



VIETNAM
MATHEMATICS
FORUM



CLB Toán học

NOKIA
Connecting People

Đề số 5

Bài 1. Cho x, y, z là các số thực dương. Đặt $a = x^2(y-z)^4$, $b = y^2(z-x)^4$, $c = z^2(x-y)^4$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab+bc+ca)$.

Lời giải:

BĐT tương đương với

$$(a+b-c)^2 - 4ab \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a})(\sqrt{c} + \sqrt{a} - \sqrt{b}) \leq 0$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x \geq y \geq z$, ta có:

$$\sqrt{b} - \sqrt{c} - \sqrt{a} = y(z-x)^2 - z(x-y)^2 - x(y-z)^2 = (x-y)(y-z)(z+x) \geq 0$$

Suy ra $(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a})(\sqrt{c} + \sqrt{a} - \sqrt{b}) \leq 0$ (vì $\sqrt{b} = \max(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$)

Vậy BĐT đúng

Bài 2. Với mỗi số thực p , xét phương trình $4x^3 - 3x - p = 0$ (1). Ta xét hàm số $f(p)$ được định nghĩa như sau:

i) Nếu phương trình (1) có 3 nghiệm thực thì $f(p)$ bằng tích của nghiệm lớn nhất và nghiệm nhỏ nhất của (1).

ii) Nếu phương trình (1) có 1 nghiệm thực duy nhất thì $f(p)$ là bình phương của nghiệm thực này.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của $f(p)$ khi p chạy trên tập hợp các số thực.

Lời giải:

Nếu pt (1) có nghiệm duy nhất thì $f(p) \geq 0$

Nếu pt (1) có 3 nghiệm $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ thì theo Viète, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

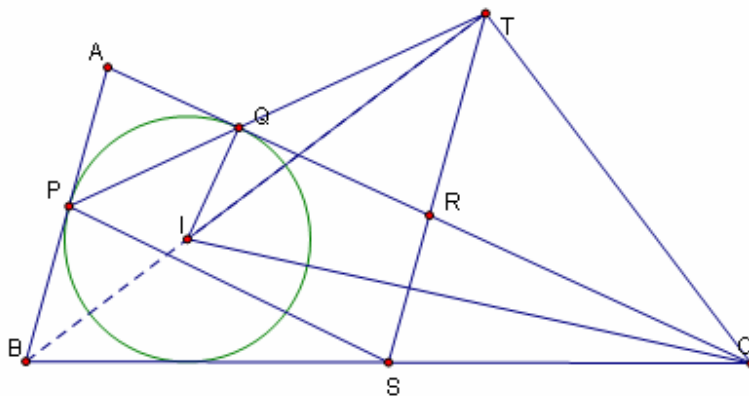
$$\rightarrow f(p) = x_1x_3 = x_2(x_1 + x_2 + x_3) + x_1x_3 = (x_2^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \geq -\frac{3}{4}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x_2 = 0 \rightarrow p = 0$ (Thử lại thấy đúng).

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(p)$ khi p chạy trên tập hợp các số thực là $-\frac{3}{4}$

Bài 3. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB và AC tại các điểm P và Q tương ứng. R và S tương ứng là trung điểm của các cạnh AC và BC . T là giao điểm của các đường thẳng PQ và RS . Chứng minh rằng T nằm trên phân giác góc B của tam giác.

Lời giải:



Gọi T' là giao điểm của RS và phân giác góc B của tam giác ABC , ta có $\angle BT'S = \angle ABI = \angle TBS$ nên tam giác SBT' cân tại S . Mặt khác, S là trung điểm BC nên tam giác BTS vuông tại T

Vì B, I, T thẳng hàng, $IQ \perp AC, IT' \perp TC$ nên $IQTC$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\angle T'QC = \angle T'IC = \angle IBC + \angle ICB = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2} = 90^\circ - \angle IAQ = \angle AQP$

Mà A, Q, C thẳng hàng nên suy ra P, Q, T thẳng hàng. Vậy $T \equiv T'$ hay T thuộc phân giác góc B

Bài 4. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $3^n - 2^n$ chia hết cho n .

Lời giải:

Đễ dàng nhận thấy $n=1$ thoả yêu cầu của bài toán

Với $n > 1$, xét p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n , ta có $3^n \equiv 2^n \pmod{p}$ nên $(3, p) = (2, p) = 1$
 $3^n \equiv 2^n \rightarrow (3 \cdot 2^{-1})^n \equiv 1 \rightarrow (3 \cdot 2^{-1})^{(n, p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$ (Vì $(2, p) = 1$ nên tồn tại $2^{-1} \pmod{p}$)

Vì p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n nên $(n, p-1) = 1$. Suy ra $3 \cdot 2^{-1} \equiv 1 \rightarrow 3 \equiv 2 \pmod{p}$
Suy ra $p=1$ (Vô lý)

Vậy $n=1$ là nghiệm duy nhất của bài toán.

Bài 5. Với những giá trị nào của k thì tập hợp

$$S = \{2010, 2011, \dots, 2010 + k\}$$

có thể chia thành hai tập con không giao nhau A và B sao cho tổng các phần tử của A bằng tổng các phần tử của B ?

Lời giải:

Xét hàm số $f(A)$ có giá trị bằng tổng các phần tử trong tập A

Giả sử A, B là 2 tập rời nhau được chia ra từ S và $f(A) = f(B)$ thì $f(S) = 2f(A)$ chẵn

Suy ra $\frac{(k+1)(4020+k)}{2}$ chẵn hay $(k+1)(k+4020)$ chia hết cho 4. Suy ra $k \equiv 3$ hay $k \equiv 0 \pmod{4}$

Ta CMR nếu với k ta có thể chia S theo yêu cầu đề bài thì với $k+4$ ta cũng làm được điều đó.
Thật vậy, xét

$$S = \{2010, 2011, \dots, 2010 + k\} \text{ và}$$

$$S' = \{2010, 2011, \dots, 2014 + k\} = S \cup \{2011 + k, 2012 + k, 2013 + k, 2014 + k\}$$

Nếu S chia được làm 2 tập A, B rời nhau mà $f(A) = f(B)$, ta xét

$$A' = A \cup \{2011 + k, 2014 + k\}$$

$$B' = B \cup \{2012 + k, 2013 + k\}$$

Thì $A' \cup B' = S'$; $A' \cap B' = \emptyset$ và $f(A') = f(B') = f(A) + 2025 + 2k$ nên với $k+4$ ta cũng chia được theo yêu cầu

Mặt khác, với $k \equiv 3$ thì $S = \{2010, 2011, 2012, 2013\} = \{2010, 2013\} \cup \{2011, 2012\}$ nên mọi $k \equiv 3 \pmod{4}$ đều thoả

Giả sử tồn tại $k \equiv 0 \pmod{4}$ thoả mãn yêu cầu đề bài thì vì $|S|$ lẻ nên nếu chia được S thành 2 tập A, B rời nhau thì không mất tính tổng quát, giả sử $|A| < |B|$.

Đặt $|A| = x$ thì $|B| = k+1-x \geq x+1 \rightarrow k \geq 2x$

Ta có: $f(A) \leq (2010+k) + (2009+k) + \dots + (2010+k+1-x) = \frac{(4021+2k-x)x}{2}$

Và: $f(B) \geq 2010 + 2011 + \dots + (2010+k-x) = \frac{(4020+k-x)(k+1-x)}{2}$

Vì $f(A) = f(B)$ nên ta có BĐT: $\frac{(4021+2k-x)x}{2} \geq \frac{(4020+k-x)(k+1-x)}{2}$

Tương đương với $k^2 + 2x^2 - 8042x - 4kx + 4021k + 4020 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (k-2x)^2 + 4021k + 4020 \leq 2x^2 + 8042x$$

$$\rightarrow 4021k + 4020 \leq \frac{k^2}{2} + 4021k$$

$$\rightarrow k \geq \sqrt{8040} \rightarrow k \geq 92 \text{ (vì } k : 4)$$

Khi $k = 92$, ta xét

$$S = \{2010, 2011, \dots, 2102\}$$

$$A = \{2102, 2101, \dots, 2057\} \cup \{2083\} \setminus \{2030\}$$

$$B = \{2010, 2011, \dots, 2056\} \cup \{2030\} \setminus \{2083\}$$

$$\text{Thì } A \cup B = S; A \cap B = \emptyset, f(A) = f(B) = 95604$$

Vậy tất cả các số k thoả đề bài là : $(k \equiv 3) \text{ hay } (k \equiv 0 \text{ và } k \geq 92) \pmod{4}$