

ĐỀ KIỂM TRA THÁNG 12/2011

Ngày 1
24/12/2011

Thời gian làm bài: 180 phút.

1. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6 \geq (a + b + c)^2.$$

2. Tính $\lim_{x \rightarrow \infty} \{(2 + \sqrt{3})^n\}$.

3. Cho tam giác ABC có H là chân đường cao hạ từ A . Điểm P chạy trên đường tròn đi qua trung điểm ba cạnh của tam giác này, P không thuộc BC . Chứng minh rằng đường nối tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác PBH và PCH đi qua điểm cố định.

4. Sơn Tinh và Thủy Tinh chơi trò chơi trên một lưới ô vuông $m \times n$. Hai người luân phiên nhau, Sơn Tinh chơi trước, kẻ một đoạn thẳng nối hai điểm của lưới ô vuông sao cho bên trong của đoạn thẳng đó không chứa điểm nào của lưới cũng như (phần bên trong đoạn thẳng đó) không giao nhau với bất kì một đoạn thẳng đã được kẻ nào. Người cuối cùng không thể kẻ được là người thua cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật thắng?
-

ĐỀ KIỂM TRA THÁNG 12/2011

Ngày 2
25/12/2011

Thời gian làm bài: 180 phút.

5. Cho n là một số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng 2. Giả sử tồn tại k số nguyên dương $n_1, n_2, \dots, n_k$ sao cho $\sum_{i=1}^k 2^{n_i}$ chia hết cho $2^n - 1$. Chứng minh rằng $k \geq n$.

6. Dãy (a_n) cho bởi $a_0 = 1, a_1 = p, a_2 = p(p-1)$ và

$$a_{n+3} = pa_{n+2} - pa_{n+1} + a_n.$$

Giả thiết rằng

- $a_n > 0 \forall n \geq 0$;
- $a_m a_n > a_{m+1} a_{n-1} \forall m \geq n \geq 0$.

Chứng minh rằng $|p-1| > 2$.

7. Ở nước nọ có một số thành phố trong đó thành phố Bên Sông là Kinh Đô. Các thành phố được kết nối với nhau bởi một số con đường hoạt động theo cả hai chiều. Một hôm, nhà vua ra lệnh chọn n thành phố để cùng với thành phố Bên Sông lập thành Kinh Đô mở rộng sao cho hai điều kiện sau thỏa mãn

- Với hai thành phố bất kì trong Kinh Đô mở rộng, ta luôn tìm được một đường đi giữa chúng mà chỉ đi qua các thành phố của Kinh Đô mở rộng;
- Có đúng k thành phố bên ngoài Kinh đô mở rộng có đường đi trực tiếp đến ít nhất một thành phố của Kinh đô mở rộng.

Chứng minh rằng có không quá $\binom{n+k}{k}$ phương án để mở rộng Kinh đô theo các ước muốn của nhà vua.
