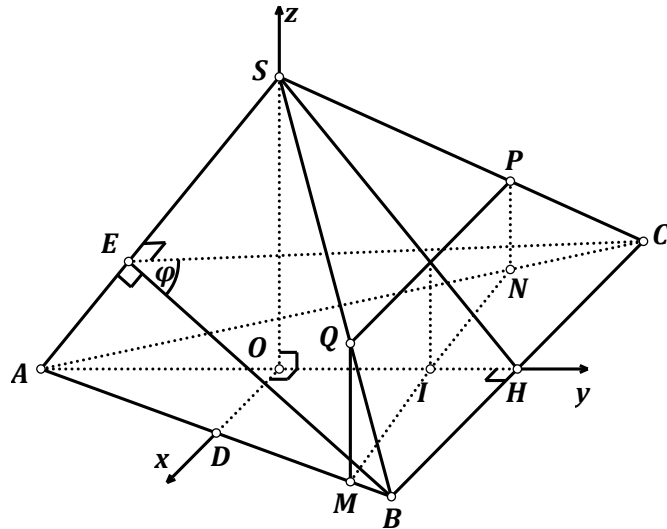
$$\Rightarrow E\left(0; -\frac{3a}{5}; \frac{4a}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{EB} = \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}; \frac{8a}{5}; -\frac{4a}{5}\right) \\ \overrightarrow{EC} = \left(-\frac{2a}{\sqrt{3}}; \frac{8a}{5}; -\frac{4a}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow \cos \varphi = \cos(\widehat{EB, EC}) = \frac{7}{17}$$

2.

- Tính diện tích thiết diện MNPQ theo a và x.

$$\text{Ta có } I(0;m;0), \overrightarrow{OH} = a(0;1;0) \Rightarrow (MNPQ): y - m = 0$$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{2a}{\sqrt{3}}(1;\sqrt{3};0), \overrightarrow{AC} = -\frac{2a}{\sqrt{3}}(1;-\sqrt{3};0), \overrightarrow{SB} = \frac{a}{\sqrt{3}}(2;\sqrt{3};-2\sqrt{3}), \overrightarrow{SC} = -\frac{a}{\sqrt{3}}(2;-\sqrt{3};2\sqrt{3})$$



$$\text{Phương trình tham số của } AB: \begin{cases} x = t \\ y = -a + \sqrt{3}t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{a+m}{\sqrt{3}}; m; 0\right)$$

$$\text{Phương trình tham số của } AC: \begin{cases} x = t \\ y = -a - \sqrt{3}t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{-a-m}{\sqrt{3}}; m; 0\right)$$

$$\text{Phương trình tham số của } SB: \begin{cases} x = 2t \\ y = \sqrt{3}t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2a - 2\sqrt{3}t \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{2m}{\sqrt{3}}; m; 2a - 2m\right)$$

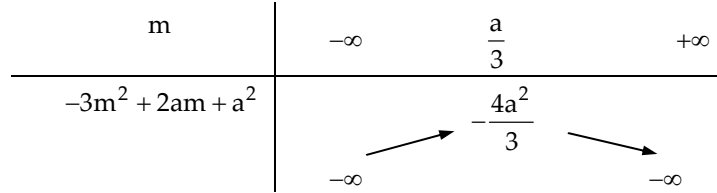
$$\text{Phương trình tham số của } SC: \begin{cases} x = 2t \\ y = -\sqrt{3}t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2a + 2\sqrt{3}t \end{cases} \Rightarrow P\left(-\frac{2m}{\sqrt{3}}; m; 2a - 2m\right)$$

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2} \left[\left| \left(\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MP} \right) \right| + \left| \left(\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MN} \right) \right| \right] = \frac{2}{\sqrt{3}} (-3m^2 + 2am + a^2)$$

- Tìm m để diện tích MNPQ là lớn nhất.

Cách 1:

Bảng xét dấu:



$$\Rightarrow S_{MNPQ} \leq \frac{8a^2}{3\sqrt{3}}$$

$$\text{Vậy } (S_{MNPQ})_{\max} = \frac{8a^2}{3\sqrt{3}} \text{ khi } m = \frac{a}{3}$$

Cách 2:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

$$S_{MNPQ} = 2\sqrt{3}(a-m)\left(m + \frac{a}{3}\right) \leq 2\sqrt{3} \left[\frac{(a-m) + \left(m + \frac{a}{3}\right)}{2} \right]^2 = \frac{8a^2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow (S_{MNPQ})_{\max} = \frac{8a^2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow a - m = m + \frac{a}{3} \Leftrightarrow m = \frac{a}{3}$$

Bài tập 20: Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $S(0;0;a)$

1. Chứng minh rằng $HK \perp SC$.

$$\overrightarrow{SB} = (-a; 0; a) = -a(1; 0; -1)$$

$$\overrightarrow{SC} = (-a; -a; a) = -a(1; 1; -1)$$

Phương trình tham số của

$$SB: \begin{cases} x = a + t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$$H \in SB \Rightarrow H(a + t; 0; -t)$$

$$AH \perp SB \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{SB} = 0$$

$$\Rightarrow t = -\frac{a}{2} \Rightarrow H\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right)$$

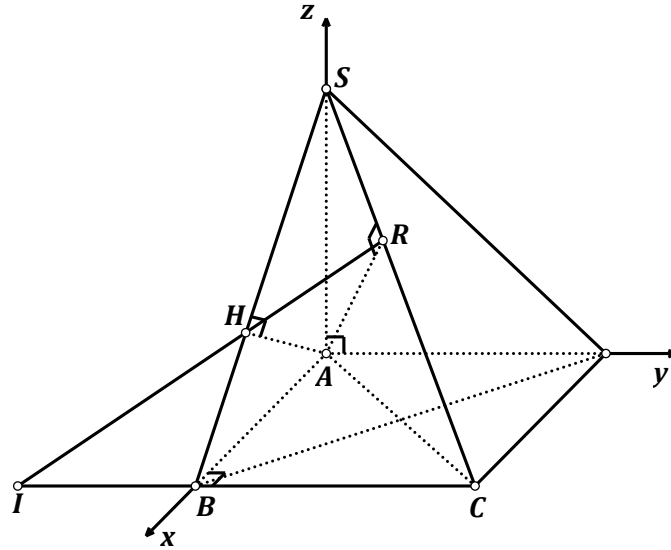
Phương trình tham số của

$$SC: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = a - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$$\Rightarrow K(t; t; a - t) \text{ và } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \Rightarrow K\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{2a}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{HK} = \left(-\frac{a}{6}; \frac{a}{3}; \frac{a}{6}\right) = -\frac{a}{6}(1; -2; -1) \Rightarrow \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$$

Chú ý: $\triangle SAB$ vuông cân tại $A \Rightarrow H$ là trung điểm của $SB \Rightarrow H\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right)$



2. Chứng minh rằng B là trung điểm của CI .

$$\text{Phương trình tham số của } HK: \begin{cases} x = \frac{a}{2} + t \\ y = -2t \\ z = \frac{a}{2} - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Ta có: } I = HK \cap (ABC) \Rightarrow \frac{a}{2} - t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{a}{2} \Rightarrow I(a; -a; 0) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_C = 2a = 2x_B \\ y_1 + y_C = 0 = 2y_B \\ z_1 + z_C = 0 = 2z_B \end{cases}$$

Vậy B là trung điểm của CI.

3. Tính sin góc φ giữa SB và (AHK).

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SC \perp AK \text{ (gt)} \\ SC \perp HK \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{(AHK)} = (1; 1; -1) \Rightarrow \sin \varphi = \left| \cos(\widehat{SB, SC}) \right| = \left| \cos(\widehat{\vec{n}_{SB}, \vec{n}_{(AHK)}}) \right| = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

4 Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp SABC.

Gọi $J(x_0; y_0; z_0)$ suy ra phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + d = 0$$

$$A, B, C, S \in (S) \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ J\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy J là trung điểm của SC và $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Bài tập 21: Chọn hệ trục tọa độ Oxyz: $O(0;0;0)$, $M(m;0;0)$, $N(0;n;0)$, $S(0;0;a)$,
($m, n > 0$; $m + n = a$)

1. Tìm vị trí M, N để thể tích SOMN

lớn nhất.

$$V_{SOMN} = \frac{1}{6}amn \leq \frac{a}{6} \left(\frac{m+n}{2} \right)^2 = \frac{a^3}{24}$$

$$\Rightarrow (V_{SOMN})_{\max} = \frac{a^3}{24} \Leftrightarrow m = n = \frac{a}{2}$$

2. Khi thể tích SOMN lớn nhất thì

$$M\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right), N\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$$

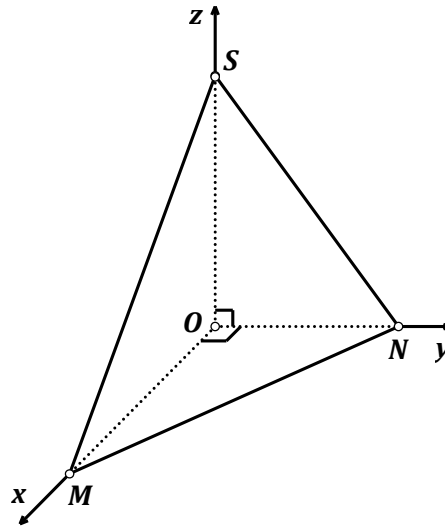
$$- d[O, (SMN)].$$

$$(SMN): 2x + 2y + z - a = 0$$

$$\Rightarrow d[O, (SMN)] = \frac{a}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{a}{3}$$

- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp SOMN.

$$\text{Phương trình mặt cầu (S): } x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z = 0$$



$$M, N, S \in (S) \Rightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{4} - \alpha a = 0 \\ \frac{a^2}{4} - \beta a = 0 \\ a^2 - 2\gamma a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{a}{4} \\ \beta = \frac{a}{4} \\ \gamma = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

3. Chứng minh $\widehat{OSM} + \widehat{OSN} + \widehat{MSN} = 90^\circ$. Đặt $\alpha = \widehat{OSM}$, $\beta = \widehat{OSN}$, $\gamma = \widehat{MSN}$

$$\sin \gamma = \frac{2S_{\triangle SMN}}{SM \cdot SN} = \frac{[\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SN}]}{SM \cdot SN} = \frac{\sqrt{m^2 a^2 + n^2 a^2 + m^2 n^2}}{\sqrt{(m^2 + a^2)(n^2 + a^2)}}$$

$$\sin \alpha = \frac{OM}{SM} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + a^2}}, \cos \alpha = \frac{OS}{SM} = \frac{a}{\sqrt{m^2 + a^2}}$$

$$\sin \beta = \frac{ON}{SN} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + a^2}}, \cos \beta = \frac{OS}{SN} = \frac{a}{\sqrt{n^2 + a^2}}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{a^2 - mn}{\sqrt{(m^2 + a^2)(n^2 + a^2)}}$$

$$\text{Mặt khác: } m^2 a^2 + n^2 a^2 + m^2 n^2 = a^2(m^2 + n^2) + m^2 n^2$$

$$= a^2[(m+n)^2 - 2mn] + m^2 n^2 = a^4 - 2a^2 mn + m^2 n^2 = (a^2 - mn)^2$$

$$\Rightarrow \sin \gamma = \cos(\alpha + \beta) = \frac{a^2 - mn}{\sqrt{(m^2 + a^2)(n^2 + a^2)}} \Rightarrow \gamma + \alpha + \beta = 90^\circ$$