Các đa thức dạng Fibonacci

Lê Kim Uyên
Trường THPT Ngô Gia Tự, Eakar, Đak Lak

1 Đa thức Fibonacci và đa thức Lucas

Định nghĩa 1. *Dãy đa thức* $\{f_n(x)\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ *thỏa mãn hệ thức truy hồi*

$$f_{n+2}(x) = xf_{n+1}(x) + f_n(x), \text{ với mọi } n \in \mathbb{Z}^+$$

trong đó $f_0(x) = 0, f_1(x) = 1$ *được gọi là một dãy đa thức Fibonacci, ký hiệu* $\{f_n(x)\}$.

Nhận xét 1. $\deg f_n(x) = n - 1, \quad \forall n \geq 1.$

Định nghĩa 2. *Dãy đa thức* $\{l_n(x)\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ *thỏa mãn hệ thức truy hồi*

$$l_{n+2}(x) = xl_{n+1}(x) + l_n(x), \text{ với mọi } n \in \mathbb{Z}^+$$

trong đó $l_0(x) = 2, l_1(x) = x$ *được gọi là một dãy đa thức Lucas, ký hiệu* $\{l_n(x)\}$.

Nhận xét 2. $\deg l_n(x) = n, \quad \forall n \geq 0.$

Định lý 1. *Với mọi* $n \geq 1$ *chúng ta có*

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-j-1}{j} x^{n-2j-1}$$

Chứng minh. Cách 1: Đặt

$$g_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-j-1}{j} x^{n-2j-1}, n \geq 1$$

Ta sẽ chứng minh $g_n(x) = f_n(x)$. Từ cách đặt ta thu được $g_1(x) = 1 = f_1(x)$ và $g_2(x) = x = f_2(x)$.

Để chứng minh $g_n(x) = f_n(x)$ ta chứng minh $g_n(x)$ thỏa mãn công thức truy hồi $g_n(x) = xg_{n-1}(x) + g_{n-2}(x), \forall n \geq 2$.

+ Với n chẵn, $n = 2k, k \in \mathbb{Z}^+$ chúng ta có

$$xg_{n-1}(x) + g_{n-2}(x) =$$

$$
\begin{aligned}
&= x\sum_{j=0}^{\lfloor (n-2)/2\rfloor}\binom{n-j-2}{j}x^{n-2j-2}+\sum_{j=0}^{\lfloor (n-3)/2\rfloor}\binom{n-j-3}{j}x^{n-2j-3}\\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor (n-2)/2\rfloor}\binom{n-j-2}{j}x^{n-2j-1}+\sum_{j=1}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n-j-2}{j-1}x^{n-2j-1}\\
&= x^{n-1}+\sum_{j=1}^{\lfloor (n-2)/2\rfloor}\binom{n-j-2}{j}x^{n-2j-1}+\sum_{j=1}^{\lfloor (n-2)/2\rfloor}\binom{n-j-2}{j-1}x^{n-2j-1}\\
&= x^{n-1}+\sum_{j=1}^{\lfloor (n-2)/2\rfloor}\left[\binom{n-j-2}{j}+\binom{n-j-2}{j-1}\right]x^{n-2j-1}\\
&= x^{n-1}+\sum_{j=1}^{\lfloor (n-2)/2\rfloor}\binom{n-j-1}{j}x^{n-2j-1}=\sum_{j=0}^{\lfloor (n-2)/2\rfloor}\binom{n-j-1}{j}x^{n-2j-1}\\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n-j-1}{j}x^{n-2j-1}=g_n(x).
\end{aligned}
$$

+ Với n lẻ, $n=2k+1, k\in\mathbb{Z}^+$.

Chứng minh tương tự ta cũng thấy $g_n(x)$ thỏa mãn công thức truy hồi $g_n(x) = xg_{n-1}(x)+g_{n-2}(x)$.

Ta được $g_n(x)=f_n(x), \forall n\geq 1$.

Cách 2: Chúng ta có

$$\frac{y}{1-xy-y^2}=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)\,y^n \tag{1}$$

Nhưng

$$\frac{1}{1-2zt+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^j\binom{n-j}{j}(2t)^{n-2j}\right]z^n \tag{2}$$

$$U_n(t)=\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^j\binom{n-j}{j}(2t)^{n-2j}$$

là *đa thức Chebyshev* lọai hai. Đặt $x=2it; z=it$ thì

$$\frac{1}{1-xy-y^2}=\sum_{n=0}^{\infty}i^nU_n(x/2i)y^n$$

Do đó

$$\frac{y}{1-xy-y^2}=\sum_{n=0}^{\infty}i^nU_n(x/2i)y^{n+1} \tag{3}$$

Ta được

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= i^n U_n(x/2i) \\ &= i^n \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j \left(\begin{array}{c} n-j \\ j \end{array} \right) (x/i)^{n-2j} \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\begin{array}{c} n-j \\ j \end{array} \right) x^{n-2j} \end{aligned}$$

Do đó

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \left(\begin{array}{c} n-j-1 \\ j \end{array} \right) x^{n-2j-1}$$

□

Định lý 2. *Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là nghiệm của phương trình bậc hai $t^2 - xt - 1 = 0$;*

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2} \ \text{ và } \ \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}$$

Khi đó

$$f_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

và

$$l_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x)$$

Chứng minh. Tương tự với $p(x) = x, q(x) = 1, a_1(x) = l_1(x) = x, a_0(x) = l_0(x) = 2$ chúng ta được

$$\begin{aligned} l_n(x) = a_n(x) &= \frac{x - 2\beta(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \alpha^n(x) - \frac{x - 2\alpha(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \beta^n(x) \\ &= \frac{[\alpha(x) + \beta(x)] - 2\beta(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \alpha^n(x) - \frac{[\alpha(x) + \beta(x)] - 2\alpha(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \beta^n(x) \\ &= \alpha^n(x) + \beta^n(x) \end{aligned}$$

□

Định lý 3. $x \sum\limits_{1}^{n} f_i(x) = f_{n+1}(x) + f_n(x) - 1$

Chứng minh. Sử dụng hệ thức truy hồi của đa thức Fibonacci, ta được

$$\sum_{i=1}^{n} f_{i+1}(x) = x \sum_{i=1}^{n} f_i(x) + \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}(x)$$

hay

$$f_2(x) + f_3(x) + ... + f_n(x) + f_{n+1}(x) = x \sum_{i=1}^{n} f_i(x) + [f_0(x) + f_1(x) + ... + f_{n-1}(x)]$$

Do đó

$$f_n(x) + f_{n+1}(x) = x\sum_{i=1}^{n} f_i(x) + f_0(x) + f_1(x)$$

Mà $f_0(x) = 0, f_1(x) = 1$ nên

$$x\sum_{1}^{n} f_i(x) = f_{n+1}(x) + f_n(x) - 1$$

□

Hệ quả 1. $\sum_{1}^{n} F_i = F_{n+1} - 1$

Chứng minh. Ta có

$$\sum_{1}^{n} f_i(1) = f_{n+1}(1) + f_n(1) - 1$$

Mà $f_i(1) = F_i$ và $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ nên ta được

$$\sum_{1}^{n} F_i = F_{n+1} - 1$$

□

Tính chất 1. *(Liên hệ giữa đa thức Fibonacci và Lucas)*

i) $l_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x)$

ii) $l_n(x) = xf_n(x) + 2f_{n-1}(x)$

iii) $xl_n(x) = f_{n+2}(x) - f_{n-2}(x)$

Mệnh đề 1. *Giả sử $\{f_n(x)\}$ là một dãy đa thức Fibonacci. Khi đó, nếu*

$$Q(x) = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

thì

$$Q^n(x) = \begin{bmatrix} f_{n+1}(x) & f_n(x) \\ f_n(x) & f_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

trong đó $n \geq 1$.

Tính chất 2. *Chúng ta có*

i) $x\sum_{1}^{n} f_i(x) = f_{n+1}(x) + f_n(x) - 1$

ii) $x\sum_{1}^{n} l_i(x) = l_{n+1}(x) + l_n(x) - x - 2$

Tính chất 3. *Chúng ta có một số tính chất sau*

i) $f_{n+1}(x)f_{n-1}(x) - f_n^2(x) = (-1)^n$ *(công thức Cassini)*

ii) $f_{n+1}(x)f_{n-2}(x) - f_n(x)f_{n-1}(x) + x(-1)^n = 0$

iii) $f_{m+n}(x) = f_{m+1}(x)f_n(x) + f_m(x)f_{n-1}(x)$

iv) $l_{n+1}(x)l_{n-1}(x) - l_n^2(x) = (-1)^{n-1}(x^2+4)$

v) $l_{n+1}(x)l_{n-2}(x) - l_n(x)l_{n-1}(x) + x(-1)^{n-1}(x^2+4) = 0$

vi) $f_n^2(x) + f_{n+1}^2(x) = f_{2n+1}(x)$

vii) $f_n'(x) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} f_i(x)f_{n-i}(x)$ *trong đó* $f_n'(x)$ *là đạo hàm của* $f_n(x)$ *theo biến* x *và* $n \geq 1$.

Tính chất 4. *Chúng ta có một số kết quả sau*

i) $\alpha^n(x) = \frac{l_n(x)+\sqrt{x^2+4}f_n(x)}{2}$

ii) $\beta^n(x) = \frac{l_n(x)-\sqrt{x^2+4}f_n(x)}{2}$

Tính chất 5. *(Liên hệ giữa đa thức Fibonacci và Lucas)*

i) $f_m(x) = l_k(x)f_{m-k}(x) + (-1)^{k+1}f_{m-2k}(x)$

ii) $l_n^2(x) - (x^2+4)f_n^2(x) = 4(-1)^n$

iii) $l_n^2(x) + l_{n+1}^2(x) = (x^2+4)f_{2n+1}(x)$

iv) $f_{m+n}(x) + (-1)^n f_{m-n}(x) = f_m(x)l_n(x)$

v) $f_m(x)l_n(x) + f_n(x)l_m(x) = 2f_{m+n}(x)$

Tính chất 6. $f_n(l_{2m+1}(x)) = \frac{f_{(2m+1)n}(x)}{f_{2m+1}(x)}$

Hệ quả 2. *i)* $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$

ii) $F_n = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \begin{pmatrix} n-j-1 \\ j \end{pmatrix}$

iii) $F_{m+n} + (-1)^n F_{m-n} = F_mL_n$

iv) $F_{n+1}.F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$

v) $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$

Ví dụ 1. *i)*

$$\begin{aligned} f_5(x) &= \sum_0^2 \begin{pmatrix} 4-j \\ j \end{pmatrix} x^{4-2j} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} x^4 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} x^0 \\ &= x^4 + 3x^2 + 1. \end{aligned}$$

ii) $(x+\sqrt{x^2+4})^5 - (x-\sqrt{x^2+4})^5 = 32(x^4+3x^2+1)\sqrt{x^2+4}$

Do đó

$$f_5(x) = x^4 + 3x^2 + 1$$

iii)

$$x\sum_1^4 f_i(x) = x[1 + x + (x^2+1) + (x^3+2x)]$$

$$
\begin{aligned}
&= x^4 + x^3 + 3x^2 + x \\
f_5(x) + f_4(x) - 1 &= (x^4 + 3x^3 + 1) + (x^3 + 2x) - 1 \\
&= x^4 + x^3 + 3x^2 + x \\
&= x\sum_{1}^{4} f_i(x).
\end{aligned}
$$

iv) Với $m = 3$ và $n = 4$ thì

$$
\begin{aligned}
f_{m+1}(x)f_{n+1}(x) + f_m(x)f_n(x) &= f_4(x)f_5(x) + f_3(x)f_4(x) \\
&= (x^3 + 2x)(x^4 + 3x^2 + 1) + (x^2 + 1)(x^3 + 2x) \\
&= x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x \\
&= f_8(x) = f_{m+n+1}(x)
\end{aligned}
$$

v)

$$
\begin{aligned}
f_6(x) =& x^5 + 4x^3 + 3x \\
f_6'(x) =& 5x^4 + 12x^2 + 3 \\
\sum_{i=0}^{5} f_i(x)f_{6-i}(x) =& f_1(x)f_5(x) + f_2(x)f_4(x) \\
&+ f_3(x)f_3(x) + f_4(x)f_2(x) + f_5(x)f_1(x) \\
=& 2f_1(x)f_5(x) + 2f_2(x)f_4(x) + f_3^2(x) \\
=& 5x^4 + 12x^2 + 3 \\
=& f_6'(x)
\end{aligned}
$$

2 Đa thức $G_n(x)$ và đa thức $H_n(x)$

Sử dụng dãy Pascal trong bảng 13.3, H. W. Gould năm 1965 đã nghiên cứu đa thức

$$G_n(x) = \sum_{j=0}^{n} A(n,j)x^j$$

trong đó

$$A(n,j) = \binom{n - \lfloor (j+1)/2 \rfloor}{\lfloor j/2 \rfloor}$$

xác định điểm chuyển thứ j trên dòng n.

Vì $A(n,2k) = \binom{n-k}{k}$ và $A(n,2k+1) = \binom{n-k-1}{k}$, nên $G_n(x)$ có thể viết lại

$$G_n(x) = \sum_{0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} x^{2k} + \sum_{0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-k-1}{k} x^{2k+1}$$

Khi đó

$$G_{n+1}(x) = \sum_{0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \begin{pmatrix} n-k+1 \\ k \end{pmatrix} x^{2k} + \sum_{0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix} x^{2k+1}$$

và

$$\begin{aligned} x^2 G_n(x) &= \sum_{0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix} x^{2k+2} + \sum_{0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \begin{pmatrix} n-k-1 \\ k \end{pmatrix} x^{2k+3} \\ &= \sum_{1}^{\lfloor (n+2)/2 \rfloor} \begin{pmatrix} n-k+1 \\ k-1 \end{pmatrix} x^{2k} + \sum_{1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \begin{pmatrix} n-k \\ k-1 \end{pmatrix} x^{2k+1} \end{aligned}$$

Dùng đồng nhất thức Pascal ta được

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) + x^2 G_n(x) &= \sum_{0}^{\lfloor (n+2)/2 \rfloor} \begin{pmatrix} n-k+2 \\ k \end{pmatrix} x^{2k} + \sum_{0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \begin{pmatrix} n-k+1 \\ k \end{pmatrix} x^{2k+1} \\ &= G_{n+2}(x) \end{aligned}$$

Do đó $G_n(x)$ thỏa mãn công thức truy hồi

$$G_{n+2}(x) = G_{n+1}(x) + x^2 G_n(x)$$

Sử dụng đa thức $G_n(x)$ Gould mở rộng nghiên cứu lên đa thức $H_n(x)$:

$$H_n(x) = x^n G_n(1/x) = \sum_{j=0}^{n} A(n,j) x^{n-j}$$

Chú ý rằng:

$$\begin{aligned} H_{n+2}(x) &= x^{n+2} G_{n+2}(1/x) \\ &= x^{n+2}[G_{n+1}(1/x) + x^{-2} G_n(1/x)] \\ &= x^{n+2} G_{n+1}(1/x) + x^n [G_n(1/x) \\ &= x H_{n+1}(x) + H_n(x). \end{aligned}$$

trong đó $H_0(x) = G_0(1/x) = 1$ và $H_1(x) = x G_1(1/x) = x + 1$. Đây là một đa thức dạng Fibonacci được nghiên cứu bởi Catalan.

Nhận xét 3. $\deg H_n(x) = n, \quad \forall n \geq 1$

Tính chất 7.

$$x \sum_{1}^{n} H_i(x) = H_{n+1}(x) + H_n(x) - x - 2$$

Tính chất 8. *Chúng ta có*

i) $H_{n+1}(x) H_{n-1}(x) - H_n^2(x) = x(-1)^n$

ii) $H_{n+1}(x) H_{n-2}(x) - H_n(x) H_{n-1}(x) + x^2(-1)^n = 0$

Chứng minh. Suy ra trực tiếp từ định lý **??** và tính chất **??** với $q(x) = 1, H_0(x) = 1, H_1(x) = x + 1, H_2(x) = x^2 + x + 1$. □

Định lý 4. *Với $n \geq 0$ chúng ta có*

$$H_n(x) = \sum_{0}^{n} \binom{n - \lfloor (i+1)/2 \rfloor}{\lfloor i/2 \rfloor} x^{n-i}$$

Chứng minh. Chứng minh tương tự đa thức $f_n(x)$. □

Định lý 5. *Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các nghiệm của phương trình đặc trưng $t^2 - xt - 1 = 0$;*

$$\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2} \quad \text{và} \quad \beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}$$

Khi đó

$$H_n(x) = \frac{1}{2\left(\alpha(x) - \beta(x)\right)} \left\{ \left(-x + 2 + \sqrt{x^2+4}\right) \alpha^n(x) - \left(-x + 2 - \sqrt{x^2+4}\right) \beta^n(x) \right\}$$

trong đó $n \geq 0$.

Chứng minh. Chúng minh định lý bằng các cách khác nhau bằng cách suy ra trực tiếp từ định lý **??**, **??**, **??**. □

Tính chất 9. *Chúng ta có một số kết quả sau*

i) $\alpha^n(x) = \frac{1}{2}\left[l_n(x) + \frac{2\sqrt{x^2+4}}{x+2+\sqrt{x^2+4}} H_n(x)\right]$

ii) $\beta^n(x) = \frac{1}{2}\left[l_n(x) - \frac{2\sqrt{x^2+4}}{x+2+\sqrt{x^2+4}} H_n(x)\right]$

Chứng minh. Sử dụng công thức Binet của $l_n(x)$ và $H_n(x)$ chúng ta có. i)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[l_n(x) + \frac{2\sqrt{x^2+4}}{x+2+\sqrt{x^2+4}} H_n(x)\right] &= \frac{1}{2}\left[\alpha^n(x) + \beta^n(x) + \alpha^n(x) - \beta^n(x)\right] \\ &= \alpha^n(x) \end{aligned}$$

ii) Chứng minh tương tự i). □

Tính chất 10. *Với $n \geq 0$ chúng ta có*

i) $f_{n+1}(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^{n+i} H_i(x)$

ii) $f_{n+1}(x) + f_n(x) = H_n(x)$

Chứng minh. i) Vì $f_1(x) + f_0(x) = 1 + 0 = 1 = H_0(x)$ và $f_2(x) + f_1(x) = x + 1 = H_1(x)$, suy ra $H_n(x) = f_{n+1}(x) + f_n(x)$.

Do đó

$$(-1)^{i+1} H_i(x) = (-1)^{i+1} f_{i+1}(x) - (-1)^i f_i(x)$$

nên

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}H_i(x)=\sum_{i=0}^{n}\left[(-1)^{i+1}f_{i+1}(x)-(-1)^i f_i(x)\right]$$
$$=-f_0(x)+(-1)^{n+1}f_{n+1}(x)=(-1)^{n+1}f_{n+1}(x).$$

Vậy

$$f_{n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+i}H_i(x)$$

ii) Theo tính chất i) chúng ta có

$$\begin{aligned}
&f_{n+1}(x)+f_n(x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+i}H_i(x)+\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n+i-1}H_i(x)\\
=&\left[(-1)^n H_0(x)+(-1)^{n-1}H_0(x)\right]+\left[(-1)^{n+1}H_1(x)+(-1)^n H_1(x)\right]+\\
&+...+\left[(-1)^{2n-1}H_{n-1}(x)+(-1)^{2n-2}H_{n-1}(x)\right]+(-1)^{2n}H_n(x)\\
=&H_n(x)
\end{aligned}$$

□

Mệnh đề 2. *(Liên hệ với số Fibonacci)*
i) $G_n(1)=F_{n+2}, n\geq 0$
ii) $H_n(1)=F_{n+1}, n\geq 0$

3 Đa thức $g_n(x)$ và đa thức $h_n(x)$

Chúng ta có thể thu được đa thức $g_n(x)$ và $h_n(x)$ từ đa thức $f_n(x)$ và $l_n(x)$ bằng cách thay đổi dấu cộng thành dấu trừ trong công thức truy hồi.

$$\begin{aligned}
&g_0(x)=0 \qquad g_1(x)=1\\
&g_n(x)=xg_{n-1}(x)-g_{n-2}(x) \quad n\geq 2\\
&h_0(x)=2 \qquad h_1(x)=x\\
&h_n(x)=xh_{n-1}(x)-h_{n-2}(x) \quad n\geq 2
\end{aligned}$$

Hai đa thức này có mối quan hệ với đa thức Chebyshev loại một và loại hai.

Nhận xét 4. *Chúng ta có*
$\deg g_n(x)=n-1, \quad \forall n\geq 1$
$\deg h_n(x)=n, \quad \forall n\geq 0$

Tính chất 11. *Chúng ta có*
i) $(x-2)\sum\limits_{1}^{n}g_i(x)=g_{n+1}(x)-g_n(x)-1$
ii) $(x-2)\sum\limits_{1}^{n}h_i(x)=h_{n+1}(x)-h_n(x)-x+2$

Tính chất 12. *Chúng ta có một số tính chất sau :*

i) $g_{n+1}(x)g_{n-1}(x) - g_n^2(x) = -1$

ii) $g_{n+1}(x)g_{n-2}(x) + g_n(x)g_{n-1}(x) + x = 0$

iii) $h_{n+1}(x)h_{n-1}(x) - h_n^2(x) = x^2 - 4$

iv) $h_{n+1}(x)h_{n-2}(x) + h_n(x)h_{n-1}(x) - x(x^2 - 4) = 0$

Chứng minh. Suy ra trực tiếp từ định lý **??** và tính chất **??**. □

Định lý 6. *Với* $n \geq 0$ *chúng ta có*

$$g_n(x) = \sum_{0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \begin{pmatrix} n-i-1 \\ i \end{pmatrix} (-1)^i \, x^{n-2i-1}$$

Chứng minh. Chứng minh tương tự như đa thức $f_n(x)$. □

Định lý 7. *Giả sử* $\gamma(x)$ *và* $\delta(x)$ *là các nghiệm của phương trình đặc trưng* $t^2 - xt + 1 = 0$*;*

$$\gamma(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} \quad \text{và} \quad \delta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}$$

Khi đó

$$g_n(x) = \frac{\gamma^n(x) - \delta^n(x)}{\gamma(x) - \delta(x)} \quad \text{và} \quad h_n(x) = \gamma^n(x) + \delta^n(x)$$

trong đó $x \neq 2$.

Chứng minh. Chúng minh định lý bằng các cách khác nhau bằng cách suy ra trực tiếp từ định lý **??**, **??**, **??**. □

Tính chất 13. *Chúng ta có*

i) $\gamma^n(x) = \frac{h_n(x) + \sqrt{x^2-4}g_n(x)}{2}$

ii) $\delta^n(x) = \frac{h_n(x) - \sqrt{x^2-4}g_n(x)}{2}$

Chứng minh. Áp dụng công thức Binet của $h_n(x)$ và $g_n(x)$. □

Tính chất 14. *(Liên hệ giữa đa thức* $g_n(x)$ *và đa thức* $h_n(x)$*)*

i) $h_n^2(x) - (x^2 - 4)g_n^2(x) = 4$

ii) $h_n(x) = g_{n+1}(x) - g_{n-1}(x)$

Chứng minh. i) Áp dụng định lý 7 chúng ta có

$$\begin{aligned} h_n^2(x) - (x^2 - 4)g_n^2(x) &= [\gamma^n(x) + \delta^n(x)]^2 - (x^2 - 4).\frac{[\gamma^n(x) - \delta^n(x)]^2}{[\gamma(x) + \delta(x)]^2} \\ &= [\gamma^n(x) + \delta^n(x)]^2 - [\gamma^n(x) - \delta^n(x)]^2 \\ &= 4\gamma^n(x).\delta^n(x) = 4\frac{1}{4}[x^2 - (x^2 - 4)]^{2^n} \\ &= 4 \end{aligned}$$

ii) Chúng ta chứng minh bằng phương pháp qui nạp.

Với $n = 1$ chúng ta có $h_1(x) = x = g_2(x) - g_0(x)$.

Giả sử công thức đúng với mọi $n = 1, 2, ..., n-1$ $(n \geq 2)$. Khi đó

$$\begin{aligned}
h_{n+1}(x) &= xh_n(x) - h_{n-1}(x) \\
&= x[g_{n+1}(x) - g_{n-1}(x)] - [g_n(x) - g_{n-2}(x)] \\
&= [xg_{n+1}(x) - g_n(x)] - [xg_{n-1}(x) - g_{n-2}(x)] \\
&= g_{n+2}(x) - g_n(x)
\end{aligned}$$

Vậy $h_n(x) = g_{n+1}(x) - g_{n-1}(x)$. □

Tính chất 15. $g_n(l_{2m}(x)) = \frac{f_{2mn}(x)}{f_{2m}(x)}$

Định lý 8. $f_{nk}(x) = \begin{cases} f_k(x).f_n(l_k(x)) & \text{nếu } k \text{ lẻ} \\ f_k(x).g_n(l_k(x)) & \text{nếu } k \text{ chẵn} \end{cases}$

Chứng minh. Suy ra từ tính chất 6 và 15. □

Hệ quả 3. $f_k(x) | f_{nk}(x)$

Hệ quả 4. $f_{nk}(x) = f_k(x) \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-j-1}{j} (-1)^{(k+1)j} l_k^{n-2j-1}(x)$

Định lý 9. $l_n(l_{2m-1}(x)) = l_{(2m-1)n}(x)$ *và* $h_n(l_{2m}(x)) = l_{2mn}(x)$

Chứng minh. Chúng ta có

$$\begin{aligned}
l_n(l_{2m-1}(x)) &= \alpha^n(l_{2m-1}(x)) + \beta^n(l_{2m-1}(x)) \\
&= \alpha^{(2m-1)n}(x) + \beta^{(2m-1)n}(x) = l_{(2m-1)n}(x)
\end{aligned}$$

Vì $\gamma(l_{2m}(x)) = \alpha^{2m}(x)$ và $\delta(l_{2m}(x)) = \beta^{2m}(x)$; $h_n(x) = \gamma^n(x) + \delta^{2m}(x)$ nên

$$h_n(l_{2m}(x)) = \alpha^{2mn}(x) + \beta^{2mn}(x) = l_{2mn}(x)$$

□

Hệ quả 5. $l_n(x) \left| l_{(2m-1)n}(x) \right.$

Chứng minh. Chúng ta có $l_1(x) = x, l_2(x) = x^2 + 2$

Hơn nữa theo công thức truy hồi ta có

$$l_{2k-1}(x) = xl_{2k-2}(x) + l_{2k-3}(x)$$

nên $x \left| l_{2k-1}(x) \right. \quad \forall k \geq 2$.

Tương tự $x \left| h_{2k-1}(x) \right. \quad \forall k \geq 2$.

Vì $l_{2m-1}(l_{2k-1}(x)) = l_{(2m-1)(2k-1)}(x)$ và $l_{2k-1}(x) \left| l_{2m-1}(l_{2k-1}(x)) \right.$ nên suy ra $l_{2k-1}(x) \left| l_{(2m-1)(2k-1)}(x) \right.$.

Tương tự $h_{2m-1}(l_{2k}(x)) = l_{(2m-1)(2k)}(x)$ và $l_{2k}(x) \left| h_{2m-1}(l_{2k}(x)) \right.$, vì vậy ta được $l_{2k}(x) \left| l_{(2m-1)(2k)}(x) \right.$.

Do đó khi n lẻ hoặc chẵn ta đều có $l_n(x) \left| l_{(2m-1)n}(x) \right.$. □

Hệ quả 6. *Chúng ta có*

i) $F_k \,|F_{nk}$

ii) $L_n \left| L_{(2m-1)n}\right.$

Ví dụ 2. *Các ví dụ áp dụng*

i)

$$\begin{aligned} f_6(x) &= f_2(x)\sum_0^1 \begin{pmatrix} 2-j \\ j \end{pmatrix}(-1)^j l_2^{2-2j}(x) \\ &= x\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} l_2^2(x) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} l_2^0(x)\right] = x\left[\left(x^2+2\right)^2 - 1\right] \\ &= x^5 + 4x^3 + 3x \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} l_{3.4}(x) = l_{12}(x) &= x^{12} + 12x^{10} + 54x^8 + 12x^6 + 105x^4 + 36x^2 + 2 \\ &= (x^4 + 4x^2 + 2)(x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 1) \\ &= l_4(x).[l_8(x) - 1] \end{aligned}$$

Vì vậy $l_4(x)\,|l_{3.4}(x)$.

4 Đa thức Jacobsthal

Định nghĩa 3. *Đa thức* $J_n(x), n \in \mathbb{Z}$ *thỏa mãn hệ thức truy hồi*

$$J_n(x) = J_{n-1}(x) + xJ_{n-2}(x), \;\; n \geq 2$$

trong đó $J_1(x) = 1, J_0(x) = 0$ *được gọi là đa thức Jacobsthal.*

Nhận xét 5. *Chúng ta có một số nhận xét sau:*

+ Đa thức Jacobsthal $J_{2n-1}(x)$ *và* $J_{2n}(x)$ *có bậc giống nhau.*

+ Bậc của $J_n(x)$ *là* $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$.

+ Hệ số của số hạng cao nhất của $J_{2n-1}(x)$ *là 1, và của* $J_{2n}(x)$ *là n.*

+ Các hệ số của $J_n(x)$ *giống các hệ số của* $f_n(x)$ *nhưng có bậc khác nhau.*

+ Các hệ số của đa thức Jacobsthal nằm trên đường chéo tăng chỉnh trái của tam giác Pascal, với các bậc khác nhau.

Định lý 10. *Với mọi* $n \geq 1$ *chúng ta có*

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \begin{pmatrix} \lfloor n/2 \rfloor + j \\ \lfloor (n-1)/2 \rfloor - j \end{pmatrix} x^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor - j}$$

Chứng minh. Vì các hệ số của $J_n(x)$ giống các hệ số của $f_n(x)$ với các bậc khác nhau nên ta có điều phải chứng minh. □

Tính chất 16. $x\sum\limits_{1}^{n} J_i(x) = J_{n+1}(x) + xJ_n(x) - 1$

Tính chất 17. *Chúng ta có*

i) $J_{n+1}(x)J_{n-1}(x) - J_n^2(x) = (-1)^n x^{n-1}$

ii) $J_{n+1}(x)J_{n-2}(x) - J_n(x)J_{n-1}(x) + (-1)^n x^{n-2} = 0$

Chứng minh. Áp dụng trực tiếp từ định lý **??** và tính chất **??** với $q(x) = x, J_0(x) = 0, J_1(x) = 1, J_2(x) = 1$. □

Định lý 11. *Giả sử* $r(x)$ *và* $s(x)$ *là nghiệm của phương trình đặc trưng* $t^2 - t - x = 0$;

$$r(x) = \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2} \quad \text{và} \quad s(x) = \frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}$$

thì

$$J_n(x) = \frac{r^n(x) - s^n(x)}{\sqrt{1+4x}}$$

trong đó $n \geq 1$

Chứng minh. Chúng ta có thể chứng minh định lý bằng các cách khác nhau bằng cách sử dụng các định lý **??**, **??**, **??** với $p(x) = 1, q(x) = x, a_0(x) = J_0(x) = 0, a_1(x) = J_1(x) = 1, \alpha(x) = r(x), \beta(x) = s(x), \alpha(x) - \beta(x) = \sqrt{1+4x}$. □

Ví dụ 3.

$$\begin{aligned} J_7(x) &= \sum_{0}^{3} \begin{pmatrix} 3+j \\ 3-j \end{pmatrix} x^{3-j} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= x^3 + 6x^2 + 5x + 1 \end{aligned}$$

Tương tự, $J_8(x) = 4x^3 + 10x^2 + 6x + 1$

5 Đa thức $K_n(x)$

Định nghĩa 4. *Đa thức* $K_n(x), n \geq \mathbb{Z}$ *được xác định bởi hệ thức truy hồi*

$$K_n(x) = K_{n-1}(x) + xK_{n-2}(x), \qquad n \geq 3$$

trong đó $K_1(x) = 1$ *và* $K_2(x) = x$.

Nhận xét 6. *Chúng ta có một số nhận xét sau:*

+ Bậc của $K_n(x)$ *là* $\lfloor n/2 \rfloor$, *vì vậy* $K_{2n}(x)$ *và* $K_{2n+1}(x)$ *có cùng bậc.*

+ Hệ số của số hạng cao nhất của $K_n(x)$ *là*

$$\begin{cases} 1 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \lfloor (n+1)/2 \rfloor & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

+ $x\,|K_n(x)$ *với mọi* $n \geq 2$. *(Giả sử* $n \neq 0$ *)*

+ Khi $n \geq 3$ *thì hệ số của* x *là 2.*

Tính chất 18. *i)* $x\sum\limits_{1}^{n} K_i(x) = K_{n+1}(x) + xK_n(x) - x$

ii) $K_{n+1}(x)K_{n-1}(x) - K_n^2(x) = (x-2)(-x)^{n-1}$

iii) $K_{n+1}(x)K_{n-2}(x) - K_n(x)K_{n-1}(x) + (-1)^{n-1}(x-2)x^{n-2} = 0$

Chứng minh. Suy ra trực tiếp từ định lý **??** và tính chất **??** với $q(x) = x, K_0(x) = \frac{x-1}{x}, K_1(x) = 1, K_2(x) = x$. □

Định lý 12. *$K_n(x) = x[J_{n-1}(x) + J_{n-2}(x)]$ trong đó $n \geq 2$.*

Mệnh đề 3. *Hàm sinh của $K_n(x)$ là*

$$g(t) = \frac{t + (x-1)t^2}{1 - t - xt^2}, n \geq 1$$

Hệ quả 7. *Chúng ta có một số hệ quả sau*

i) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3.$

ii) $F_{2n} = 1 + \sum\limits_{1}^{n-1} \frac{n+3j-1}{2j} \begin{pmatrix} n+j-2 \\ n-j-1 \end{pmatrix}$

iii) $F_{2n+1} = \sum\limits_{0}^{n-1} \frac{n+3j-1}{2j} \begin{pmatrix} n+j-1 \\ n-j-1 \end{pmatrix}$

Chứng minh. Sử dụng $K_m(1) = F_m = J_m(1)$ và định lý 12, định lý **??** ta được điều phải chứng minh. □

Ví dụ 4. *Một số ví dụ minh họa.*

i)

$$\begin{aligned} K_9(x) &= x[J_8(x) + J_7(x)] \\ &= x[(4x^3 + 10x^2 + 6x + 1) + (x^3 + 6x^2 + 5x + 1)] \\ &= 5x^4 + 16x^3 + 11x^2 + 2x \end{aligned}$$

Tương tự, $K_8(x) = x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 2x.$

ii)

$$\begin{aligned} K_6(x)/x &= x^2 + \sum_{1}^{2} \frac{2+3j}{2j} \begin{pmatrix} 1+j \\ 2-j \end{pmatrix} x^{2-j} \\ &= x^2 + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= x^2 + 5x + 2 \\ K_6(x) &= x^3 + 5x^2 + 2x \end{aligned}$$

Tương tự,

$$K_7(x)/x = \sum_{0}^{2} \frac{4+3j}{2j+1} \begin{pmatrix} 2+j \\ 2-j \end{pmatrix} x^{2-j}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} x^2 + \frac{7}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x + \frac{10}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 4x^2 + 7x + 2 \\
K_7(x) &= 4x^3 + 7x^2 + 2x
\end{aligned}
$$

iii)

$$
\begin{aligned}
F_{11} &= \sum_{0}^{4} \frac{6+3j}{2j}\begin{pmatrix} 4+j \\ 4-j \end{pmatrix} \\
&= 6\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{9}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{12}{5}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{15}{7}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{18}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 6 + 30 + 36 + 15 + 2 = 89
\end{aligned}
$$

và $F_{12} = 1 + \sum_{1}^{5} \frac{5+3j}{2j}\begin{pmatrix} 4+j \\ 5-j \end{pmatrix} = 144$

6 Đa thức Morgan-Voyce

Định nghĩa 5. *Đa thức Morgan-Voyce $b_n(x)$ và $B_n(x)$ được định nghĩa bởi hệ thức truy hồi*

$$b_n(x) = xB_{n-1}(x) + b_{n-1}(x) \tag{4}$$

$$B_n(x) = (x+1)B_{n-1}(x) + b_{n-1}(x) \tag{5}$$

trong đó $b_0(x) = 1 = B_0(x)$ và $n \geq 1$.

Trừ (4) và (5) vế theo vế chúng ta được

$$b_n(x) = B_n(x) - B_{n-1}(x) \tag{6}$$

và từ hệ thức (4) chúng ta được

$$xB_n(x) = b_{n+1}(x) - b_n(x) \tag{7}$$

Thế $b_n(x)$ từ (6) vào (4) chúng ta thu được hệ thức truy hồi:

$$B_n(x) = (x+2)B_{n-1}(x) - B_{n-2}(x) \qquad n \geq 2 \tag{8}$$

trong đó $B_0(x) = 1$ và $B_1(x) = x + 2$.

Từ (4), (5), (7) chúng ta được

$$
\begin{aligned}
b_n(x) =& xB_{n-1}(x) + b_{n-1}(x) \\
=& x[(x+1)B_{n-2}(x) + b_{n-2}(x)] + b_{n-1}(x) \\
=& x[B_{n-2}(x) + b_{n-1}(x)] + b_{n-1}(x) \\
=& [b_{n-1}(x) - b_{n-2}(x)] + (x+1)b_{n-1}(x) \\
=& (x+2)b_{n-1}(x) - b_{n-2}(x)
\end{aligned}
$$

Vậy

$$b_n(x) = (x+2)b_{n-1}(x) - b_{n-2}(x) \qquad n \geq 2 \tag{9}$$

trong đó $b_0(x) = 1$ và $b_1(x) = x + 1$.

Nhận xét 7. *Với* $n \geq 0$ *chúng ta có*

$\deg B_n(x) = n$

$\deg b_n(x) = n$

Tính chất 19. *Chúng ta có*

i) $x \sum_{1}^{n} B_i(x) = B_{n+1}(x) - B_n(x) - x - 1$

ii) $x \sum_{1}^{n} b_i(x) = b_{n+1}(x) - b_n(x) - x$

Tính chất 20. *(Một số tính chất cơ bản của đa thức Morgan-Voyce)*

i) $xB_n(x) = (x+1)b_n(x) - b_{n-1}(x)$

ii) $B_{n+1}(x) - B_{n-1}(x) = b_{n+1}(x) + b_n(x)$

iii) $x[B_n(x) + B_{n-1}(x)] = b_{n+1}(x) - b_{n-1}(x)$

Định lý 13. *Với* $n \geq 0$ *chúng ta có*

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+i+1}{n-i} x^i \tag{10}$$

và

$$b_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+i}{n-i} x^i \tag{11}$$

Định lý 14. *Giả sử* $r(x)$ *và* $s(x)$ *là nghiệm của phương trình đặc trưng* $t^2-(x+2)t+1=0$;

$$r(x) = \frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2} \quad \text{và} \quad s(x) = \frac{x+2-\sqrt{x^2+4x}}{2}$$

thì

$$B_n(x) = \frac{r^{n+1}(x) - s^{n+1}(x)}{r(x) - s(x)}$$

và

$$b_n(x) = \frac{1}{r(x) - s(x)} \left\{ \left(x + \sqrt{x^2+4x}\right) r^n(x) - \left(x - \sqrt{x^2+4x}\right) s^n(x) \right\}$$

trong đó $n \geq 1$

Chứng minh. Sử dụng kiến thức sai phân chúng ta sẽ chứng minh công thức Binet của $B_n(x)$. Theo giả thiết nghiệm của phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi (8) là

$$r(x) = \frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2} \quad \text{và} \quad s(x) = \frac{x+2-\sqrt{x^2+4x}}{2}$$

trong đó $r(x) + s(x) = x + 2, r(x) - s(x) = \sqrt{x^2+4x}$ và $r(x).s(x) = 1$. Vì vậy nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi (8) là $B_n(x) = Cr^n(x) + Ds^n(x)$, trong đó hệ số C và D được xác định.

Sử dụng các điều kiện ban đầu $B_0(x) = 1$ và $B_1(x) = x + 2 = r(x) + s(x)$ chúng ta được hệ phương trình tuyến tính sau

$$C + D = 1$$

$$Cr(x) + Ds(x) = r(x) + s(x)$$

Giải hệ chúng ta được

$$C = \frac{r(x)}{\sqrt{x^2 + 4x}} \quad \text{và} \quad D = \frac{-s(x)}{\sqrt{x^2 + 4x}}$$

Do đó

$$B_n(x) = \frac{r^{n+1}(x) - s^{n+1}(x)}{r(x) - s(x)}$$

trong đó $n \geq 0$.

Ngoài ra ta còn có thể chứng minh định lý bằng các cách khác nhau từ các định lý **??**, **??**, **??**.

Với $b_n(x)$ chúng ta chứng minh tương tự $B_n(x)$. □

Mệnh đề 4. *(Hàm sinh của đa thức Morgan-Voyce)*

$$\sum_{n \geq 0} B_n(x) t^n = \frac{1}{1 - (x + 2)t + t^2}$$

$$\sum_{n \geq 0} b_n(x) t^n = \frac{1 - t}{1 - (x + 2)t + t^2}$$

Chứng minh. Chúng ta có thể chứng minh mệnh đề bằng cách suy ra trực tiếp từ mệnh đề **??**. Ngoài ra chúng ta cũng có thể chứng minh bằng cách sau

Vì nghiệm của phương trình đặc trưng $t^2 - (x + 2)t + 1 = 0$ là $r(x)$ và $s(x)$, nên

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - (x + 2)t + t^2} &= \frac{1}{(1 - r(x)t)(1 - s(x)t)} \\ &= \frac{A}{1 - r(x)t} + \frac{B}{1 - s(x)t} \end{aligned}$$

dùng đồng nhất thức ta được $A = r/(r - s), B = -s/(r - s), r = r(x)$ và $s = s(x)$.

Từ đó ta được

$$\frac{1}{1 - (x + 2)t + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r^{n+1} - s^{n+1})t^n}{r - s} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) t^n \tag{12}$$

Do đó

$$\frac{t}{1 - (x + 2)t + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(x) t^n \tag{13}$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}
\frac{1-t}{1-(x+2)t+t^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1}(x)t^n \\
&= B_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [B_n(x) - B_{n-1}(x)]t^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)t^n
\end{aligned} \tag{14}$$

Phương trình (12) và (14) cho chúng ta hàm sinh của $B_n(x)$ và $b_n(x)$. □

Mệnh đề 5. *Giả sử $B_n(x)$ là đa thức Morgan-Voyce. Khi đó, nếu*

$$S(x) = \begin{bmatrix} x+2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

thì

$$S^n(x) = \begin{bmatrix} B_n(x) & -B_{n-1}(x) \\ B_{n-1}(x) & -B_{n-2}(x) \end{bmatrix}$$

trong đó $n \geq 1$.

Tính chất 21. *(Tính chất của đa thức Morgan-Voyce)*

i) $B_{n+1}(x)B_{n-1}(x) - B_n^2(x) = -1$
ii) $B_{n+1}(x)B_{n-2}(x) - B_n(x)B_{n-1}(x) + (x+2) = 0$
iii) $b_{n+1}(x)b_{n-1}(x) - b_n^2(x) = x$
iv) $b_{n+1}(x)b_{n-2}(x) - b_n(x)b_{n-1}(x) - x(x+2) = 0$
v) $B_{m+n}(x) = B_m(x)B_n(x) - B_{m-1}(x)B_{n-1}(x)$
vi) $B_{2n}(x) = B_n^2(x) - B_{n-1}^2(x)$
vii) $B_{2n-1}(x) = [B_n(x) - B_{n-2}(x)]B_{n-1}(x)$
viii) $(x+2)B_{2n-1}(x) = B_n^2(x) - B_{n-2}^2(x)$

Tính chất 22. *(Liên hệ giữa đa thức Morgan-Voyce và đa thức Fibonacci)*

i) $f_{2n}(x) = xB_{n-1}(x^2)$
ii) $f_{2n+1}(x) = b_n(x^2)$ *trong đó $n \geq 0$.*

Chứng minh. Cách 1: Sử dụng phương trình (13) và (14) chúng ta được

$$\frac{t(1-t^2)}{1-(x^2+2)t^2+t^4} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x^2)t^{2n+1}$$

và

$$\frac{xt^2}{1-(x^2+2)t^2+t^4} = \sum_{n=0}^{\infty} xB_{n-1}(x^2)t^{2n}$$

Cộng hai phương trình trên vế theo vế, chúng ta được

$$\begin{aligned}\frac{t(1+xt-t^2)}{(1+xt-t^2)(1-xt-t^2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} xB_{n-1}(x^2)t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x^2)t^{2n+1}\\ \frac{t}{1-xt-t^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} xB_{n-1}(x^2)t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x^2)t^{2n+1}\\ \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} xB_{n-1}(x^2)t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x^2)t^{2n+1}\end{aligned}$$

Do đó $f_{2n}(x) = xB_{n-1}(x^2)$ và $f_{2n+1}(x) = b_n(x^2)$. □

Tính chất 23. *(Liên hệ giữa $B_n(x)$ và $b_n(x)$)*
i) $b_{m+n}(x) = b_m(x)B_n(x) - b_{m-1}(x)B_{n-1}(x)$
ii) $b_{2n}(x) = B_n(x)b_n(x) - B_{n-1}(x)b_{n-1}(x)$
iii) $b_{2n+1}(x) = B_n(x)b_{n+1}(x) - B_{n-1}(x)b_n(x)$
iv) $(x+2)b_{2n+1}(x) = B_{n+1}(x)b_{n+1}(x) - B_{n-1}(x)b_{n-1}(x)$
v) $(x+2)B_{2n}(x) = B_{n+1}(x)B_n(x) - B_{n-1}(x)B_{n-2}(x)$
vi) $b_{2n}(x) - b_{2n-1}(x) = b_n^2(x) - b_{n-1}^2(x)$

Chứng minh. i) Sử dụng đẳng thức v) mục tính chất 21 chúng ta được

$$\begin{aligned}&b_{m+n}(x) = B_{m+n}(x) - B_{m+n-1}(x)\\ =&[B_m(x)B_n(x) - B_{m-1}(x)B_{n-1}] - [B_m(x)B_{n-1}(x) - B_{m-1}(x)B_{n-2}(x)]\\ =&B_m(x)[B_n(x) - Bn-1(x)] - B_{m-1}(x)[B_{n-1}(x) - B_{n-2}(x)]\\ =&B_m(x)b_n(x) - B_{m-1}(x)bn-1(x)\end{aligned}$$

ii) Trong i) thay m bởi n chúng ta được

$$b_{2n}(x) = B_n(x)b_n(x) - B_{n-1}(x)bn-1(x)$$

iii) Áp dụng i) với $m = n+1$.

iv) Áp dụng hệ thức iii), (8), (9) chúng ta được

$$\begin{aligned}(x+2)b_{2n+1}(x) =&(x+2)B_n(x)b_{n+1}(x) - (x+2)B_{n-1}(x)bn(x)\\ =&b_{n+1}(x)[B_{n+1}(x) + B_{n-1}(x)] - B_{n-1}(x)[b_{n+1}(x) + b_{n-1}(x)]\\ =&B_{n+1}(x)b_{n+1}(x) - B_{n-1}(x)b_{n-1}(x)\end{aligned}$$

v) Áp dụng iii) tính chất 21 và hệ thức (8) chúng ta có

$$\begin{aligned}&(x+2)B_{2n}(x) = B_{2n+1}(x) + B_{2n-1}(x) =\\ =&[B_n(x)B_{n+1}(x) - B_{n-1}(x)B_n(x)] + [B_n(x)B_{n-1}(x) - B_{n-1}(x)B_{n-2}(x)]\\ =&B_n(x)B_{n+1}(x) - B_{n-1}(x)B_{n-2}(x)\end{aligned}$$

vi) Áp dụng ii) và hệ thức i) tính chất 21 chúng ta được

$$\begin{aligned}
&b_{2n}(x) - b_{2n-1}(x) = \\
=&[B_n(x)b_n(x) - B_{n-1}(x)b_{n-1}(x)] - [B_{n-1}(x)b_n(x) - B_{n-2}(x)b_{n-1}(x)] \\
=&b_n(x)[B_n(x) - B_{n-1}(x)] - b_{n-1}(x)[B_{n-1}(x) - B_{n-2}(x)] \\
=&b_n^2(x) - b_{n-1}^2(x)
\end{aligned}$$

□

Tính chất 24. *(Công thức về tổng của đa thức Morgan-Voyce)*

i) $x\sum\limits_0^n B_i(x) = b_{n+1}(x) - 1$

ii) $\sum\limits_0^n b_i(x) = B_n(x)$

iii) $\sum\limits_0^n B_{2i}(x) = B_n^2(x)$

iv) $\sum\limits_1^n B_{2i-1}(x) = B_n(x).B_{n-1}(x)$

v) $\sum\limits_0^n b_{2i}(x) = B_n(x).b_n(x)$

vi) $\sum\limits_1^n b_{2i-1}(x) = B_{n-1}(x).b_n(x)$

vii) $\sum\limits_0^{2n} (-1)^i b_i(x) = b_n^2(x)$

Hệ quả 8. *Với $n \geq 0$ chúng ta có*

i) $F_{2n} = B_{n-1}(1)$

ii) $F_{2n+1} = b_n(1)$

Hệ quả 9. *(Một số kết quả của số Fibonacci)*

i) $F_{m+n} = F_{m+2}F_n - F_mF_{n-2}$

ii) $F_{2n+2} = F_{n+2}^2 - F_n^2$

iii) $F_{2n} = (F_{n+2} - F_{n-2})F_n$

iv) $3F_{2n} = F_{n+2}^2 - F_{n-2}^2$

v) $\sum\limits_0^n F_{2i} = F_{2n+1} - 1$

vi) $\sum\limits_0^n F_{2i-1} = F_{2n}$

Ví dụ 5. *Chúng ta có một số ví dụ sau*

$$\begin{aligned}
B_5(x) &= \sum_{i=0}^{5} \begin{pmatrix} 6+i \\ 5-i \end{pmatrix} x^i \\
&= \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} x^4 + \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix} x^5 \\
&= 6 + 35x + 56x^2 + 36x^3 + 10x^4 + x^5
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_5(x) &= \sum_{i=0}^{5} \binom{5+i}{5-i} x^i \\
&= \binom{5}{5} + \binom{6}{4} x + \binom{7}{3} x^2 + \binom{8}{2} x^3 + \binom{9}{1} x^4 + \binom{10}{0} x^5 \\
&= 1 + 15x + 35x^2 + 28x^3 + 9x^4 + x^5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_4(x)b_2(x) - b_3^2(x) =& (x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 10x + 1)(x^2 + 3x + 1) \\
& - (x^3 + 5x^2 + 6x + 1)^2 = x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_2^2(x) - B_1^2(x) &= (x^2 + 4x + 3)^2 - (x + 2)^2 \\
&= x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 20x + 5 \\
&= B_4(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x \sum_{0}^{3} B_i(x) &= x(x^3 + 7x^2 + 15x + 10) \\
&= x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 10x \\
&= b_4(x) - 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{0}^{3} b_i(x) &= 1 + (x + 1) + (x^2 + 3x + 1) + (x^3 + 5x^2 + 6x + 1) \\
&= x^3 + 6x^2 + 10x + 4 \\
&= B_3(x)
\end{aligned}
$$

7 Nghiệm của các đa thức dạng Fibonacci

Tính chất 25. *Với $n \in \mathbb{Z}^+$. Chúng ta có một số kết quả sau:*

i) Với $x = 2i\cos\theta$ ta được $f_n(x) = i^{n-1}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$.

ii) Với $x = 2i\cos\theta$ ta được $l_n(x) = 2i^n \cos n\theta$.

iii) Với $x = 2i\cos\theta$ ta được $H_n(x) = i^n\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} + i^{n-1}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$.

iv) Với $x = 2\cos\theta$ ta được $g_n(x) = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$.

v) Với $x = 2\cos\theta$ ta được $h_n(x) = 2\cos n\theta$.

vi) Với $x = -\frac{1}{4\cos^2\theta}$ ta được $J_n(x) = \frac{\sin n\theta}{2^{n-1}.\cos^{n-1}\theta.\sin\theta}$.

vii) Với $x = -\frac{1}{4\cos^2\theta}$ ta được $K_n(x) = -\frac{2\sin(n-1)\theta+\sin(n-3)\theta}{2^n.\cos^n\theta.\sin\theta}$.

viii) Với $x = 2\cos\theta - 2$ ta được $B_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.

ix) Với $x = 2\cos\theta - 2$ ta được $b_n(x) = \frac{\cos(n+\theta/2)}{\cos\theta/2}$.

Chứng minh. Suy ra trực tiếp từ định lý 1.5.1. □

Định lý 15. *(Về nghiệm của các đa thức dạng Fibonacci)*

i) Nghiệm của đa thức $f_n(x)$ là $x = 2i\cos k\pi/n, \quad 1 \le k \le n-1$.

ii) Nghiệm của đa thức $l_n(x)$ là $x = 2i\cos(2k+1)\pi/2n, \quad 0 \le k \le n-1$.

iii) Nghiệm của đa thức $g_n(x)$ là $x = -2\cos k\pi/n, \quad 1 \le k \le n-1$.

iv) Nghiệm của đa thức $h_n(x)$ là $x = -2\cos(2k+1)\pi/2n, \quad 0 \le k \le n-1$.

v) Nghiệm của đa thức $J_n(x)$ là $x = -\frac{1}{4\cos^2\theta}, \quad 0 \le k \le n-1$. Xem lai dieu kien cua k vi $\theta = \frac{k\pi}{n}$ va $\theta \ne \frac{k\pi}{n}$.

vi) Nghiệm của $B_n(x)$ là $x = -4\sin^2 k\pi/(2n+2) \quad 0 < k < n$.

vii) Nghiệm của $b_n(x)$ là $x = -4\sin^2(2k-1)\pi/(4n+2) \quad 0 < k < n$.

Chứng minh. Áp dụng tính chất 25 chúng ta có

i)

$$
\begin{aligned}
& f_n(x) = 0 \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} \sin n\theta = 0 \\ \sin\theta \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n\theta = k\pi \\ \theta \ne k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = k\pi/n \\ \theta \ne k\pi \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \theta = k\pi/n \quad 0 < k < n
\end{aligned}
$$

Khi đó

$$x = 2i\cos\theta = 2i\cos k\pi/n$$

trong đó $1 \le k \le n-1$.

Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự. □

Chú ý 1. *Đa thức $H_n(x)$ vô nghiệm.*

Ví dụ 6. *Nghiệm của $f_6(x) = x^5 + 4x^3 + 3x$ được cho bởi $x = 2i\cos k\pi/6, \ 1 \le k \le 5$.*

Khi $k = 1, \quad x = 2i\cos\pi/6 = \sqrt{3}i$;

Khi $k = 2, \quad x = 2i\cos\pi/3 = i$;

Tương tự khi $k = 3, 4, 5$ thì ta được các giá trị của x tương ứng là $0, -i, -\sqrt{3}i$. Do đó $f_6(x)$ có các nghiệm là $0, \pm, \pm\sqrt{3}i$. Vì vậy $f_6(x) = x(x^2+1)(x^2+3)$.

Chú ý 2. *Từ nghiệm của đa thức Fibonacci và Lucas chúng ta có sự phân tích sau*

$$f_n(x) = \prod_{1}^{n-1}(x - 2i\cos k\pi/n)$$

và

$$l_n(x) = \prod_{0}^{n-1}[x - 2i\cos(2k+1)\pi/2n]$$

Tài liệu

[1] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas number with applications* . Wiley-Interscience, NewYork, NY, USA, 2001.

[2] H. S. Wilf, *Generating functionology.* Academic Press, Boston, Mass, USA, 1990.