



CLB Toán học

NOKIA
Connecting People

Đề số 7

Bài 1. Gọi d là hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất giữa n số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 2$). Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức

$$nd \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \leq \frac{n^2 d}{4}$$

Bài 2. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xy) = [f(x)]^y [f(y)]^x$$

với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}^+$. Ở đây $\mathbb{R}^+$ ký hiệu tập hợp tất cả các số thực dương.

Bài 3. Trên đường chéo AC của tứ giác nội tiếp ABCD lấy điểm L sao cho $AB = AL$. Trên tia DC lấy điểm F sao cho $DB = DF$. Điểm E đối xứng với B qua AD. Chứng minh rằng các điểm F, L và E nằm trên một đường thẳng.

Bài 4. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình

$$2x(xy - 2y - 3) = (x + y)(3x + y).$$

Bài 5. Cho bàn cờ 7×7 ô. An có 1 quân unomino gồm 1 ô vuông, còn Bình có 1 quân trimino hình chữ L và 15 quân trimino hình chữ I.

- Chứng minh rằng An có thể đặt quân unomino của mình vào một ô nào đó của bàn cờ để Bình không thể phủ phần còn lại bằng các quân trimino của mình.
- Bây giờ giả sử Bình có 2 quân trimino hình chữ L và 14 quân trimino hình chữ I. Chứng minh rằng cho dù An đặt quân unomino vào ô nào bất kỳ, Bình đều có thể phủ phần còn lại bằng các quân trimino của mình.