TRƯỜNG THPT CHUYÊN TIỀN GIANG
TỔ HÀNH CHÁNH

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

ĐỀ TÀI:

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐA THỨC VÀ ÁP DỤNG

Người thực hiện : NGUYỄN VŨ THANH

Năm học 2010-2011

MỤC LỤC

I. PHẦN MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài
2. Mục tiêu nghiên cứu
3. Nhiệm vụ nghiên cứu
4. Phương pháp nghiên cứu
5. Một số kết quả đạt được

II. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

Chương I: PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA THỨC

Chương II: ĐA THỨC BẤT KHẢ QUY TRÊN TẬP SỐ NGUYÊN

Chương III: NGHIỆM CỦA ĐA THỨC

Chương IV: CÔNG THỨC NỘI SUY LAGRANGE

Chương V: ĐỊNH LÝ VIETE

Chương VI: ĐA THỨC CHEBYSHEV(Tsêbưsep)

Chương VII: ÁP DỤNG ĐA THỨC ĐỂ GIẢI TOÁN

I. PHẦN MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài:

Từ khi tham dự các hội nghị Chuyên đề Bồi dưỡng học sinh giỏi THPT do trường Đại học Khoa học tự nhiên Hà nội tổ chức hàng năm từ 2002 đến nay, được học tập các chuyên đề do các giảng viên, các chuyên gia Toán của Bộ trình bày và được sự động viên của thầy Trương Thành Phú chuyên viên môn Toán của Sở Giáo dục và đào tạo Tiền Giang chúng tôi có một tâm huyết là sẽ cố gắng thực hiện hoàn chỉnh, cụ thể hoá các chuyên đề phù hợp với trình độ học sinh tỉnh nhà để đóng góp vào thành tích chung của Tỉnh trong các kỳ thi HSG cấp khu vực và cấp quốc gia.

Trong những năm gần đây bộ môn Toán của tỉnh Tiền Giang đã có những tiến bộ và đạt được một số thành tích đáng kể trong các kỳ thi HSG khu vực. Nhưng gần đây Bộ đã thay đổi mạnh về quy chế thi HSG cấp Quốc gia đó là không còn phân chia hai bảng A, B như trước mà chỉ có một bảng thống nhất chung toàn quốc. Đề thi khó hơn và khối lượng kiến thức nhiều hơn gây khó khăn cho cả Giáo viên và học sinh môn Toán tỉnh nhà.

Trong điều kiện khó khăn đó việc tìm tài liệu và viết các chuyên đề này là việc cần thiết trong tình hình hiện nay. Được sự ủng hộ của các thầy cô trong tổ Toán trường THPT Chuyên Tiền Giang chúng tôi thực hiện viết chuyên đề: “ ***Một số bài toán về đa thức và áp dụng***”.

2. Mục tiêu nghiên cứu:

Nhằm hệ thống và phân loại kiến thức các bài tập có sử dụng kiến thức về Đa thức mà chỉ học sinh chuyên Toán mới được học như: Phương trình hàm đa thức, Đa thức bất khả quy, Công thức nội suy Lagrange, Định lý Viét cho đa thức bậc n, Đa thức Tsêbưsep,....Giúp cho học sinh có hệ thống kiến thức và biết vận dụng đa thức vào giải các bài toán lượng giác, hệ phương trình đại số đồng thời định hướng quá trình suy nghĩ giải quyết vấn đề, rèn luyện tư duy sáng tạo toán học và khả năng vận dụng sáng tạo trong giải các bài toán mới.

3. Nhiệm vụ nghiên cứu:

Hệ thống kiến thức về đa thức, phân dạng bài tập và hướng dẫn giải các bài tập áp dụng.

Tùy theo từng nội dung của các vấn đề về đa thức, chúng tôi chọn lọc một số bài tập có các kiến thức liên quan như: số học, nghiệm phương trình, bất đẳng thức, tổ hợp, … mà trong các kỳ thi học sinh giỏi toán thường hay gặp.

Vì đây là chuyên đề nâng cao về đa thức để rèn luyện kỹ năng giải Toán cho học sinh giỏi nên chúng tôi không trình bày hệ thống lý thuyết về Đa thức, coi như học sinh chuyên Toán phải biết trong chương trình chính khóa về đa thức để làm cơ sở cho việc học chuyên đề này.

Rèn luyện tư duy giải toán thông qua giải các bài tập về đa thức và áp dụng đa thức để giải toán đồng thời trao đổi và học tập kinh nghiệm với các thầy cô bộ môn Toán của tỉnh Tiền Giang.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Dựa vào các chuyên đề đã học ở Hà Nội và các tài liệu trong tất cả các đợt bồi dưỡng để trình bày hệ thống các bài toán về Đa thức thường gặp trong các kỳ thi học sinh giỏi Toán.

- Hướng dẫn học sinh Đội tuyển tìm tài liệu có liên quan, phân loại bài tập, nhận xét cách giải, tạo tình huống có vấn đề để học sinh cùng trao đổi nghiên cứu.

- Hệ thống và sắp xếp các dạng bài tập từ dễ đến khó và có các hướng dẫn.

- Chúng tôi không trình bày chi tiết các lời giải mà chỉ định hướng cách giải, phần giải quyết chính dành cho học sinh.Tuy nhiên trước khi hướng dẫn chúng tôi cho học sinh tự giải quyết vấn đề một cách độc lập để phát hiện từ các em nhiều cách giải hay, độc đáo góp phần bồi dưỡng và rèn luyện tư duy sáng tạo cho học sinh.

- Phương pháp phân tích: giúp học sinh nắm rõ bản chất vấn đề , lựa chọn phương pháp giải phù hợp đồng thời mở rộng và tương tự hoá bài toán.

5. Một số kết quả đạt được

Giúp cho học sinh đội tuyển có thêm phương pháp và tài liệu cần thiết để giải các bài tập về Đa thức và áp dụng đa thức để giải toán .

Qua chuyên đề này giúp học sinh khắc sâu thêm kiến thức về Đa thức và các kiến thức khác như : Số học, Phương trình, Phương trình hàm, Giải tích Tổ hợp,…

Giúp cho học sinh có thêm phương pháp để viết các chuyên đề nâng cao khác.

II. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

1. Các bài tập về Đa thức và áp dụng đa thức để giải toán thường gặp trong các đề thi học sinh giỏi cấp Quốc Gia gần đây.Với mong muốn có một chuyên đề Đa thức phong phú nên chúng tôi viết chuyên đề: “ ***Một số bài toán về đa thức và áp dụng”*** để phục vụ giảng dạy cho học sinh Đội tuyển tỉnh nhà.

2. Đề tài được chia làm 7 chương:

Chương I: PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA THỨC

Chương II: ĐA THỨC BẤT KHẢ QUY TRÊN TẬP SỐ NGUYÊN

Chương III: NGHIỆM CỦA ĐA THỨC

Chương IV: CÔNG THỨC NỘI SUY LAGRANGE

Chương V: ĐỊNH LÝ VIETE

Chương VI: ĐA THỨC CHEBYSHEV(Tsêbưsep)

Chương VII: ÁP DỤNG ĐA THỨC ĐỂ GIẢI TOÁN

Trong mỗi chương sau phần trình bày các vấn đề có liên quan là hệ thống bài tập có hướng dẫn.

Dù cố gắng nhiều nhưng đề tài không tránh khỏi sai sót, rất mong nhận được sự đóng góp từ các đồng nghiệp môn Toán của tỉnh nhà.

Sau đây và trình bày phần nội dung của đề tài.

Chương I: PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA THỨC

I.1. Sử dụng tính chất : Nếu P(x)$\in R[x]$ là đa thức tuần hoàn, tức tồn tại a khác 0 sao cho P(x+a) = P(x) với mọi x thì P(x) = C , $\forall x \in R$.

Thật vậy đặt Q(x) = P(x) – P(0) ta có Q(0) = 0 và Q(x+a) = Q(x) $\forall x \in R$ suy ra Q(na) = 0 với mọi n là số tự nhiên . P(x) = 0 có vô số nghiệm nên $Q(x) \equiv 0 \Rightarrow P(x) \equiv P(0) = C$.

Bài 1:a/ Tìm đa thức P(x) hệ số thực thỏa xP(x-1) = (x-3)P(x), $\forall x \in R$ (Thi HSG cấp Tỉnh 2000)

b/ Tìm đa thức P(x) hệ số thực thỏa $(x-1)^2P(x) = (x-3)^2P(x+2)$, $\forall x \in R$

Hướng dẫn:

a/Lần lượt thay x = 0, x = 1, x =2 vào xP(x-1) = (x-3)P(x) ta tìm được P(0) = P(1) = P(2) = 0 .Theo định lý Bezout P(x) = x(x-1)(x-2)Q(x) từ đó suy ra Q(x) = Q(x-1) $\Rightarrow Q(x) \equiv C$ .Thử lại $P(x) \equiv Cx(x-1)(x-2)$ (với C là hằng số) thỏa bài toán.

b/ x= 3 là nghiệm bội bậc lớn hơn hoặc bằng 2 của P(x) nên P(x) = $(x-3)^2Q(x)$ từ đó suy ra Q(x) =Q(x+2) $\Rightarrow Q(x) \equiv C$. Thử lại $P(x) \equiv Cx(x-1)(x-2)$ (với C là hằng số) thỏa bài toán.

Bài 2: Tìm đa thức P(x) hệ số thực thỏa P(0) = 0 và $P(x) \equiv \frac{1}{2}\left[P(x+1)+P(x-1)\right]$

Hướng dẫn:

Đặt Q(x)=P(x+1)-P(x) $\Rightarrow Q(x) = Q(x-1), \forall x \Rightarrow Q(x) \equiv C$.

P(n)= [P(n)-P(n-1)]+ [P(n-1)-P(n-2)] +…+ [P(1)-P(0)] + P(0) = nC với $\forall n \in N \Rightarrow P(x) - Cx = 0$ có vô số nghiệm do đó P(x) = Cx .Thử lại $P(x) \equiv Cx$ thỏa bài toán.

Bài 3: Tìm đa thức P(x) hệ số thực thỏa $P(x)+P(1)\equiv\frac{1}{2}\left[P(x+1)+P(x-1)\right]$

Hướng dẫn:

Đặt P(1) = a và $Q(x)=P(x)-ax^2$ thì Q(1)=0

và $Q(x)\equiv\frac{1}{2}\left[Q(x+1)+Q(x-1)\right]$.Tương tự bài 2 ta có $Q(x)=bx-b$.Thử lại $P(x)=ax^2+bx-b$, với a,b là hằng số thỏa bài toán.

Bài 4: Tìm đa thức P(x) hệ số thực thỏa P(x+1) = P(x) + 2x + 1, $\forall x\in R$.

Hướng dẫn:

Đặt $Q(x)=P(x)-x^2$ thì $Q(x+1)=Q(x)\Rightarrow Q(x)\equiv C$. Thử lại $P(x)\equiv x^2+C$ thỏa bài toán

Bài 5: a/Tìm đa thức P(x) hệ số thực thỏa P(0) = 0 và $P(x^2+1)\equiv\left[P(x)\right]^2+1$

b/Tìm đa thức P(x) hệ số thực thỏa P(2011) = 2043 và $P(x)\equiv\sqrt{P(x^2+1)-33}+32\ (x\geq 0)$

Hướng dẫn:

a/Đặt Q(x) = P(x) – x thì Q(0) = 0 , giả sử x = k là nghiệm của Q(x) khi đó P(k) = k$\Rightarrow P(k^2+1)=k^2+1\Rightarrow Q(k^2+1)=0$ mà $k^2+1>k$ nên Q(x)=0 có vô số nghiệm suy ra $Q(x)\equiv 0\Rightarrow P(x)\equiv x$

b/ Đặt Q(x) = P(x) – 32 thì Q(2011) = 2011 và $Q(x^2+1)\equiv\left[Q(x)\right]^2+1\Rightarrow Q(x)\equiv x$

Bài 6: Tìm đa thức P(x) hệ số thực thỏa $P(u^2-v^2)\equiv P(u+v).P(u-v)$

Hướng dẫn:

Đặt x = u+v và y = u-v ta có $P(xy)\equiv P(x).P(y)$(1).Cho x = y=0 thì P(0) = 0 hoặc P(0) = 1 .Nếu P(0) =1 thì cho y = 0 ta được $P(x)\equiv 1$

Nếu P(0) = 0 thì P(x) = xQ(x) với degQ = degP-1.Thay vào (1) ta được $Q(xy) \equiv Q(x).Q(y)$.Tiếp tục quá trình lập luận này ta có $P(x) \equiv 1$ hoặc $P(x) \equiv x^n$, với n nguyên dương

Bài 7: Tìm đa thức P(x) hệ số thực thỏa
$(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)P(x-1) \equiv (x^3 - 3x^2 + 3x - 2)P(x)$ (1) (Thi HSG Quốc Gia 2003)

Hướng dẫn:

Ta có (1) $\Leftrightarrow (x+2)(x^2 + x + 1)P(x-1) \equiv (x-2)(x^2 - x + 1)P(x)$ (2). Lần lượt thay $x = \pm 1, x = \pm 2$ ta tính được $P(-2) = P(-1) = P(0) = P(1) = 0$ suy ra
$P(x) \equiv (x-1)x(x+1)(x+2)Q(x)$ Tiếp tục thay vào (2) ta được
$(x^2 + x + 1)Q(x-1) \equiv (x^2 - x + 1)Q(x)$ $\Rightarrow Q(x) = (x^2 + x + 1)R(x)$.Từ đó tìm được $R(x-1) \equiv R(x) \Rightarrow R(x) \equiv C$. Thử lại $P(x) \equiv C(x-1)x(x+1)(x+2)(x^2 + x + 1)$ thỏa bài toán

Nhận xét : Các bài tập trên áp dụng nhiều lần các tính chất sau:

- Định lý Bezout : x_0 là nghiệm của đa thức P(x) khi và chỉ khi P(x_0) chia hết cho $x - x_0$
- Mọi đa thức P(x) bậc n ($n \geq 1$) không thể có quá n nghiệm
- Nếu đa thức P(x) bậc không quá n có hơn n nghiệm thì $P(x) \equiv 0$

I.2.Áp dụng phương pháp đồng nhất

Bài 8: Tìm đa thức P(x) hệ số nguyên thỏa $16P(x^2) \equiv [P(2x)]^2$ (1)

Hướng dẫn:

Gọi a là hệ số bậc cao nhất của P(x) $(a \neq 0)$.Đồng nhất hệ số bậc cao nhất của (1) ta được $16a = 2^{2n}a^2 \Rightarrow a = \frac{16}{4^n} \in Z \Rightarrow n = 0;1;2$

- Với n =0 ta có $P(x) \equiv 0, P(x) \equiv 16$

- Với n = 1 khi đó a = 4 và P(x) = 4x + b .Thay vào (1) và đồng nhất ta được

b = 0.Vậy $P(x) \equiv 4x$

- Với n = 2 ta có a = 1 và P(x) = x^2+bx+c. Thay vào (1) và đồng nhất ta được

b = c = 0.Vậy $P(x) \equiv x^2$

Bài 9: Tìm đa thức P(x) hệ số thực thỏa $P(x^2) \equiv \left[P(x)\right]^2$

Hướng dẫn:

- Với P(x) = C thì C^2 = C suy ra C = 0 hoặc C = 1.Ta có $P(x) \equiv 0; P(x) \equiv 1$

Với $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$.Giả sử $a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0$ không đồng thời bằng 0.Chọn k < n là số lớn nhất sao cho $a_k \neq 0$ Ta có

$P(x^2) \equiv \left[P(x)\right]^2 \Leftrightarrow a_n x^{2n} + a_k x^{2k} + ... + a_1 x^2 + a_0 \equiv (a_n x^n + a_k x^k + ... + a_1 x + a_0)^2$.

So sánh hệ số của x^{n+k} hai vế ta có $2a_n a_k = 0$ (chú ý 2k < n+k < 2n)

Suy ra a_k = 0 (vô lý) .Vậy $a_{n-1} = a_{n-2} = ... = a_0 = 0$, từ đó suy ra a_n=1 và $P(x) \equiv x^n$, với n nguyên dương.

Bài 10: Tìm đa thức P(x) hệ số thực thỏa $P(x^2 - 2x) \equiv \left[P(x-2)\right]^2$

Hướng dẫn:

Ta có $P(x^2 - 2x) \equiv \left[P(x-2)\right]^2 \Leftrightarrow P((x-1)^2 - 1) \equiv \left[P((x-1)-1)\right]^2$

Đặt $Q(y) = P(y-1) \Rightarrow Q[(x-1)^2] \equiv Q^2(x-1)$ .Theo bài 9

$Q \equiv 0, Q \equiv 1, Q \equiv x^n \Rightarrow P \equiv 0, P \equiv 1, P \equiv (x+1)^n$

Bài 11: Tìm đa thức P(x) hệ số thực thỏa

$P(x^2) + x[3P(x) + P(-x)] \equiv \left[P(x)\right]^2 + 2x^2$ (1) (Thi HSG Quốc Gia 2006)

Hướng dẫn:

Thay x bởi –x rồi trừ cho nhau được $\left[P(x) + P(-x)\right]\left[P(x) - P(-x) - 4x\right] = 0$

-Hoặc P(x)+P(-x) = 0 đúng với vô số giá trị của x.

-Hoặc P(x)-P(-x) - 4x = 0 đúng với vô số giá trị của x.

Vì P(x) là đa thức nên hoặc P(x)+P(-x) = 0 đúng với mọi giá trị của x hoặc P(x)+P(-x)-4x = 0 đúng với mọi giá trị của x

- Nếu P(x)+P(-x) = 0 thay vào (1) được $P(x^2)-x^2=(P(x)-x)^2$.Đặt

Q(x)=P(x)-x thì $Q(x^2)\equiv[Q(x)]^2$.Suy ra $P(x)\equiv x, P(x)\equiv x+1, P(x)\equiv x^n+x$ nhưng với điều kiện P(x) + P(-x) = 0 ta chỉ nhận $P(x)\equiv x, P(x)\equiv x^{2k+1}+x$ (k = 0,1,…)

- Nếu P(x)-P(-x) - 4x = 0 thay vào (1) được $P(x^2)-2x^2=(P(x)-2x)^2$.

Đặt Q(x) = P(x)-2x thì $Q(x^2)\equiv[Q(x)]^2$.Suy ra $P(x)\equiv 2x, P(x)\equiv 2x+1, P(x)\equiv x^n+2x$ nhưng với điều kiện P(x)+ P(-x) -4x = 0 ta chỉ nhận $P(x)\equiv 2x, P(x)\equiv x^{2k}+2x$ (k = 1,2,…)

Bài 12: Tìm đa thức P(x) hệ số thực thỏa $P(x).P(y)\equiv P^2(\frac{x+y}{2})-P^2(\frac{x-y}{2})$ (1)

Hướng dẫn:

P(x)=0 thỏa , P(x)=C$\neq$0 không thỏa bài toán.Giả sử P(x) có bậc $n\geq 1$ và hệ số cao nhất của P(x) là a$\neq$0.Thay y = 3x vào (1) và đồng nhất hệ số của x^{2n} hai vế ta được $a.3^n.a=(2^n a)^2-a^2 \Leftrightarrow 3^n+1=4^n \Leftrightarrow n=1$.Vậy P(x) = ax (a$\neq$0)

Bài 13:Cho đa thức với hệ số thực

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ $(a_n\neq 0)$ thỏa $P(x)P(2x^2)\equiv P(2x^3+x)$.CMR P(x) không có nghiệm thực (Thi HSG Quốc Gia 1990)

Hướng dẫn:

Giả sử tồn tại x_0 sao cho $P(x_0)=0 \Rightarrow P(2x_0^3+x_0)=0 \Rightarrow x_1=2x_0^3+x_0$ cũng là nghiệm.Lập luận tương tự (x_n) là nghiệm P(x) với $x_n=2x_{n-1}^3+x_{n-1}$ $n\geq 1$ và x_0 cho trước.

- Nếu $x_0 < 0$ thì $x_0 > x_1 > x_2 >…> x_n> x_{n+1} >$…suy ra P(x) có vô hạn nghiệm, vô lý.

- Nếu $x_0 > 0$ thì $x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_n< x_{n+1} >\ldots$suy ra P(x) có vô hạn nghiệm, vô lý.
- Nếu $x_0 = 0$ ta gọi k là số bé nhất mà $a_k \neq 0$ (n ≥ k > 0) ta có

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_k x^k$ .Thay vào (1) ta được

$a_n^2 2^n x^{3n} + \ldots + a_k^2 2^k x^{3k} \equiv a_n(2x^3+x)^n + \ldots + a_k(2x^3+x)^k$ (2).Do $a_0=0$ và $a_k \neq 0$ nên k > 0

$\Rightarrow 3k > k$ .Trong (2) đồng nhất hệ số của x^k hai vế đi đến $a_k = 0$, vô lý.

Chương II: ĐA THỨC BẤT KHẢ QUY TRÊN TẬP SỐ NGUYÊN

II.1. Định nghĩa:

Đa thức có hệ số nguyên có bậc lớn hơn 0 P(x) được gọi là đa thức bất khả quy trên **Z** nếu P(x) không phân tích được thành tích của hai đa thức hệ số nguyên có bậc bé hơn n.

II.2. Tiêu chuẩn Eisenstein:

Cho đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, n \geq 1$.Biết rằng tồn tại số nguyên tố p sao cho:

i/ $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \vdots p$

ii/ a_n không chia hết cho p

iii/ a_0 không chia hết cho p^2

Khi đó P(x) bất khả quy trên **Z**

Chú ý: Nếu tất cả giả thiết của tiêu chuẩn Einsenstein được thỏa thì P(x) cũng bất khả quy trên **Q.**

Ví dụ: Đa thức $P(x) = x^4 + 2x + 2$ bất khả quy trên Q và với n > 3 đa thức $Q(x) = x^n - 2$ bất khả quy trên Q (ở đây p = 2)

II.3. Bài tập:

Bài 1: Cho các số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ khác nhau đôi một. CMR $(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)-1$ không thể phân tích được dưới dạng tích của hai đa thức có hệ số nguyên có bậc bé hơn n

Hướng dẫn:

Giả sử $(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)-1 = f(x).g(x)$ trong đó deg f(x) , deg g(x) < n Thay x = a_i vào ta được:

$f(a_i).g(a_i) = -1 \Rightarrow f(a_i)+g(a_i) = 0, \forall i \Rightarrow f(x)+g(x) \equiv 0$ (vì deg(f+g) < n và f+g có n nghiệm).Từ đó suy ra

$f(x) \equiv -g(x) \Rightarrow (x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)-1 \equiv -[f(x)]^2$ (vô lý vì hệ số bậc cao nhất của vế trái bằng 1,trong khi hệ số bậc cao nhất của vế phải là số âm)

Bài 2: Cho đa thức f(x) bậc n có hệ số nguyên (với n = 2m hoặc n = 2m+1) nhận giá trị bằng ± 1 với hơn 2m giá trị nguyên của x thì f(x) không thể biểu diễn thành tích 2 đa thức bậc nguyên dương với hệ số nguyên .

Hướng dẫn:

Giả sử $f(x) = g(x)h(x)$ với g(x) và h(x) có hệ số nguyên và $0 < \deg g \le \deg h < n$. Vì n = 2m hoặc n = 2m+1 nên $\deg g \le m$ .Giả sử có k số nguyên a_i (k > 2m) sao cho

$f(a_i) = g(a_i).h(a_i) = \pm 1 \Rightarrow g(a_i) = \pm 1, \forall i = 1,...,k$ .Mà $g(x) = \pm 1$ có không quá 2m nghiệm nguyên do $\deg g \le m$,vô lý.

Bài 3: Cho đa thức f(x) bậc n ($n \ge 2$) có hệ số nguyên với $|f(a)| = 1$ hoặc $|f(a)| = p$ là số nguyên tố với ít nhất 2n+1 giá trị nguyên khác nhau của a .CMR f(x) không thể phân tích thành tích của 2 đa thức bậc nguyên dương với hệ số nguyên.

Hướng dẫn:

Giả sử $f(x) = g(x)h(x)$ với g(x) và h(x) có hệ số nguyên và $\deg g, \deg h \ge 1$.

Đặt $m = \deg g, l = \deg h \quad (n = m + l)$.Tồn tại 2n+1 số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ sao cho $|f(a_i)| = 1$ hoặc $|f(a_i)| = p$ là số nguyên tố suy ra:

$$|f(a_i)| = |g(a_i)|.|h(a_i)| = \left[\begin{array}{l} 1 \\ p \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |g(a_i)| = 1 \\ |h(a_i)| = 1 \end{array}\right. \quad i = 1, 2, ..., 2n+1. |g(x)| = 1 \Leftrightarrow g^2(x) = 1$$

có không quá 2m nghiệm; tương tự $|h(x)| = 1$ có không quá $2l$ nghiệm.Vậy $|g(x)| = 1$ hoặc $|h(x)| = 1$ có không quá $2(m + l) = 2n$ nghiệm , vô lý.

Bài 4: CMR không tồn tại hai đa thức f(x) và g(y) sao cho $x^{2010}y^{2011} + 1 \equiv f(x)g(y)$ (1)

Hướng dẫn:

Giả sử $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $g(y) = \sum_{k=0}^{m} b_k y^k$ thỏa (1) ta có

$a_0 b_0 = 1 \Rightarrow a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$.Cho x = 0 ta được $a_0 g(y) = 1, \forall y \Rightarrow g(y) \equiv \frac{1}{a_0}$.Tương tự

$f(x) \equiv \frac{1}{b_0} \Rightarrow x^{2010}.y^{2011} + 1 = \frac{1}{a_0 b_0} = 1$,vô lý.

Bài 5: Cho các số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ khác nhau đôi một.CMR $P(x) = (x - a_1)^2 (x - a_2)^2 ...(x - a_n)^2 + 1$ không thể phân tích được dưới dạng tích của hai đa thức có hệ số nguyên có bậc lớn hơn hoặc bằng 1

Hướng dẫn:

Giả sử $P(x) = Q(x)R(x)$ với Q(x) và R(x) có hệ số nguyên và $\deg Q, \deg R \geq 1$.Suy ra $Q(a_i)R(a_i) = 1 \Rightarrow |Q(a_i)| = |R(a_i)| = 1, \forall i$ .Ta CM $Q(a_i) = 1$ hoặc $Q(a_i) = -1, \forall i$ và tương tự cho R(x). Giả sử

$\exists k \neq j : Q(a_k) = 1, Q(a_j) = -1 \Rightarrow \exists x_0 \in (a_k; a_j) : Q(x_0) = 0 \Rightarrow P(x_0) = 0$ vô lý vì $P(x) \geq 1, \forall x$

- Nếu $Q(a_i) = R(a_i) = 1, \forall i \Rightarrow Q(x) - 1$, $R(x) - 1$ nhận a_i làm nghiệm

  $\Rightarrow Q(x) - 1 = R(x) - 1 = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n) \Rightarrow (x - a_1)^2(x - a_2)^2...(x - a_n)^2 + 1$
  $\equiv \left[(x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n) + 1\right]^2 \Rightarrow (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n) \equiv 0$
  Vô lý.
- Nếu $Q(a_i) = R(a_i) = -1, \forall i$ lý luận tương tự như trên
- $Q(a_i) = 1, R(a_i) = -1, \forall i$ .Thay x = a_i vào (1) thì 1 = -1 , vô lý .

Chương III: NGHIỆM CỦA ĐA THỨC

III.1. Áp dụng tính chất : P(x) là đa thức với hệ số nguyên . a , b là hai số nguyên khác nhau , khi đó $P(a) - P(b) \vdots (a - b)$

Chứng minh: Áp dụng hằng đẳng thức

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Bài 1:CMR không tồn tại đa thức P(x) với các hệ sô nguyên sao cho P(7) = 5 và P(15) = 9

Hướng dẫn:

P(15)-P(7) chia hết cho 8

Bài 2: Cho P(x) là đa thức với hệ số nguyên.CMR không tồn tại ba số nguyên phân biệt a, b, c sao cho P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a

Hướng dẫn:

Dùng phản chứng: $b - c = P(a) - P(b) \vdots (a - b)$ $\Rightarrow |b - c| \ge |a - b|$, tương tự $|a - b| \ge |c - a|, |c - a| \ge |b - c| \Rightarrow |a - b| = |b - c| = |c - a|$.Vì $a \ne c$ nên $a - b = b - c \Leftrightarrow a = 2b - c$,tương tự $c - a = b - c \Leftrightarrow b = 2c - a$ Khi đó a = c , vô lý.

Bài 3 : Cho P(x) là đa thức với hệ số nguyên và P(0), P(1) là các số lẻ. CMR P(x) không có nghiệm nguyên.

Hướng dẫn:

Giả sử P(a) = 0 với a nguyên , P(a)-P(0)chia hết cho a suy ra a lẻ , P(a)-P(1) chia hết cho a-1 suy ra a chẵn,vô lý

Bài 4: Giả sử P(x) là đa thức hệ số nguyên và P(x) không chia hết cho 3 với ba giá trị nguyên liên tiếp nào đó của x. CMR P(x) không có nghiệm nguyên.

Hướng dẫn:

Giả sử P(a) = 0 ta có P(a+3k) - P(a) chia hết cho 3 suy ra $P(a+3k)\vdots 3, \forall k \in Z$ .Khi đó với mọi ba số nguyên liên tiếp tồn tại một số b mà P(b) chia hết cho 3,vô lý

III.2. Áp dụng định lý Bezout: x_0 là nghiệm của đa thức P(x) khi và chỉ khi $P(x_0)$ chia hết cho $x - x_0$

Bài 5: Cho P(x) là đa thức với hệ số nguyên sao cho $|P(a)| = |P(b)| = |P(c)| = 1$ với a, b, c là ba số nguyên phân biệt. CMR P(x) không có nghiệm nguyên

Hướng dẫn:

Dùng phản chứng giả sử P(x) có nghiệm nguyên x_0 .Ta có $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ trong đó Q(x) là đa thức với hệ số nguyên.Suy ra $1 = |P(a)| = |a - x_0||Q(a)| \Rightarrow |a - x_0| = 1$,tương tự $|b - x_0| = 1, |c - x_0| = 1$.Ba số $a - x_0, b - x_0, c - x_0$ thuộc tập $\{-1,1\}$ nên có ít nhất hai số trong chúng bằng nhau, vô lý.

Bài 6 : Cho P(x) là đa thức với hệ số nguyên và P(x) nhận giá trị bằng 7 với 4 giá trị nguyên khác nhau của x. CMR P(x)-14 không có nghiệm nguyên.

Hướng dẫn:

Dùng phản chứng: giả sử P(x)-14 có nghiệm nguyên x_0.Giả sử $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 7$

$\Rightarrow P(x) - 7 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)Q(x)$.Thay x = x_0 vào ta được $7 = (x_0 - a)(x_0 - b)(x_0 - c)(x_0 - d)Q(x_0)$,vô lý

Bài 7:a/ Cho đa thức P(x) với hệ số nguyên và P(k) không chia hết cho 5 (k = 0, 1, 2, 3, 4). CMR P(x) không có nghiệm nguyên.

b/ CMR nếu P(x) =1 có quá 3 nghiệm nguyên phân biệt thì P(x) = -1 không có nghiệm nguyên.

Hướng dẫn:

a/ Giả sử P(x) có nghiệm nguyên n ta có P(x) = (x-n)Q(x) $\Rightarrow P(k) = (k-n)Q(k)$ (k = 0,1,2,3,4).Vì 0-n, 1-n, 2-n, 3-n, 4-n là 5 số nguyên liên tiếp nên tồn tại i sao cho P(i) chia hết cho 5 , vô lý

b/Giả sử a là nghiệm nguyên của P(x) = -1 và x_1, x_2, x_3, x_4 là 4 nghiệm của P(x)=1.Ta có $P(x)-1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)Q(x)$.Thay x = a vào được $-2=(a-x_1)(a-x_2)(a-x_3)(a-x_4)Q(a)$,vô lý

Bài 8: Cho đa thức P(x) với hệ số thực bậc n và có hệ số bậc cao nhất bằng 1. Biết rằng P(x) có n nghiệm x_1, x_2,…, x_n thỏa $0 < x_i \le 1$.CMR : $(-2)^n P(-\frac{1}{2}) \ge (-3)^n P(0)$

Hướng dẫn:

$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$ và $P(0)=(-1)^n x_1x_2...x_n$;

$$P(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}-x_1)(-\frac{1}{2}-x_2)...(-\frac{1}{2}-x_n) = (-1)^n \frac{(2x_1+1)(2x_2+1)...(2x_n+1)}{2^n}$$

$$\Rightarrow (-2)^n P(-\frac{1}{2}) = (2x_1+1)(2x_2+1)...(2x_n+1) \ge 3x_1.3x_2...3x_n.$$

$$= 3^n x_1x_2...x_n = 3^n(-1)^n P(0) = (-3)^n P(0)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $P(x)=(x-1)^n$

Bài 9: Cho đa thức f(x) bậc n và $f(x)=\frac{k}{k+1}$ $(k=0,1,...,n)$.Tính f(n+1)

Hướng dẫn:

(x+1)f(x)-x là đa thức bậc n+1 có n+1 nghiệm nên (x+1)f(x)-x = ax(x-1)(x-2)…(x-n) (1) .Thay x= -1 vào ta được $a=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. Thay x= n+1 vào thì được $f(n+1)=\frac{(n+1)+a(n+1)!}{n+2}=\frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}$

III.3. Đa thức hệ số nguyên có nghiệm vô tỉ:

III.3.1. Định lý (Định lý về nghiệm hữu tỷ của đa thức với hệ số nguyên)

Cho đa thức $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ bậc n có hệ số nguyên thì mọi nghiệm hữu tỷ của P(x) có dạng tối giản $\frac{p}{q}$ trong đó p là ước của a_0 còn q là ước của a_n

Chứng minh:

Từ $P(\frac{p}{q})=0 \Rightarrow a_n p^n = -q(a_{n-1}p^{n-1}+...+a_1 pq^{n-2}+a_0 q^{n-1}) \Rightarrow a_n \vdots q, a_0 \vdots p$

Đặc biệt: nếu a_n = 1 thì $\frac{p}{q}$ là số nguyên và là ước của a_0.

Ta thường áp dụng định lý này để chứng minh một số là số vô tỷ khi số đó không là nghiệm nguyên của đa thức hệ số nguyên có bậc cao nhất bằng 1.

III.3.2.Bài tập:

Bài 10: Cho $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ là đa thức với hệ số hữu tỷ nhận $\sqrt{3}$ làm nghiệm. Tìm các nghiệm còn lại của P(x).

Đáp số : $-\sqrt{3};a$

Bài 11: Tìm đa thức với hệ số nguyên nhận $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ làm nghiệm (Thi HSG quốc Gia 1984)

Hướng dẫn:

$$x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3} \Rightarrow (x-\sqrt{2})^3=3 \Rightarrow x^3+6x-3=\sqrt{2}(3x^2+2)$$
$$\Rightarrow x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1=0$$

Nhận xét: Từ kết quả trên suy ra $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ là số vô tỷ.

Bài 12: Cho $x=1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$

a/ Tìm đa thức bậc ba có hệ số nguyên nhận $x=1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ làm nghiệm

b/ CMR không tồn tại đa thức bậc nhất và bậc hai có hệ số nguyên nhận $x=1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ làm nghiệm

Hướng dẫn:

a/ f(x)= x^3-3x^2+9x-9

b/ Nếu f(x) có nghiệm hữu tỷ thì f(x) có nghiệm nguyên là ước của 9 nên $1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ là số vô tỷ nên nó không là nghiệm của đa thức bậc nhất..Giả sử $1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ là nghiệm của đa thức bậc hai g(x) hệ số nguyên.Chia f(x) cho g(x) ta được f(x)=g(x).q(x)+r(x) với deg r(x) < 2 mà $r(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})=0\Rightarrow r(x)\equiv 0$ $\Rightarrow f(x)=g(x)q(x)$ mà q(x) bậc nhất nên f(x) có nghiệm hữu tỷ, vô lý.

Bài 13:Tồn tại hay không đa thức bậc hai hệ số nguyên nhận $\sqrt[3]{3}$ làm nghiệm.

Hướng dẫn:

CM $\sqrt[3]{3}$ là số vô tỷ và áp dụng phản chứng

Bài 14: a/ Tìm tất cả đa thức f(x) hệ số hữu tỷ có bậc nhỏ nhất sao cho $f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})=3+\sqrt[3]{3}$

b/Tồn tại hay không đa thức hệ số nguyên f(x) thỏa : $f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})=3+\sqrt[3]{3}$? (Thi HSG Quốc Gia 1997)

Hướng dẫn:

Trước hết CM : $\begin{cases} u\sqrt[3]{3}+v\sqrt[3]{9}=s\in Q \\ u,v\in Q \end{cases} \Rightarrow u=v=0$

Ta có:

$$s^2v = u^2(\sqrt[3]{9}v) + 6uv^2 + 3v^3\sqrt[3]{3} \Rightarrow (3v^3 - u^3)\sqrt[3]{3} = s^2v - u^2s - 6uv^2 \Rightarrow u^3 = 3v^3 \Rightarrow u = v = 0$$

a/ f(x) = ax + b thì từ nhận xét trên suy ra vô lý

Nếu f(x)=ax^2 + bx + c thì từ nhận xét trên suy ra $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = 0$

b/ Đặt $\alpha = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} \Rightarrow \alpha^3 = 9\alpha + 12$ Vậy g(x) = x^3 -9x – 12 nhận α làm nghiệm .Giả sử tồn tại đa thức f(x) hệ số nguyên thỏa : $f(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 3 + \sqrt[3]{3}$.Lấy f(x) chia cho g(x) được dư r(x) với deg r(x) < 3 Khi đó $r(\alpha) = f(\alpha) = 3 + \sqrt[3]{3}$. Vô lý theo câu a/

Bài 15: Xét tập hợp các đa thức $P(x) \neq 0, \forall x \in R$ thỏa điều kiện $P(x^2 - 1) \equiv P(x)P(-x)$.Hãy tìm trong tập hợp đó một đa thức có bậc bé nhất, nhưng có nghiệm lớn nhất.

Hướng dẫn:

Nếu $P(x) \equiv c$ thì c = 1.Nếu P(x)=ax + b thì từ (1) đồng nhất ta được

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Ta được hai đa thức $P(x) = -x + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ có nghiệm $x_0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ và đa thức $P(x) = -x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ có nghiệm $x_0 = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.Nếu P(x) có bậc ≥ 2 và giả sử $P(x_0) = 0 \Rightarrow P(x_0^2 - 1) = 0$ .Nếu $x_0 > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ thì $x_0^2 - 1 > x_0 > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ khi đó P(x) có vô số nghiệm , vô lý .Vậy nếu P(x) có bậc ≥ 2 có nghiệm và thỏa điều kiện đã cho thì mọi nghiệm của P(x) đều $\le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.Xét đa thức $P(x)=x^2-x-1$ thỏa điều kiện bài toán

III.4. Các dạng khác có liên quan đến nghiệm của đa thức :

- Mọi đa thức P(x) bậc n ($n\ge 1$) không thể có quá n nghiệm
- Nếu đa thức P(x) bậc không quá n có hơn n nghiệm thì $P(x)\equiv 0$
- Một đa thức bậc lẻ luôn có ít nhất một nghiệm thực

Bài 16: Cho đa thức $P(x)=\sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$ trong đó a_i là các số nguyên lẻ (i=0,1,2,…,2n). CMR P(x) không có nghiệm hữu tỷ.

Hướng dẫn:

Dùng phản chứng giả sử P(x) có nghiệm hữu tỷ $x_0=\frac{p}{q}$, $(p,q)=1$.Ta có $a_{2n}p^{2n}=-q(a_{2n-1}p^{2n-1}+...+a_1pq^{2n-2}+a_0q^{2n-1})$ (1) $\Rightarrow a_{2n}\vdots q$, $a_0\vdots p$. Suy ra p , q lẻ, vô lý vì VT (1) lẻ còn VP(1) chẵn.

Bài 17: Cho đa thức bâc 6 P(x) thỏa P(k) = P(-k) với k =1,2,3. CMR: $P(x)\equiv P(-x)$

Hướng dẫn:

Đặt $Q(x)=P(x)-P(-x)$ là đa thức có bậc ≤ 6.Nếu x_0 là nghiệm của Q(x) thì $-x_0$ cũng là nghiệm của Q(x) .Do đó Q(x) có 7 nghiệm phân biệt $0,\pm 1,\pm 2,\pm 3 \Rightarrow Q(x)\equiv 0$

Bài 18: Tìm các số nguyên a, b, c khác 0 và khác nhau đôi một sao cho P(x) = x(x-a)(x-b)(x-c) + 1 có thể biểu diễn thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên.

Hướng dẫn:

Giả sử P(x) = f(x)g(x) vói 0< degf < 4

- Nếu degf = 1 thì P(x) có nghiệm nguyên n suy ra n(n-a)(n-b)(n-c) = -1,vô lý

- Nếu degf = 2 thì f(i)g(i)=1 với i=0,a,b,c khi đó f(i) = g(i) $\Rightarrow f(x) \equiv g(x)$

$\Rightarrow P(x) \equiv [f(x)]^2 = (x^2 + kx + l)^2$.Cho x = 0 thì $l = \pm 1$

- Với $l = 1 \Rightarrow x(x-a)(x-b)(x-c) = (x^2 + kx)(x^2 + kx + 2)$.Giả sử k = -a khi đó b+c = a và bc = 2
- Với $l = -1$, tương tự.

Bài 19: Cho đa thức $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_n \neq 0$.Giả sử x_0 là nghiệm của đa thức P(x).CMR: $|x_0| < 1 + \max_{0 \le i \le n-1} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|$

Hướng dẫn:

Đặt $M = \max_{0 \le i \le n-1} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|$

- Nếu $|x_0| \le 1$thì $|x_0| < 1 + M$ (Vì M > 0, còn nếu M = 0 thì x_0 = 0)

- Nếu $|x_0| > 1$thì do x_0 là nghiệm của đa thức P(x) nên ta có

$$|x_0|^n = \left| \frac{a_0}{a_n} + \frac{a_1}{a_n} x_0 + ... + \frac{a_{n-1}}{a_n} x_0^{n-1} \right|$$

$$\le \left| \frac{a_0}{a_n} \right| + \left| \frac{a_1}{a_n} x_0 \right| + ... + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} x_0^{n-1} \right| \le M\left(1 + |x_0| + |x_0|^2 + ... + |x_0|^{n-1}\right) = M.\frac{|x_0|^n - 1}{|x_0| - 1} < M.\frac{|x_0|^n}{|x_0| - 1}$$

$\Rightarrow |x_0| < 1 + M$

Bài 20: Tồn tại hay không hai đa thức hệ số thực P(x) và Q(x) sao cho

$$\frac{P^2(x)}{Q^2(x)} \equiv 1 + x^2$$

Hướng dẫn:

Giả sử P, Q thỏa điều kiện thì $Q(x) \neq 0, \forall x \in R$ suy ra Q(x) phải là đa thức bậc chẵn.Ta có deg P(x) = deg Q(x) + 1 nên P(x) là đa thức bậc lẻ do đó tồn tại

x_0 sao cho $P(x_0)=0$ vô lý (vì $1+x_0^2\geq 1$).Vậy không tồn tại hai đa thức hệ số thực P(x) và Q(x) thỏa yêu cầu.

Bài 21: Cho $\alpha\in(0;\pi)$.Tìm đa thức bậc hai dạng $f(x)=x^2+ax+b$ sao cho với mọi n > 2 đa thức $P_n(x)=x^n\sin\alpha-x\sin(n\alpha)+\sin(n-1)\alpha\,\vdots\, f(x)$ (Thi HSG Quốc Gia 2000)

Hướng dẫn:

$P_3(x)=(x+2\cos\alpha)(x^2-2x\cos\alpha+1)\sin\alpha$; $f(x)=x^2-2x\cos\alpha+1$

không có nghiệm thực nên f(x) là đa thức duy nhất sao cho $P_3(x)\,\vdots\, f(x)$

Với $n\geq 3: P_{n+1}(x)=xP_n(x)\ (x^2-2x\cos\alpha+1)\sin(n\alpha)$.Từ quy nạp suy ra đpcm

Chương IV. CÔNG THỨC NỘI SUY LAGRANGE

IV.1. Công thức nội suy Lagrange:

a. Mọi đa thức bậc hai f(x) đều có thể biểu diễn dưới dạng :

$f(x)=A(x-b)(x-c)+B(x-a)(x-c)+C(x-a)(x-b)$ (1) .Với a,b,c khác nhau đôi một cho trước và A,B,C là ba số cần tìm.

Thật vậy thay x=a vào (1) ta có $A=\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)}$,tương tự $B=\dfrac{f(b)}{(b-a)(b-c)}$ và $C=\dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$.Ngược lại đặt

$$g(x)=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}(x-b)(x-c)+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}(x-a)(x-c)+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$$

thì deg $f(x)\leq 2$ và g(a)=f(a) , g(b)=f(b) , g(c)=f(c) suy ra $g(x)\equiv f(x)$.Vậy nếu biết $f(a), f(b), f(c)$ thì $f(x)$ được xác định bởi:

$$f(x)=f(a).\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+f(b).\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+f(c).\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

.Đây là công thức nội suy Lagrange cho đa thức bậc hai.

b.Tổng quát cho công thức nội suy Lagrange cho đa thức bậc không quá n:Giả sử f(x) là đa thức bậc không quá n và $a_0, a_1, ..., a_n$ là n+1 số khác nhau đôi một.Khi đó f(x) được biểu diễn dưới dạng:

$$f(x) = f(a_0)\frac{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)...(a_0-a_n)} + f(a_1)\frac{(x-a_0)(x-a_2)...(x-a_n)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)...(a_1-a_n)} + ... +$$
$$+ f(a_n)\frac{(x-a_0)(x-a_1)...(x-a_{n-1})}{(a_n-a_0)(a_n-a_1)...(a_n-a_{n-1})}$$

c.Ý nghĩa: Một đa thức bậc không quá n hoàn toàn được xác định nếu biết n+1 giá trị của nó tại n+1 giá trị của biến khác nhau.

IV.2.Bài tập:

Bài 1:CMR nếu đa thức bậc hai nhận giá trị nguyên tại 3 giá trị nguyên liên tiếp của x thì đa thức đó nhận giá trị nguyên tại mọi x nguyên.

Hướng dẫn:

Giả sử $f(k-1), f(k), f(k+1) \in Z$ với $k \in Z$.Áp dụng công thức nội suy Lagrange cho đa thức f(x) với 3 số nguyên k-1, k, k+1 ta có:

$$f(x) = f(k-1).\frac{(x-k)(x-k-1)}{2} + f(k).\frac{(x-k+1)(x-k-1)}{-1} + f(k+1).\frac{(x-k)(x-k+1)}{2}$$

Đặt $u = x-k$ thì

$$f(x) = f(k-1).\frac{u(u-1)}{2} - f(k).(u^2-1) + f(k+1).\frac{u(u+1)}{2} \in Z, \forall x \in Z$$

Bài 2: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa $\left|f(-1)\right| \le 1, \left|f(1)\right| \le 1, \left|f(0)\right| \le 1$.

CMR: $\left|f(x)\right| \le \frac{5}{4}$ với $\forall x \in [-1;1]$

Hướng dẫn:

Áp dụng công thức nội suy Lagrange cho đa thức bậc hai f(x) với 3 số 1,-1,0 ta có:

$$f(x)=\frac{f(1)}{2}(x^2+x)+\frac{f(-1)}{2}(x^2-x)+f(0)(1-x^2)$$

$$\Rightarrow |f(x)|\le\frac{1}{2}|x^2+x|+\frac{1}{2}|x^2-x|+|1-x^2|$$

i/ Với $x\in[0;1]$: $|f(x)|\le 1+x-x^2=\frac{5}{4}-(x-\frac{1}{2})^2\le\frac{5}{4}$

ii/ Với $x\in[-1;0]$: $|f(x)|\le 1-x-x^2=\frac{5}{4}-(x+\frac{1}{2})^2\le\frac{5}{4}$

Bài 3: (Cơ sở của phương pháp hệ số bất định).Cho $a_1,a_2,...,a_n$ là n số khác nhau đôi một và $\deg f(x)\le n-1$, khi đó ta có thể phân tích

$\dfrac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)}=\dfrac{A_1}{x-a_1}+\dfrac{A_2}{x-a_2}+...+\dfrac{A_n}{x-a_n}$ trong đó $A_1,A_2,\dots,A_n$ là các hằng số lựa chọn thích hợp.

Hướng dẫn:

Áp dụng công thức nội suy Lagrange cho đa thức f(x) ta có:

$$f(x)=f(a_1)\frac{(x-a_2)(x-a_3)...(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)...(a_1-a_n)}+f(a_2)\frac{(x-a_1)(x-a_3)...(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)...(a_2-a_n)}+...+$$
$$+f(a_n)\frac{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)...(a_n-a_{n-1})}$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)}=\frac{f(a_1)}{(a_1-a_2)...(a_1-a_n)}.\frac{1}{x-a_1}+\frac{f(a_2)}{(a_2-a_1)...(a_2-a_n)}.\frac{1}{x-a_2}+...+$$
$$+\frac{f(a_n)}{(a_n-a_1)...(a_n-a_{n-1})}.\frac{1}{x-a_n}$$

Suy ra $A_i=\dfrac{f(a_i)}{\prod\limits_{k=1,k\ne i}^{n}(a_i-a_k)}$ $(i=1,2,...,n)$

Bài 4: Cho $f(x)=ax^2+bx+c$ thỏa $|f(x)|\le 1,\forall x\in[-1;1]$.CMR với $\forall M\ge 1$ ta có $|f(x)|\le 2M^2-1$ khi $|x|\le M$

Hướng dẫn :

Áp dụng công thức nội suy Lagrange cho đa thức bậc hai f(x) với 3 số 1,-1,0 ta

$$f(x) = \frac{f(1)}{2}(x^2 + x) + \frac{f(-1)}{2}(x^2 - x) + f(0)(1 - x^2)$$

có: $\Rightarrow \left| f(x) \right| \le \frac{1}{2}\left|x^2 + x\right| + \frac{1}{2}\left|x^2 - x\right| + \left|1 - x^2\right|$

$$\le 2\max(\frac{x^2}{2}, \frac{|x|}{2}) + \left|x^2 - 1\right| \le \max(x^2, |x|) + \left|x^2 - 1\right| \le 2M^2 - 1$$

Bài 5:Cho đa thức f(x) bậc n thỏa $f(k) = \frac{1}{C_{n+1}^k}$ $(k = 0,1,...,n)$.Tìm P(n+1)

Hướng dẫn :

Áp dụng công thức nội suy Lagrange cho đa thức bậc n f(x) với n+1 số 0,1,2,…n ta có:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(k)\left(\prod_{i=0, i\ne k}^{n} \frac{x-i}{k-i}\right) = f(0)\frac{(x-1)...(x-n)}{(0-1)...(0-n)} + ... + f(n)\frac{(x-0)...(x-n+1)}{(n-0)...(n-n+1)}$$

Mà $\prod_{i=0, i\ne k}^{n}(k-i) = k(k-1)...(k-k+1)(k-k-1)...(k-n) = k!(n-k)!(-1)^{n-k}$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(-1)^{n-k}(n-k+1)!}{(n+1)!(n-k)!}.\prod_{i\ne k}(x-i)\right] \Rightarrow f(n+1) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j$$

(Vì $\prod_{i\ne k}(n+1-i) = \frac{(n+1)!}{n+1-k}$).Vậy $f(n+1) = \begin{cases} 0 & n = 2m+1 \\ 1 & n = 2m \end{cases}$

Bài 6: Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là n số khác nhau đôi một và $\deg f(x) \le n-1$.

CMR:

$$\frac{f(a_1)}{(a_1-a_2)...(a_1-a_n)} + \frac{f(a_2)}{(a_2-a_1)...(a_2-a_n)} + ... + \frac{f(a_n)}{(a_n-a_1)...(a_n-a_{n-1})} = 0$$

Hướng dẫn :

Áp dụng công thức nội suy Lagrange

Bài 7: Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là n số khác nhau đôi một $f(x) \equiv A_i(\bmod(x-a_i))$.Tìm dư r(x) trong phép chia f(x) cho (x-a_1) (x-a_2)… (x-a_n)

Hướng dẫn:

Giả sử $f(x) \equiv \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)q(x)+r(x) \quad \deg r(x)<n$.

Thay $x = a_i \quad f(a_i) = r(a_i) = A_i \Rightarrow r(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x-a_i}{a_i-a_j}$

Bài 8:Cho các số nguyên $x_0 < x_1 < ... < x_n$ .Xét $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$.CMR giữa các giá trị của đa thức tại các điểm $x_0, x_1, ..., x_n$ luôn tồn tại một số mà giá trị tuyệt đối của nó không bé hơn $\frac{n!}{2^n}$

Hướng dẫn:

Ta CM $\exists k \in \{0,1,...,n-1\}; x^{/} \in [x_k; x_{k+1}] : \left|P(x^{/})\right| \geq \frac{n!}{2^n}$

Giả sử $\left|P(x_j)\right| < \frac{n!}{2^n}$ với mọi j. $P(x) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) \prod_{k\neq i} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$.Hệ số bậc cao nhất của P(x) là $a_n = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) \prod_{k\neq i} \frac{1}{x_i - x_k}$ có $\left|a_n\right| < \frac{n!}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \prod_{k\neq i} \frac{1}{x_i-x_k}$ mà

$$\left|x_i - x_k\right| \geq \left|i-k\right| \Rightarrow \prod_{i\neq k} \frac{1}{\left|x_i - x_k\right|} \leq \prod_{i\neq k} \frac{1}{\left|i-k\right|} = \frac{1}{k!(n-k)!}$$

$$\Rightarrow \left|a_n\right| < \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \prod_{k\neq i} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} C_n^k = 1 \text{ (Vô lý)}$$

Bài 9:Cho đa thức có bậc không quá n và có giá trị hữu tỉ tại n+1 điểm hữu tỉ khác nhau thì f(x) là đa thức có hệ số hữu tỉ

Hướng dẫn :

Áp dụng công thức nội suy Lagrange

Bài 10: Cho đa thức có bậc không quá 2n và

$|P(x)| \le 1, \forall k \in \{-n, -n+1, ... n-1, n\}$.

CMR: $|P(x)| \le 4^n$, $\forall x \in [-n, n]$

Hướng dẫn:

CM $\prod_{i=-n, i\ne k}^{n} |x-i| \le (2n)!$ và $\prod_{i=-n, i\ne k}^{n} |x-i| = (n+k)!(n-k)!$ suy ra

$$|P(x)| \le \sum_{k=-n}^{n} \frac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!} = \sum_{j=0}^{n} C_{2n}^{j} = 2^{2n}$$

Chương V. ĐỊNH LÝ VIÉT

V.1. Định lý Viét :

a. Cho đa thức bậc n với hệ số thực

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ $(a_0 \ne 0)$. $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là các nghiệm của đa thức (có thể trùng nhau).Khi đó $T_k = \sum_{i_1<i_2<...<i_k} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}...\alpha_{i_k} = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}$ $(k = 1, 2, ..., n)$

b. Định lý Viét đảo : Nếu các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa hệ

$T_k = \sum_{i_1<i_2<...<i_k} x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}$ $(k = 1, 2, ..., n)$ thì các số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là nghiệm của đa thức bậc n $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ $(a_0 \ne 0)$.

c. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các nghiệm của đa thức

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ $(a_0 \ne 0)$.Đặt $S_k = x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k$ thì

$a_0S_{m+n} + a_1S_{m+n-1} + ... + a_nS_m = 0$ với mọi số nguyên dương m

V.2.Bài tập

Bài 1:Giả sử đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có ba nghiệm phân biệt .CMR đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b)x + \frac{ab-c}{8}$ cũng có ba nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn:

Giả sử x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm phân biệt của P(x).CM $\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_2+x_3}{2}, \frac{x_3+x_1}{2}$ là ba nghiệm phân biệt của Q(x).

Bài 2:Cho phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0$ có ba nghiệm u,v,t .Với giá trị nào của a,b,c thì các số u^3, v^3, t^3 nghiệm đúng phương trình $x^3+a^3x^2+b^3x+c^3=0$ (Thi HSG Quốc Gia 1979)

Hướng dẫn:

Áp dụng định lý Viét và đặt $S_n = u^n+v^n+t^n$ ta có $S_{n+3}+aS_{n+2}+bS_{n+1}+cS_n=0$

Tính được S_3= $-a^3$ và S_3 = $-a^3$+3ab-3c suy ra c = ab và $b \le 0$

Bài 3: Phương trình $z^3-2z^2-2z+m=0$ có thể có ba nghiệm hữu tỷ phân biệt không ? Tại sao? (Thi HSG Quốc Gia 1980)

Hướng dẫn:

Giả sử các nghiệm của PT $z^3-2z^2-2z+m=0$ là $\frac{u}{t}, \frac{v}{t}, \frac{w}{t}$ trong đó u,v,w,t là các số nguyên không đồng thời là số chẵn.Áp dụng định lý Viét ta được $u^2+v^2+w^2=8t^2$ chia hết cho 8 nên u,v,w chẵn ,mà uv + vw + wt = $-2t^2$ chia hết cho 4 suy ra t chẵn, vô lý.

Bài 4: Cho đa thức bậc n $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ có n nghiệm không âm (phân biệt hay trùng nhau).CMR: $\left(\frac{a_{n-1}}{n}\right)^n \ge a_n^{n-1}$

Hướng dẫn:

Ta có $x_1x_2...x_{n-2}x_{n-1} + x_1x_2...x_{n-2}x_n + ... + x_2x_3...x_{n-1}x_n = (-1)^{n-1}a_{n-1}$ và $x_1x_2...x_{n-1}x_n = (-1)^n a_n$.Áp dụng BĐT Cô Si ta được

$$\frac{1}{n}(-1)^{n-1}a_{n-1} = \frac{1}{n}(x_1x_2...x_{n-2}x_{n-1} + x_1x_2...x_{n-2}x_n + ... + x_2x_3...x_{n-1}x_n) \geq \sqrt[n]{(x_1x_2...x_n)^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a_{n-1}}{n}\right)^n \geq a_n^{n-1}$$

Bài 5: Cho đa thức bậc n $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + 1$ với các hệ số không âm và có n nghiệm thực.CMR: $P(2) \geq 3^n$

Hướng dẫn:

Vì các hệ số không âm nên các nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n$ đều âm. Đặt $y_k = -x_k > 0\ (k = 1, 2, ..., n)$ .Ta có

$$P(x) = (x + y_1)(x + y_2)...(x + y_n) \Rightarrow P(2) = (2 + y_1)(2 + y_2)...(2 + y_n) \geq \prod_{k=1}^{n} 3\sqrt[3]{y_k} = 3^n\sqrt[3]{y_1y_2...y_n} = 3^n$$

Bài 6: Giả sử đa thức $f(x) = ax^n - ax^{n-1} + c_2x^{n-2} + ... + c_{n-2}x^2 - n^2bx + b$ có đúng n nghiệm dương. CMR tất cả các nghiệm này bằng nhau.

Hướng dẫn:

Ta có $\sum_{k=0}^{n} x_k = 1; \sum_{k=0}^{n} \frac{x_1x_2...x_n}{x_k} = (-1)^n n^2 \frac{b}{a}; x_1x_2...x_n = (-1)^n \frac{b}{a}$

$$n^2 = \frac{(-1)^n n^2 \frac{b}{a}}{(-1)^n \frac{b}{a}} = (x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$ .Vậy

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{1}{n}$$

Bài 7: Cho đa thức bậc n $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ và $a_k = \pm 1 (k = 0, 1, ..., n)$. Giả sử P(x) có n nghiệm. CMR: $n \leq 3$

Hướng dẫn:

Giả sử $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ là nghiệm của P(x).Ta có $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 3$. $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n}$ là nghiệm của đa thức $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + 1$. Ta có $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2} = 3$ Suy ra

$$9 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2}\right) \geq n^2 \Rightarrow n \leq 3$$

Bài 8: Cho đa thức bậc n $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ với $n \geq 3$.biết rằng đa thức có n nghiệm thực và $a_0 = 1, a_1 = -n, a_2 = \frac{1}{2}(n^2 - n)$.Hãy xác định các hệ số x_k với k=3,4,…,n (Thi HSG Quốc Gia 1988)

Hướng dẫn:

Giả sử $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ là nghiệm của P(x).Ta có $\sum_{k=1}^{n} x_k = n$. $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} x_k x_l = \frac{n^2 - n}{2}$.

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n$ và $\sum_{k=1}^{n} (x_k - 1)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k + n = 0 \Rightarrow x_k = 1$.Vậy P(x) = $(x-1)^n$ và $a_k = (-1)^n C_n^k \ (k = 0,1,...,n)$

Bài 9: Cho đa thức bậc n $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$, $n \geq 2, a_na_0 \neq 0$ và có n nghiệm dương.CMR: $\left|\frac{a_{n-1}a_1}{a_0a_n}\right| \geq n^2$

Hướng dẫn:

Giả sử $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ là nghiệm của P(x).Ta có

$$|x_1 + x_2 + ... + x_n| = \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$$

$\left|x_1x_2...x_{n-1}+x_1x_3...x_1+...+x_2x_3...x_n\right|=\left|\frac{a_1}{a_n}\right|;\left|x_1x_2...x_n\right|=\left|\frac{a_0}{a_n}\right|$

Suy ra $\left|\frac{a_{n-1}a_1}{a_0a_n}\right|=\left|\frac{(x_1+x_2+...+x_n)(x_1x_2...x_{n-1}+x_1x_3...x_1+...+x_2x_3...x_n)}{x_1x_2...x_n}\right|\geq n^2$

Bài 10: Cho đa thức bậc n $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+1$, trong đó mọi hệ số của đa thức đều không âm và $a_1+a_2+...+a_{n-1}\geq 3$,$a_{n-1}<2$.CMR đa thức P(x) không thể có n nghiệm.

Hướng dẫn:

Nhận xét deg P(x) > 1 và mọi nghiệm của P(x) đều âm.Giả sử $-x_1,-x_2,...,-x_n\ (x_i>0)$ là n nghiệm của P(x).Ta có

$a_{n-1}=x_1+x_2+...+x_n\geq n\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}=n\geq 2$,vô lý.

Bài 11:Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện: với mỗi số nguyên dương n, $a^n+b^n+c^n$ là một số nguyên. CMR tồn tại các số nguyên p, q, r sao cho a, b, c là 3 nghiệm của phương trình $x^3+px^2+qx+r=0$.(Thi HSG Quốc Gia 2009)

Hướng dẫn:

Đặt $T_n=a^n+b^n+c^n\in Z,\forall n\geq 1$.Ta CM các số $p=-(a=b+c),q=ab+bc+ca,r=-abc$ thỏa mãn điều kiện bài toán.a,b,c là 3 nghiệm của PT: $x^3+px^2+qx+r=0$.CM $p,q,r\in Z$.Ta có

$T_1=-p,T_2=p^2-2q,T_3=-p^3+3pq-3r,T_{n+3}=-pT_{n+2}-qT_{n+1}-rT_n\,(1)$

$p=-T_1\in Z;\ T_1,T_2\in Z\Rightarrow 2q\in Z;\ 2T_3\in Z\Rightarrow 6r\in Z$. $3T_4\in Z\Rightarrow 6q^2\in Z$

$q=\frac{k}{2}\Rightarrow 6.\frac{k^2}{4}\in Z\Rightarrow 3k^2\,\vdots\,2\Rightarrow k\,\vdots\,2\Rightarrow q\in Z$ .Từ $T_3\in Z\Rightarrow 3r\in Z\Rightarrow r=\frac{m}{3}$.Từ (1) suy ra $rT_n\in Z,\forall n\geq 1\Rightarrow mT_n\equiv 0(\text{mod}\,3)$

-Nếu $(T_n,3)=1\Rightarrow m\,\vdots\,3\Rightarrow r\in Z$

-Nếu $T_n \vdots 3, \forall n \;\; p = -T_1 \vdots 3, T_3 = -p^3 + 3pq - m \Rightarrow m \vdots 3 \Rightarrow r \in Z$.

Bài 12: Giả sử tam giác ABC có ba góc nhọn để tanA,tanB,tanC là ba nghiệm của PT: $x^3 + px^2 + qx + p = 0 \, (q \neq 1)$.CMR: $p \leq -3\sqrt{3}$ và q > 1(Thi HSG Quốc Gia 1988)

Hướng dẫn:

Áp dụng định lý Viet và BĐT

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C} \Rightarrow p^2 \geq 27 \Rightarrow p \leq -3\sqrt{3}$$

Áp dụng $(x + y + z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \geq 9$

Bài 13: Cho a,b,c,d > 0.

CMR: $\sqrt[3]{\dfrac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \leq \sqrt{\dfrac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}$

Dấu bằng xảy ra khi nào ?

Hướng dẫn:

Giả sử $a \leq b \leq c \leq d$ và F(x)=(x-a).(x-b).(x-c).(x-d) Ta có F(a) = F(b) = F(c) = F(d) = 0 nên $F'(x)$ có 3 nghiệm y_1, y_2, y_3 trên các đoạn [a;b], [b;c], [c;d] và

$a \leq y_1 \leq b \leq y_2 \leq c \leq y_3 \leq d$

Ta có $F(x) = x^4 - T_1x^3 + T_2x^2 - T_3x + T_4$ với $T_1 = a+b+c+d$, $T_2 = ab+ac+ad+bc+bd+cd$,

$T_3 = abc+abd+acd+bcd$, $T_4 = abcd$

$F'(x) = 4x^3 - 3T_1x^2 + 2T_2x - T_3$ có 3 nghiệm dương y_1, y_2, y_3 . Theo định lí Viét ta :

$y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = \dfrac{T_2}{2}$; $y_1y_2y_3 = \dfrac{T_3}{4}$.Áp dụng BĐT Côsi ta có :

$$\frac{1}{3}(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1) \geq \sqrt[3]{(y_1y_2y_3)^2} \;\; \Rightarrow \frac{T_2}{6} \geq \sqrt[3]{\left(\frac{T_3}{4}\right)^2} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{T_3}{4}} \leq \sqrt{\frac{T_2}{6}}$$

Bài 14: Cho $a,b,c,d \geq 0$ thỏa 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+abc+abd+acd+bcd = 16 CMR: $a+b+c+d \geq \frac{2}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$ (Thi QG năm 1996)

Hướng dẫn:

Đặt F(x) , T_i (i=1,2,3,4) như bài 12 ta có $F'(x)$ có 3 nghiệm không âm x_1, x_2, x_3 Theo định lí Viet ta có : $x_1+x_2+x_3=\frac{3T_1}{4}$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{T_2}{2}$, $x_1x_2x_3=\frac{T_3}{4}$

Từ giả thiết ta có $2T_2+T_3=16$ suy ra $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2x_3=4$ (1)

Ta lại có $T_1 \geq \frac{2}{3}T_2 \Leftrightarrow x_1+x_2+x_3 \geq x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ (*)

Do (1) nên trong 3 số x_1 ,x_2 ,x_3 có nhiều nhất một số bằng 0 ,giả sử x_1,x_2 >0 từ (1) suy ra $x_3=\frac{4-x_1x_2}{x_1+x_2+x_1x_2}$

Từ (*) ta có

$$(*) \Leftrightarrow x_1+x_2+\frac{4-x_1x_2}{x_1+x_2+x_1x_2} \geq 4-x_1x_2\frac{4-x_1x_2}{x_1+x_2+x_1x_2} \Leftrightarrow$$

$$(x_1+x_2-2)^2 \geq x_1x_2(1-x_1)(1-x_2) \quad (**)$$

Nếu $(1-x_1)(1-x_2) \leq 0$ thì (**) đúng

Nếu $(1-x_1)(1-x_2) > 0$ thì từ $0 < (1-x_1)(1-x_2) \leq \frac{1}{4}(2-x-y)^2$ và $0<xy\leq 4$ suy ra (**) đúng.

Chương VI. ĐA THỨC CHEBYSHEV (TSÊBƯSEP)

VI.1. Đa thức Tsêbưsep

VI.1.1. Định nghĩa:

Với mọi số nguyên dương n, Đa thức Tsêbưsep bậc n là đa thức $T_n(x)$ được xác định:

$$\begin{cases} T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1 \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{cases} (n \geq 2)$$

VI.1.2. Nhận xét 1:

Đa thức Tsêbưsep $T_n(x)$ thỏa mãn điều kiện $T_n(\cos u) = \cos nu \ (u \in R)(1)$

Thật vậy ta chứng minh (1) bằng quy nạp theo n.Ta có $T_1(\cos u) = \cos u$, $T_2(\cos u) = 2\cos^2 u - 1 = \cos 2u$ Giả sử $T_k(\cos u) = \cos ku \ (u \in R)$ với mọi $k \leq n$ .Ta CM $T_{n+1}(\cos u) = \cos(n+1)u$ Từ

$$\cos(n+1)u + \cos(n-1)u = 2\cos u \cos nu \Rightarrow \cos(n+1)u = 2\cos u \cos nu - \cos(n-1)u =$$
$$= 2\cos u T_n(\cos u) - T_{n-1}(\cos u) = T_{n+1}(\cos u)$$

Vậy $T_n(\cos u) = \cos nu \ (u \in R)$

VI.1.3. Nhận xét 2:

Từ định nghĩa đa thức Tsêbưsep và (1) ta có thể biểu diễn $\cos nu$ thành đa thức theo cosu.Chẳng hạn

$$\cos 3u = T_3(\cos u) = 2\cos u T_2(\cos u) - T_1(\cos u) = 2\cos u(2\cos^2 u - 1) - \cos u = 4\cos^3 u - 3\cos u$$
$$\cos 4u = T_4(\cos u) = 2\cos u T_3(\cos u) - T_2(\cos u) = 2\cos u(4\cos^3 u - 3\cos u) - (2\cos^2 u - 1)$$
$$= 8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1, \ldots$$

VI.2. Các tính chất của đa thức Tsêbưsep:

VI.2.1.Tính chất 1:

Đa thức Tsêbưsep $T_n(x)$ có bậc n và hệ số bậ cao nhất là 2^{n-1}

Chứng minh: Sử dụng định nghĩa và phép quy nạp.

VI.2.2.Tính chất 2:

$T_n(x)$ là hàm số chẵn nếu n chẵn và $T_n(x)$ là hàm số lẻ nếu n lẻ.

Chứng minh: Cách 1: Sử dụng định nghĩa và phép quy nạp

Cách 2: Ta có

$$T_n(-\cos u) = T_n[\cos(\pi + u)] = \cos(n\pi + nu) = (-1)^n \cos nu = (-1)^n T_n(\cos u)$$

Từ đó suy ra $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$

VI.2.3.Tính chất 3:

Đa thức Tsêbưsep $T_n(x)$ có n nghiệm phân biệt thuộc đoạn [-1;1]

Chứng minh: Ta CM trong đoạn [-1;1] $T_n(x)$=0 có n nghiệm phân biệt và đó là tất cả các nghiệm của $T_n(x)$

Vì $|x| \leq 1$ nên có thể đặt $x = \cos u$, ta có

$$0 = T_n(x) = T_n(\cos u) = \cos nu \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} (k \in Z)$$

Đặt $u_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \Rightarrow x_k = \cos u_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$.Cho k = 0,1,2,…,n-1 ta có $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ là n nghiệm phân biệt của $T_n(x)$

VI.2.4.Tính chất 4:

i/ $|T_n(x)| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$

ii/Trên đoạn [-1;1] , $|T_n(x)| = 1$ chỉ xảy ra với n+1 giá trị khác nhau $x_k^{/} = \cos\frac{k\pi}{n}$ $(k = 0,1,...,n)$,khi đó $T_n(x_k^{/}) = (-1)^k$

Chứng minh: i/ Với $|x| \leq 1$ đặt $x = \cos u$ ta có $|T_n(x)| = |T_n(\cos u)| = |\cos nu| \leq 1$

ii/ Trên đoạn [-1;1] ,

$$|T_n(x)| = |\cos nu| = 1 \Leftrightarrow \sin nu = 0 \Leftrightarrow u = \frac{k\pi}{n} \ (k \in Z)$$

$x_k^{/} = \cos\frac{k\pi}{n}$ $(k = 0,1,...,n)$ là n+1 giá trị khác nhau sao cho $|T_n(x)| = 1$

VI.3. Áp dụng:

Bài 1: Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa $|P(x)| \leq 1, \forall x \in [-1;1]$.CMR

$Q(x) = cx^2 + bx + a$

có tính chất $|Q(x)| \leq 2$, $\forall x \in [-1;1]$.

Hướng dẫn:

Áp dụng công thức nội suy Lagrange cho đa thức bậc không quá hai f(x) với 3 số 1,-1,0 ta có: $P(x) = \frac{P(1)}{2}(x^2 + x) + \frac{P(-1)}{2}(x^2 - x) + P(0)(1 - x^2)$.Ta có

$$Q(x) = x^2 P(\frac{1}{x}) = \frac{P(1)}{2}(1 + x) + \frac{P(-1)}{2}(1 - x) + P(0)(1 - x^2)$$

$$\Rightarrow |Q(x)| \leq \frac{1}{2}(1 + x + 1 - x + 2 - 2x^2) = 2 - x^2 \leq 2, \forall x \in [-1;1]$$

Bài 2 : Cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa

$|P(x)| \leq 1$, $\forall x \in [-1;1]$.CMR $Q(x) = dx^3 + cx^2 + bx + a$

có tính chất $|Q(x)| \leq 4$, $\forall x \in [-1;1]$.

Hướng dẫn:

Áp dụng công thức nội suy Lagrange cho đa thức bậc không quá ba P(x) với 4 số $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$ ta có:

$$P(x) = -\frac{2P(-1)}{3}(x^2 - \frac{1}{4})(x - 1) + \frac{4P(-\frac{1}{2})}{3}(x^2 - 1)(x - \frac{1}{2}) - \frac{4P(\frac{1}{2})}{3}(x^2 - 1)(x + \frac{1}{2}) +$$
$$+ \frac{2P(1)}{3}(x^2 - \frac{1}{4})(x + 1)$$

.

Ta có

$$Q(x)=x^3P(\frac{1}{x})=-\frac{2P(-1)}{3}(1-\frac{x^2}{4})(1-x)+\frac{4P(-\frac{1}{2})}{3}(1-x^2)(1-\frac{x}{2})-\frac{4P(\frac{1}{2})}{3}(1-x^2)(1+\frac{x}{2})+$$
$$+\frac{2P(1)}{3}(1-\frac{x^2}{4})(1+x)\Rightarrow|Q(x)|\le\frac{2}{3}(1-\frac{x^2}{4})(1-x)+\frac{4}{3}(1-x^2)(1-\frac{x}{2})+\frac{4}{3}(1-x^2)(1+\frac{x}{2})+$$
$$+\frac{2}{3}(1-\frac{x^2}{4})(1+x)=4-3x^2\le 4,\forall x\in[-1;1]$$

Bài 3: (Bài toán tổng quát):Cho đa thức $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ thỏa $|P(x)|\le 1$, $\forall x\in[-1;1]$.CMR

$Q(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$

có tính chất $|Q(x)|\le 2^{n-1}$, $\forall x\in[-1;1]$.

Hướng dẫn:

Gọi $x_k^/=\cos\frac{k\pi}{n}$ $(k=0,1,...,n)$. Áp dụng công thức nội suy Lagrange cho đa thức bậc không quá n P(x) với n+1 số $x_0^/,x_1^/,...,x_n^/$ ta có:

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}P(x_k^/)\frac{(x-x_0^/)(x-x_1^/)...(x-x_n^/)}{(x_k^/-x_0^/)(x_k^/-x_1^/)...(x_k^/-x_n^/)}\Rightarrow Q(x)=x^nP(\frac{1}{x})=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}P(x_k^/)\frac{(1-xx_0^/)(1-xx_1^/)...(1-xx_n^/)}{(x_k^/-x_0^/)(x_k^/-x_1^/)...(x_k^/-x_n^/)},\forall x\ne 0(1)$$

Vì hai vế là đa thức nên (1) đúng với mọi x.Với $\forall x\in[-1;1]$ ta có:

$$|Q(x)|\le\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{(1-xx_0^/)(1-xx_1^/)...(1-xx_n^/)}{(x_k^/-x_0^/)(x_k^/-x_1^/)...(x_k^/-x_n^/)}\right|=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(1-xx_0^/)(1-xx_1^/)...(1-xx_n^/)}{(x_k^/-x_0^/)(x_k^/-x_1^/)...(x_k^/-x_n^/)}$$

(2)

(Vì $1=x_0^/>x_1^/>...>x_n^/=-1$ và $1-xx_i^/\ge 0,\forall i$).

Mặt khác áp dụng công thức nội suy Lagrange cho đa thức Tsêbưsep $T_n(x)$tại n+1 số $x_0^/,x_1^/,...,x_n^/$ ta được :

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}T_n(x_k^/)\frac{(x-x_0^/)(x-x_1^/)...(x-x_n^/)}{(x_k^/-x_0^/)(x_k^/-x_1^/)...(x_k^/-x_n^/)}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(x-x_0^/)(x-x_1^/)...(x-x_n^/)}{(x_k^/-x_0^/)(x_k^/-x_1^/)...(x_k^/-x_n^/)}$$

Xét đa thức $T_n^*(x) = x^n T_n\left(\frac{1}{x}\right)$ Tương tự như (1) ta có

$T_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(1-xx_0^/)(1-xx_1^/)...(1-xx_n^/)}{(x_k^/ - x_0^/)(x_k^/ - x_1^/)...(x_k^/ - x_n^/)}, \forall x \neq 0$ (đẳng thức cũng đúng với mọi x) (3)

So sánh (2) và (3) ta có $|Q(x)| \leq T_n^*(x)$, $\forall x \in [-1;1]$. Đa thức Tsêbưsep $T_n(x)$ có n nghiệm $x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ $(k = 0,1,...,n-1)$ và có hệ số bậc cao nhất bằng 2^{n-1} nên:

$T_n(x) = 2^{n-1}(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$

$\Rightarrow T_n^*(x) = 2^{n-1}(1 - xx_0)(1 - xx_1)...(1 - xx_{n-1})$

Dãy $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ là dãy đối xứng tức $x_0 = -x_{n-1}, x_1 = -x_{n-2}, x_2 = -x_{n-3}, ...$ nên

$T_n^*(x) = 2^{n-1}(1 + xx_0)(1 + xx_1)...(1 + xx_{n-1}) \Rightarrow \left|T_n^*(x)\right|^2 =$

$= 4^{n-1}(1 - x^2x^2{}_0)(1 - x^2x^2{}_1)...(1 - x^2x^2{}_{n-1}) \leq 4^{n-1}$

$\Rightarrow |Q(x)| \leq T_n^*(x) \leq 2^{n-1}, \forall x \in [-1;1]$.

Chương VII: ÁP DỤNG ĐA THỨC ĐỂ GIẢI TOÁN

VII.1. Áp dụng trong lượng giác

Bài 1:Cho đa thức f(x) có hệ số hữu tỷ.CMR nếu f(x) nhận $\cos\frac{\pi}{5}$ làm nghiệm thì cũng nhận $\cos\frac{3\pi}{5}$ làm nghiệm .

Hướng dẫn:

$\frac{\pi}{5}$ và $\frac{3\pi}{5}$ là nghiệm của PT

$\cos 2x = -\cos 3x \Leftrightarrow (1 + \cos x)(4\cos^2 x - 2\cos x - 1) = 0)$. $\cos\frac{\pi}{5}, \cos\frac{3\pi}{5}$ là hai nghiệm vô tỷ của PT $4x^2-2x-1=0$. Giả sử $f(x)=(4x^2-2x-1)q(x)+r(x)$ với deg r(x)< 2 và $r(\cos\frac{\pi}{5})=0 \Rightarrow r(x)\equiv 0 \Rightarrow f(\cos\frac{3\pi}{5})=0$

Bài 2:Tìm các số hữu tỷ p,q,r thỏa $p\cos\frac{\pi}{7}+q\cos\frac{2\pi}{7}+r\cos\frac{3\pi}{7}=1$

Hướng dẫn:

Từ $\sin\frac{4\pi}{7}=\sin\frac{3\pi}{7}$ suy ra $\cos\frac{\pi}{7}$ là nghiệm PT $8x^3-4x^2-4x+1=0$ do đó $\cos\frac{\pi}{7}$ là số vô tỷ.

Ta CM không tồn tại đa thức bậc ≤ 2 nhận $\cos\frac{\pi}{7}$ làm nghiệm(CM tương tự bài 1)

Từ đề bài suy ra

$$(2r+2q)\cos^2\frac{\pi}{7}+(p-r)\cos\frac{\pi}{7}-\frac{r}{2}-q-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2r+2q=0 \\ p-r=0 \\ \frac{r}{2}+q+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow p=r=2, q=-2$$

Bài 3: CMR với mọi số tự nhiên n số $T=\frac{1}{\cos^n\frac{\pi}{7}}+\frac{1}{\cos^n\frac{3\pi}{7}}+\frac{1}{\cos^n\frac{5\pi}{7}}$ là số hữu tỷ.

Hướng dẫn:

$\frac{\pi}{7};\frac{3\pi}{7};\frac{5\pi}{7}$ là các nghiệm của PT

$cos4x=\cos 3x \Leftrightarrow (\cos x-1)(8\cos^3 x+4\cos^2 x-4\cos x+1)=0$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{7}, \cos\frac{3\pi}{7}, \cos\frac{5\pi}{7}$ là các nghiệm của PT $8x^3+4x^2-4x+1=0$

Đặt $S_n = \cos^n\frac{\pi}{7} + \cos^n\frac{3\pi}{7} + \cos^n\frac{7\pi}{7}$ thì từ $8S_{n+3} - 4S_{n+2} - 4S_{n+1} + S_n = 0$ suy ra

S_n là số hữu tỷ

$\Rightarrow \cos^n\frac{\pi}{7}\cos^n\frac{3\pi}{7} + \cos^n\frac{3\pi}{7}\cos^n\frac{5\pi}{7} + \cos^n\frac{\pi}{7}\cos^n\frac{3\pi}{7} \in Q; \cos^n\frac{\pi}{7}\cos^n\frac{3\pi}{7}\cos^n\frac{5\pi}{7} \in Q \Rightarrow T \in Q$

Bài 4:Tính tổng $A = \cos^5\frac{\pi}{7} + \cos^5\frac{3\pi}{7} + \cos^5\frac{5\pi}{7}$ (Thi Chọn ĐT thi HSG Quốc Gia 2009, Tiền Giang)

Hướng dẫn:

$\frac{\pi}{7};\frac{3\pi}{7};\frac{5\pi}{7}$ là các nghiệm của PT

$cos4x = \cos 3x \Leftrightarrow (\cos x - 1)(8\cos^3 x + 4\cos^2 x - 4\cos x + 1) = 0$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{7}, \cos\frac{3\pi}{7}, \cos\frac{5\pi}{7}$ là các nghiệm của PT $8x^3 + 4x^2 - 4x + 1 = 0$.Từ

$8S_{n+3} - 4S_{n+2} - 4S_{n+1} + S_n = 0$, $S_0, S_1, S_2 \Rightarrow S_5$

Bài 5:Tính tổng $A = \tan^6\frac{\pi}{18} + \tan^6\frac{5\pi}{18} + \tan^6\frac{7\pi}{18}$

Hướng dẫn:

$\frac{\pi}{18};\frac{5\pi}{18};\frac{7\pi}{18}$ là các nghiệm của PT $\tan^2 3x = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \tan^2\frac{\pi}{18}, \tan^2\frac{5\pi}{18}, \tan^2\frac{7\pi}{18}$ là các nghiệm của PT $3x^3 - 27x^2 + 33x - 1 = 0$

Bài 6:Cho tam giác ABC với các ký hiệu quen thuộc. CMR:

a/ $ab + bc + ca = r^2 + p^2 + 4Rr$

b/ $r^2 + p^2 = 2R(h_a + h_b + h_c - 2r)$

c/ $\frac{bc}{p-a} + \frac{ca}{p-b} + \frac{ab}{p-c} \ge (5 - \frac{2r}{R})p$

d/ $p^2 \ge 3r^2 + 12rR$

Hướng dẫn:

a/Từ các công thức $r=(p-a)\tan\frac{A}{2};a=2R\sin A;\sin A=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$ thay $\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}$ vào $a=2R\sin A$ ta được

$a^3-2pa^2+(p^2+r^2+4Rr)a-4pRr=0$ tương tự cho b,c rồi áp dụng định lý Viet

b/Thay $h_a=\frac{2S}{a}$ vào được câu a/

c/Tìm PT bậc ba nhận $\cos^2\frac{A}{2},\cos^2\frac{B}{2},\cos^2\frac{C}{2}$ làm nghiệm rồi áp dụng định lý Viet

d/ Áp dụng BĐT $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$

VII.2. Áp dụng giải hệ phương trình:

Bài 7:Giải các hệ PT:

a/ $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=27 \\ xy+yz+zx=27 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \end{cases}$ b/ $\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^3+y^3+z^3=a^3 \end{cases}$ c/

$$\begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2 \\ x^3+y^3+z^3=a^3+b^3+c^3 \end{cases}$$

Hướng dẫn:

a/ Từ hệ tìm được $x+y+z=9, xy+yz+zx=27, xyz=27$.Áp dụng định lý Viét đảo hệ có nghiệm duy nhất (3;3;3) b/ Hệ có ba nghiệm (a;0;0), (0;a;0), (0;0;a)

c/ Hệ có nghiệm (a;b;c) và các hoán vị

Bài 8:Cho $\sin a, \sin b, \sin c \neq 0$ và $\cos a, \cos b, \cos c$ khác nhau đôi một. Giải hệ PT:

$$\begin{cases} x\sin a + y\sin 2a + z\sin 3a = \sin 4a \\ x\sin b + y\sin 2b + z\sin 3b = \sin 4b \\ x\sin c + y\sin 2c + z\sin 3c = \sin 4c \end{cases}$$

Hướng dẫn:

Từ hệ suy ra $\cos a, \cos b, \cos c$ là ba nghiệm của PT:

$8t^3 - 4zt^2 - (4+2y)t + z - x = 0$.Áp dụng định lý Viét ta có

$$\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = \dfrac{z}{2} \\ \cos a\cos b + \cos b\cos c + \cos c\cos a = \dfrac{-y-2}{4} \\ \cos a\cos b\cos c = \dfrac{z-x}{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 8\cos a\cos b\cos c + 2(\cos a + \cos b + \cos c) \\ y = -4(\cos a\cos b + \cos b\cos c + \cos c\cos a) - 2 \\ z = 2(\cos a + \cos b + \cos c) \end{cases}$$

Bài 9: Cho $\cos a, \cos b, \cos c \neq 0$ và $\cos a, \cos b, \cos c$ khác nhau đôi một. Giải hệ PT:

$$\begin{cases} x\cos a + y\cos 2a + z\cos 3a = \cos 4a \\ x\cos b + y\cos 2b + z\cos 3b = \cos 4b \\ x\cos c + y\cos 2c + z\cos 3c = \cos 4c \end{cases}$$

Hướng dẫn:

Từ hệ suy ra $\cos a, \cos b, \cos c$ là ba nghiệm của PT:

$8t^4 - 4zt^3 - (2y+8)t^2 + (3z-x)t + y + 1 = 0$.Gọi u là ghiệm thứ tư của PT rồi áp dụng định lý Viét suy ra kết quả.

Bài 10: Cho a,b,c phân biệt. Giải hệ PT: $\begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ x+by+b^2z=b^3 \\ x+cy+c^2z=c^3 \end{cases}$

Hướng dẫn:

a,b,c là ba nghiệm của PT: $t^3-zt^2-yt-x=0$

Bài 11: Giải hệ PT: $\begin{cases} x+2y-3z=9 \\ 2xy-6yz-3zx=27 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}-\dfrac{1}{3z}=1 \end{cases}$

Hướng dẫn:

Đặt u = x,v = 2y,w = -3z .Đưa về hệ đối xứng.

Bài 12: Cho a,b,c,d phân biệt. Giải hệ PT: $\begin{cases} a^3x+a^2y+az+t+a^4=0 \\ b^3x+b^2y+bz+t+b^4=0 \\ c^3x+c^2y+cz+t+c^4=0 \\ d^3x+d^2y+dz+t+d^4=0 \end{cases}$

Hướng dẫn:

Giải tương tự bài 10

VII.3. Áp dụng trong các bài toán tổ hợp:

Sử dụng nhị thức Newton và đồng nhất hai đa thức để chứng minh đẳng thức

Bài 13: CMR: $C_n^k+4C_n^{k-1}+6C_n^{k-2}+4C_n^{k-3}+C_n^{k-4}=C_{n+4}^k\ (4\le k\le n)$

Hướng dẫn:

$$(1+x)^{n+4}=(1+x)^n(1+x)^4 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+4}C_{n+4}^k x^k=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k\right)(x^4+4x^3+6x^2+4x+1)$$

Đồng nhất hệ số x^k hai vế.

Bài 14: Cho k,n,m là ba số tự nhiên thỏa $m\le k\le n$.CMR:

$C_m^0C_n^k+C_m^1C_n^{k-1}+C_m^2C_n^{k-2}+...+C_m^mC_n^{k-m}=C_{m+n}^k$

Hướng dẫn:

Khai triển và đồng nhất 2 vế số hạng x^k của $(1+x)^{m+n}=(1+x)^m(1+x)^n$

Bài 15: CMR: $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\left(C_n^2\right)^2+...+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n$

Hướng dẫn:

So sánh hệ số x^n của đồng nhất thức $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$

Bài 16: CMR: a/ $C_n^n+C_{n+1}^n+C_{n+2}^n+...+C_{n+k}^n=C_{n+k+1}^n$

b/ $C_n^0-C_n^1+C_n^2+...+(-1)^pC_n^p=(-1)^pC_{n-1}^p$

Hướng dẫn:

a/ Vế trái là hệ số x^n của đa thức

$$f(x)=(1+x)^n+(1+x)^{n+1}+(1+x)^{n+2}+...+(1+x)^{n+k}=\frac{1}{x}[(1+x)^{n+k+1}-(1+x)^n].$$

Vế trái là hệ số x^n của đa thức $=(1+x)^{n+k+1}-(1+x)^n$ là C_{n+k+1}^n

b/ Vế trái là hệ số x^n của đa thức

$$f(x)=x^n(1+x)^n-x^{n-1}(1+x)^n+x^{n-2}(1+x)^n+...+(-1)^nx^{n-p}(1+x)^n=$$
$$=(1+x)^{n-1}[(-1)^px^{n-p}+x^{n+1}]$$