

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA CỦA TRUNG QUỐC NĂM 2012

Đề TST 1.

Ngày 1.

Bài 1.

Cho các số phức x_i, y_i với $i = \overline{1, n}$ thỏa mãn $|x_i| = |y_i| = 1$ với mọi $i = \overline{1, n}$. Đặt

$$x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, z_i = xy_i + yx_i - x_i y_i, i = \overline{1, n}$$

Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^n |z_i| \leq n$.

Bài 2.

Cho tam giác ABC nhọn, không cân ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) lên các cạnh BC, CA, AB. Gọi A_0 là điểm đối xứng với D qua EF và A_1 là giao điểm của AA_0 với đường thẳng BC. Các điểm B_1, C_1 được xác định tương tự.

Chứng minh rằng A_1, B_1, C_1 cùng nằm trên đường thẳng Euler của tam giác DEF.

Bài 3.

Với mỗi số nguyên dương n , ta đặt $x_n = C_{2n}^n$.

Chứng minh rằng tồn tại hai tập hợp vô hạn A, B sao cho $A \cap B = \emptyset$ và $\frac{\prod_{i \in A} x_i}{\prod_{i \in B} x_i} = 2012$.

Ngày 2.

Bài 1.

Cho trước hai đường tròn ω_1, ω_2 . Gọi S là tập hợp tất cả các tam giác ABC thỏa mãn ω_1, ω_2 lần lượt là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC . Giả sử ω_2 tiếp xúc với các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F .

Chứng minh rằng nếu tập S khác rỗng thì trọng tâm của tam giác DEF cố định.

Bài 2.

Với mỗi số nguyên dương n , ta kí hiệu $\tau(n)$ là tập hợp tất cả các ước nguyên dương của n . Một số nguyên dương n được gọi là “số tốt” nếu $\tau(m) < \tau(n)$ với mọi $m < n$.

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương k cho trước, luôn tồn tại hữu hạn số tốt không chia hết cho k .

Bài 3.

Xét $n \in \mathbb{Z}$ và hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(x + y + f(y)) = f(x) + ny \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Hãy tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn điều kiện trên.

Đề TST 2.

Bài 1.

Cho một đồ thị đơn G . Gọi một tập hợp gồm t đỉnh là t -clique nếu chúng đôi một kề nhau. Một đỉnh được nối với tất cả các đỉnh trong đồ thị thì gọi đó là đỉnh trung tâm. Cho 2 số nguyên n, k thỏa mãn $\frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}n < k < n$. Một đồ thị G thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- (1) G không chứa $(k+1)$ -clique.
- (2) Nếu ta thêm vào G một cạnh bất kì sẽ thu được một $(k+1)$ -clique.

Tìm số đỉnh trung tâm nhỏ nhất của G .

Bài 2.

Chứng minh rằng tồn tại số thực dương C thỏa mãn tính chất:

Với mỗi $n \geq 2$ và tập hợp X là tập con của tập $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ thỏa mãn $|X| \geq 2$, tồn tại các số x, y, z, w thuộc X (không nhất thiết phân biệt) thỏa mãn

$$0 < |xy - zw| < C\alpha^{-4} \text{ với } \alpha = \frac{|X|}{n}.$$

Bài 3.

Cho a_1, a_2 với $a_1 < a_2$ là các số nguyên cho trước. Với $n \geq 3$, số a_n là số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn a_{n-1} và a_n có thể được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tổng của $a_i + a_j$ mà $1 \leq i < j \leq n-1$.

Chứng minh rằng nếu tồn tại hữu hạn các số chẵn trong dãy $\{a_n\}$ thì dãy $\{a_{n+1} - a_n\}$ tuần hoàn, nghĩa là tồn tại số nguyên dương T mà $a_{n+1+T} - a_{n+T} = a_{n+1} - a_n, \forall n$.

Ngày 2.

Bài 1.

Cho $n \geq 2$ là số tự nhiên.

Chứng minh rằng tồn tại hữu hạn các bộ n số nguyên dương $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$(i) \quad a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n.$$

$$(ii) \quad (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = 1.$$

$$(iii) \quad a_1 = \sum_{i=1}^n (a_i, a_{i+1}) \text{ với quy ước } a_{n+1} = a_1.$$

Bài 2.

Cho hai số nguyên dương $m, n > 1$ và các số thực dương r, s thỏa mãn $r < s$. Với mọi $a_{ij} \geq 0$ là các số thực không đồng thời bằng 0, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f = \frac{\left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}^s \right)^{\frac{r}{s}} \right)^{\frac{1}{r}}}{\left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^s \right)^{\frac{s}{r}} \right)^{\frac{1}{s}}}$$

Bài 3.

Cho một số nguyên dương $n \geq 2$, một hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$ gọi là tốt, nếu với mỗi số nguyên dương k thỏa $1 \leq k \leq n-1$ thì tồn tại một số nguyên $j(k)$ thỏa mãn với mọi số nguyên m thì $f(m + j(k)) \equiv f(m + k) - f(m) \pmod{n+1}$

Tìm số các hàm số “tốt”.

ĐỀ TST 3.

Ngày 1.

Bài 1.

Cho tam giác ABC nhọn có $\angle A > 60^\circ$, trực tâm H . Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\angle HMB = \angle HNC = 60^\circ$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN . Giả sử D là điểm nằm cùng phía với A so với BC sao cho tam giác DBC đều.

Chứng minh rằng H, O, D thẳng hàng.

Bài 2.

Xét số nguyên dương $k \geq 2$. Chứng minh rằng tồn tại k số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ đôi một khác nhau sao cho tồn tại các số nguyên không âm $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$ và $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ thỏa mãn $a_i \leq b_i \leq 2a_i, i = 1, 2, 3, \dots, k$ và nếu $\prod_{i=1}^k b_i^{c_i} < \prod_{i=1}^k b_i$ thì ta cũng có

$$k \prod_{i=1}^k b_i^{c_i} < \prod_{i=1}^k b_i.$$

Bài 3.

Tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của c sao cho với mọi đa thức monic có bậc 2012

$$P(x) = x^{2012} + a_{2011}x^{2011} + a_{2010}x^{2010} + \dots + a_1x + a_0,$$

ta có thể xây dựng được đa thức $Q(x)$ từ đó bằng cách nhân -1 vào một số hệ số của đa thức $P(x)$ nêu trên sao cho với mỗi nghiệm phức z của đa thức $Q(x)$ này thì ta luôn có bất đẳng thức sau $|\operatorname{Im} z| \leq c |\operatorname{Re} z|$.

Ngày 2.

Bài 1.

Cho số nguyên dương $n \geq 4$ và xét các tập hợp $A, B \subseteq \{1, 2, 3, \dots, n\}$ thỏa mãn điều kiện

Với mọi $a \in A, b \in B$ thì $ab + 1$ là số chính phương. Chứng minh rằng

$$\min\{|A|, |B|\} \leq \log_2 n.$$

Bài 2.

Tìm tất cả các số nguyên dương $k \geq 3$ thỏa mãn tính chất:

Tồn tại các số nguyên dương m, n sao cho

$$1 < m < k, 1 < n < k \text{ và } (m, k) = (n, k) = 1, m + n > k, \text{ đồng thời } k \mid (m-1)(n-1).$$

Bài 3.

Trong một hình vuông được tạo bởi 2012×2012 ô vuông có chứa những con bọ, trong một ô vuông có nhiều nhất 1 con bọ. Vào một thời điểm nào đó, những con bọ này bay lên rồi lại đậu xuống lại vào các ô vuông, mỗi ô vuông cũng có nhiều nhất một con bọ. Đối với mỗi con bọ, có thể xem đoạn thẳng có hướng nối tâm của ô vuông lúc đầu và tâm của lúc sau mà nó đậu lên tạo thành một vector.

Với một số lượng bọ ban đầu, xét tất cả những trường hợp có thể xảy ra với các vị trí đầu tiên và cuối cùng của những con bọ, hãy tìm độ dài lớn nhất của tổng các vector.