

ĐỀ RA KÌ NÀY - TẠP CHÍ KVANT 01-2008

Nhóm dịch thuật Kvant - Cộng đồng MathVn

<http://mathvn.org>

M2071. Số tự nhiên nhỏ nhất sao cho từ sự gạch bỏ đi các chữ số của nó có thể nhận được bất kì số tự nhiên nào từ 1 đến n , kí hiệu là $U(n)$, gọi là số "phổ dụng". Hỏi số phổ dụng $U(2008)$ có bao nhiêu chữ số?

C. Volchenkov

M2072. Tìm chữ số thứ $n + 1$ sau dấu phẩy trong các viết thập phân của số $\sqrt{99\dots 99}$ (Trong đó có $2n$ chữ số 9)

Ya. Aliev

M2073. Cho hai đường tròn, cắt nhau tại điểm P và Q . Đặt C là điểm bất kì nằm trên một trong hai đường tròn khác P, Q . Điểm A, B là giao điểm thứ hai của các đường thẳng CP, CQ với đường tròn kia. Tìm vị trí hình học của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. Zaslavskij

M2074. Một người khách viếng thăm đi vòng quanh các phòng của bảo tàng theo quy luật sau: Nếu đang ở trong một phòng nào đó, anh ta sẽ lựa chọn giữa tất cả các phòng kề cận với phòng này mà có số lần viếng thăm nhỏ hơn và đi vào đó. Hỏi phải chăng sau một thời gian thì người khách đó có thể đi qua tất cả các phòng của bảo tàng. Biết rằng từ bất cứ phòng nào đều có thể đi đến một phòng khác bất kì của bảo tàng.

C. Volchenkov

M2075. Mỗi cạnh của một hình đa diện lồi này song song với một cạnh của hình đa diện lồi khác. Hỏi có phải chúng có cùng thể tích hay không?

A. Zaslavskij

M2076. Tìm tất cả các hàm số $f : R \rightarrow R$, thỏa mãn với mọi $x \neq 0$ và y sao cho

$$xf(y) - yf(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

E. Turkevich

M2077. Tìm số tự nhiên k nhỏ nhất thỏa mãn tính chất sao đây: Trong bảng vuông $n \times n$ bất kì với các ô được điền các số thực, có thể làm tăng không quá k số sao cho tổng các số ở tất cả các hàng dọc và ở tất cả các hàng ngang đều trở nên bằng nhau.

P. Kojevnikov.

M2078. Điểm A', B', C' là chân của các đường cao của tam giác nhọn ABC . Đường tròn tâm B bán kính BB' cắt đường thẳng $A'C'$ tại K, L (K, A nằm về một phía của đường thẳng BB'). Chứng tỏ rằng giao điểm của đường thẳng AK, CL nằm trên đường thẳng BO , với O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

V. Protasov

M2079. Tồn tại hay không bộ ba số tự nhiên đôi một nguyên tố cùng nhau x, y, z lớn hơn 10^{10} , sao cho $x^8 + y^8 + z^8$ chia hết cho $x^4 + y^4 + z^4$?

V. Senderov

M2080. Dãy véc-tơ $\{e_n\}$ trên mặt phẳng thỏa mãn điều kiện $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = (1, 0)$, $e_{n+2} = e_{n+1} + e_n$ với $n \leq 1$. Đặt lại tất cả các véc-tơ là tổng của một nhóm số hạng nào đó của dãy trên về gốc tọa độ. Chứng tỏ rằng tập các đầu mút của các véc-tơ là các điểm có tọa độ nguyên nằm bên trong một dải tạo nào đó tạo bởi hai đường thẳng song song.

I. Pushkarev

ĐỀ RA KÌ NÀY - TẠP CHÍ KVANT 02-2008

Nhóm dịch thuật Kvant - <http://mathvn.org>

Tháng 06 - 2008

M2081. Trên bảng viết 3 số dương $x, y, 1$. Được phép viết lên bảng tổng hoặc hiệu hai số nào đó đã được viết trên bảng hoặc là viết số nghịch đảo của số nào đó đã được viết. Có phải là luôn có thể nhận được trên bảng số a) x^2 ; b) xy hay không?

G. Galperin

M2082. Các đường chéo của tứ giác nội tiếp $ABCD$ cắt nhau tại P . Giả sử K, L, M, N là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA theo thứ tự. Chứng tỏ rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác PKL, PLM, PMN, PNK bằng nhau.

A. Zaslavskij

M2083. Cho một dải ô vuông $1 \times N$. Có hai người tham gia trò chơi như sau: Theo lần lượt thì người chơi thứ nhất đặt vào một ô trống một quân cờ màu đen, và người chơi thứ hai đặt vào một ô trống khác một quân cờ màu trắng. Không được phép đặt hai ở hai ô kề nhau hai quân cờ cùng màu. Người thua cuộc là người đầu tiên không thể đi được theo. Hỏi ai trong họ có một chiến lược thắng.

B. Frenkin

M2084*. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đẳng thức

$$\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1$$

A. Efimov

M2085.* Giữa những người tham dự một cuộc thi Toán học thì có một số làm bạn với nhau, sao cho nếu A làm bạn với B thì B cũng làm bạn với A . Gọi một nhóm các người tham dự là một "hội" nếu bất cứ 2 người thuộc nhóm này đều làm bạn với nhau. Gọi số lượng người trong một nhóm là "bậc" của nhóm đó. Biết rằng bậc lớn nhất của các hội là số chẵn. Chứng tỏ rằng tất cả người tham dự cuộc thi có thể sắp xếp vào phòng sao cho, bậc nhóm lớn nhất của phòng này bằng bậc nhóm lớn nhất của phòng kia.

V. Astakhov

ĐỀ RA KÌ NÀY - TẠP CHÍ KVANT SỐ 03-2008

Nhóm dịch thuật Kvant - <http://mathvn.org>

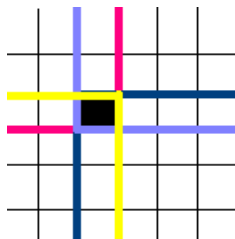
Tháng 10-2008

M2086. Cho hai cấp số cộng $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ và $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ từ các số tự nhiên. Biết rằng $a_1 = b_1$ và với mọi chỉ số n thì các số a_n, b_n đồng dư khi chia cho n . Chứng tỏ rằng hai dãy này trùng nhau.

N. Kalinin.

2087. M2087. Trên bàn cờ vua một quân "projector" có thể tiêu diệt (chiếu) được mọi ô nằm trong một trong 4 góc vuông (chỉ một trong 4) với đỉnh là một trong 4 đỉnh của ô nó đang đứng, các tia của góc nằm trên đường ngang và dọc chia bàn cờ (xem 4 góc tô màu trên hình, ô màu đen là vị trí đặt "projector", nó có thể quay về một trong 4 góc đó). Thí dụ "projector" nằm ở phía dưới bên trái cùng của bàn cờ thì có thể chiếu được 1 ô đặt nó hoặc cả bàn cờ, hoặc cột biên trái cùng, hoặc cột biên dưới cùng. Hỏi số các "projector" có thể đặt lớn nhất là bao nhiêu trên bàn cờ để hai quân "projector" không thể tiêu diệt lẫn nhau.

A. Shapovalov.



2088. Chứng minh rằng với các số dương x, y, z với tổng của chúng bằng 1 thì

$$\frac{x^2 + 3xy}{x + y} + \frac{y^2 + 3yz}{y + z} + \frac{z^2 + 3zx}{z + x} \leq 2$$

R. Pirkulyev.

2089. Giả sử B_0 là trung điểm của cạnh AC tam giác ABC . Gọi A_1, A_2 là tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp tiếp xúc cạnh AB của tam giác ABB_0 . Tương tự với tam giác CBB_0 là điểm C_1, C_2 . Chứng minh rằng tứ giác $A_1A_2C_2C_1$ nội tiếp.

L. Emeljanov.

2090. Giả sử $c_1, c_2, \dots, c_n$ là các số thực. $S_1 = c_1, S_2 = c_1 + c_2, \dots, S_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$. M, n là số lớn nhất và nhỏ nhất của $S_1, S_2, \dots, S_n$. Chứng minh các bất đẳng thức:

1. $m \leq c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \dots + \frac{1}{n}c_n \leq M$.
2. $nm \leq nc_1 + (n-1)c_2 + \dots + c_n \leq nM$.
3. Nếu $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n > 0$ thì

$$\alpha_1 m \leq \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \dots + \alpha_n c_n \leq \alpha_1 M$$

A. Egorov.

2091. Chứng minh rằng với bất kì số tự nhiên $n > 2$ và m tồn tại n số tự nhiên đôi một nguyên tố cùng nhau lớn hơn 10^{10} sao cho tổng lũy thừa bậc m của chúng chia hết cho tổng của chúng.

V. Senderov.

2092. Một projector trên bàn cờ vua là miền nằm góc chia bàn cờ đi qua lẻ ngang và lẻ dọc của bàn cờ và bao hàm

ĐỀ RA KÌ NÀY - TẠP CHÍ KVANT SỐ 04-2008

Nhóm dịch thuật Kvant - <http://mathvn.org>

Tháng 10-2008

M2096. Người ta tổ chức các ủy viên quốc hội thành 2008 ủy ban, mỗi ủy ban có không quá 10 người. Biết rằng 11 ủy ban bất kì thì có chung một thành viên. Chứng minh rằng tất cả các ủy ban này đều có chung một thành viên.

F. Petrov.

M2097. Tìm tất cả các số nguyên tố p dạng $a^2 + b^2 + c^2$ với a, b, c là các số tự nhiên sao cho $a^4 + b^4 + c^4$ chia hết cho p .

V. Senderov.

M2098. Hai người chơi trò chơi, đi lần lượt nhau theo các bước như sau: người thứ nhất vẽ lên mặt phẳng một đa giác không đè vào hình đã vẽ, người thứ hai sẽ tô hình đa giác đó một trong số 2008 màu đã cho và cứ thế tiếp tục liên tiếp các bước. Người chơi thứ hai muốn rằng bất kì giáp nhau một cạnh sẽ có các màu khác nhau. Hỏi người thứ nhất có thể bố trí cho anh ta được hay không?

Folklor.

M2099. Giả sử $a_0 > a_1 > \dots > a_s = 0$ là dãy các số tự nhiên sao cho a_0, a_1 nguyên tố cùng nhau và với $i \geq 1$ thì a_{i+1} là phần dư của a_{i-1} cho a_i với thương lấy nguyên là $t_i = \left[\frac{a_{i-1}}{a_i} \right]$. Đặt dãy số $b_0, b_1, \dots, b_n$ sao cho $b_{i+1} = b_{i-1} + t_i b_i$ và $b_0 = 0, b_1 = 1$. Chứng minh rằng $b_s = a_0$.

V. Bikovskij.

M2100. Trong một góc đỉnh O nội tiếp hai đường tròn ω_1 và ω_2 . Một tia gốc O cắt ω_1 tại A_1, B_1 , và ω_2 tại A_2, B_2 sao cho $OA_1 < OB_1 < OA_2 < OB_2$. Đường tròn γ_1 tiếp xúc trong với ω_1 và các tiếp tuyến của ω_2 đi qua A_1 . Đường tròn γ_2 tiếp xúc trong với ω_2 và các tiếp tuyến của ω_1 đi qua B_2 . Chứng minh hai đường tròn γ_1, γ_2 bằng nhau.

P. Kozhevnikov.

ĐỀ RA KÌ NÀY - TẠP CHÍ KVANT SỐ 05-2008

Nhóm dịch thuật Kvant - <http://mathvn.org>

Tháng 01-2009

M2101. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + ax + b$. Biết rằng đối với bất kì số thực x thì tồn tại số thực y sao cho $f(y) = f(x) + y$. Tìm giá trị lớn nhất của a .

D. Tereshin.

M2102. Các số được tô màu đỏ mà tô màu xanh được sắp đặt theo một vòng tròn, Mỗi số màu đỏ bằng tổng hai số kề với nó, và mỗi số màu xanh bằng một nửa tổng hai số kề với nó. Chứng minh rằng tổng của các số màu đỏ bằng 0.

Y. Bogdanov.

M2103. Cho bảng vuông kích thước $n \times n$, các cột của nó được đánh số từ 1 đến n . Người ta sắp đặt các số $1, 2, \dots, n$ vào các ô của mỗi cột sao cho trong cùng một dòng và trong cùng một cột bất kì các số đều khác nhau. Ô được gọi là tốt nếu số của nó lớn hơn số được đánh cho cột chứa nó. Với số tự nhiên n nào thì tồn tại cách sắp đặt sao cho trong tất cả các dòng đều cùng một số lượng các ô tốt.

K. Chuvilchin.

M2104. Nhà ảo thuật tiến hành đoán diện tích của hình đa giác lồi $A_1 A_2 \dots A_{2008}$ đằng sau một bức rèm. Trong mỗi lần đối đáp với một khán giả thì ảo thuật gia gọi tên 2 điểm trên đường chu vi của đa giác, người khán giả sẽ đánh dấu hai điểm này và kẻ một đường thẳng qua chúng, sau đó anh ta thông báo cho ảo thuật gia phần với diện tích nhỏ hơn sau sự chia đa giác đã cho bằng đường thẳng đã kẻ. Trong số các điểm mà ảo thuật gia có thể gọi tên thì chúng hoặc là các đỉnh hoặc là điểm nằm trên cạnh với tỉ lệ được nhà ảo thuật định ra. Chứng tỏ rằng sau 2006 lần vấn đáp nhà ảo thuật có thể đoán ra diện tích của đa giác này.

N. Agakhanov.

M2105. Đường tròn ω với tâm O nội tiếp trong góc BAC và tiếp xúc với các cạnh của nó tại các điểm B, C . Trong góc BAC lấy điểm Q . Trên đoạn AQ lấy điểm P sao cho $AQ \perp OP$. Đường thẳng OP cắt các đường tròn ω_1, ω_2 ngoại tiếp tam giác BPQ và CPQ lần thứ hai tại các điểm M và N . Chứng tỏ rằng $OM = ON$.

A. Akopian.

M2016. Với những số tự nhiên $n > 1$ nào thì tồn tại các số tự nhiên $b_1, b_2, \dots, b_n$ (không bắt buộc tất cả các số này đều khác nhau) sao cho với mọi số tự nhiên k thì số $(b_1 + k)(b_2 + k) \dots (b_n + k)$ là lũy thừa của một số tự nhiên. (Số mũ của lũy thừa có thể phụ thuộc theo k nhưng phải nhất thiết lớn hơn 1)

V. Proizvolov, V. Senderov.

M2107. Cho tam giác không cân ABC , điểm H, M là giao điểm của các đường cao và các đường trung tuyến. Qua các đỉnh A, B, C kẻ các đường thẳng vuông góc với các đường thẳng AM, BM, CM . Chứng tỏ giao điểm của các đường trung tuyến của tam giác được tạo thành bằng cách dựng các đường thẳng trên nằm trên đường thẳng MH .

L. Emelianov.

M2108. Cho P là một tập hợp hữu hạn các số nguyên tố. Chứng tỏ rằng tồn tại số tự nhiên x sao cho nó được biểu diễn dưới dạng $x = a^p + b^p$ (a, b là các số tự nhiên) với mọi $p \in P$ và không biểu diễn được ở dạng nào với mỗi $p \notin P$

V. Senderov.

M2109. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Giả sử điểm P và Q lần lượt là giao điểm của tia BA và CD , BC và AD và H là hình chiếu của D trên PQ . Chứng tỏ rằng tứ giác $ABCD$ là ngoại tiếp khi và chỉ khi các đường tròn nội tiếp tam giác ADP và CDQ nhìn điểm H dưới hai góc bằng nhau.

V. Shmarov.

M2110. Có $2n + 3$ các đấu thủ tham gia trong một giải đấu cờ vua giao hữu, Mỗi người đấu với mỗi người đúng 1 lần. Giải đấu được tổ chức theo kế hoạch để các trận tiến hành trận này sau trận khác sao cho mỗi đấu thủ sau các ván đã được đấu được nghỉ không ít hơn n trận. Chứng tỏ rằng một trong các đấu thủ mà đã chơi ở ván đầu tiên của giải, được sắp để được chơi ở ván đấu cuối cùng.

A. Gribalko.

ĐỀ RA KÌ NÀY - TẠP CHÍ KVANT SỐ 06-2008

Nhóm dịch thuật Kvant - <http://mathvn.org>

Tháng 04-2009

M2111. Một ô trong dải băng dạng kẻ ô vuông (vô hạn) được sơn màu. Một hòn bi lúc đầu nằm cách n ô so với ô được tô ban đầu (theo phương ngang, hoặc dọc). Gieo một quân xúc sắc, trường hợp được k điểm ($1 \leq k \leq 6$) thì hòn bi được dịch chuyển về phía ô được tô ban đầu đó k ô. Tiếp tục quá trình gieo xúc sắc và dịch chuyển như vậy cho đến khi hòn bi nằm tại vị trí ô được sơn (chiến thắng), hoặc vượt qua ô được sơn (thua cuộc). Với số tự nhiên n nào thì xác suất thắng là lớn nhất, tính xác suất này.

V. Lechko

M2112. H - là giao điểm các đường cao của tam giác nhọn ABC . Đường tròn tâm là trung điểm cạnh BC đi qua H , cắt đường thẳng BC tại A_1, A_2 . Đường tròn với tâm là trung điểm cạnh CA , đi qua điểm H cắt đường thẳng CA tại B_1, B_2 . Đường tròn với tâm là trung điểm cạnh AB đi qua H cắt đường thẳng AB tại C_1, C_2 . Chứng minh rằng $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ nằm trên một đường tròn.

A. Gavriljuk

M2113. Đa thức bậc n , $n > 1$ có các nghiệm phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_n$ và đạo hàm của nó có các nghiệm $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. Chứng minh rằng trung bình cộng các bình phương của $x_1, x_2, \dots, x_n$ lớn hơn trung bình cộng của $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$

M. Murashkin

M2114. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số tự nhiên, viết trong hệ thập phân thì bình phương của nó không tận cùng bằng số 0, và các chữ số khác 0 đều lẻ.

V. Senderov

M2115. $ABCD$ - là tứ giác lồi, $BA \neq BC$ và tồn tại đường tròn tiếp xúc với đoạn BA kéo dài về phía A, đoạn BC kéo dài về phía C, và đường thẳng AD, CD . Chứng minh rằng. Đường tròn này cắt đường tròn tiếp xúc ngoài chung của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và ADC

V. Shmarov