

Bài 1.

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + m}{x^2 + 1}$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại hai điểm đó vuông góc với nhau.

Bài 2.

- 1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{2x} + \sqrt{2y} = 4 \\ \sqrt{2x+5} + \sqrt{2y+2} = 6 \end{cases}$$
- 2) Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = \tan^2 x + 16 \cos x$ trên $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}]$.

Bài 3.

- 1) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, các mặt bên có góc ở đỉnh S có số đo là α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). Chứng minh điều kiện cần và đủ để tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp cách đều các mặt phẳng lần lượt chứa các mặt của hình chóp là $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
- 2) Cho H là trực tâm của tam giác ABC không cân và góc A nhọn, hình chiếu của H trên AB, AC theo thứ tự là E, F . Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng BC ; P, Q là giao điểm của các đường tròn đường kính AD , đường kính BC . Chứng minh H, P, Q thẳng hàng và các đường thẳng BC, EF, PQ đồng qui.

Bài 4.

Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x+1) = f(x) + 2$ và $f^2(x) = 2f(x^2); \forall x \in \mathbb{R}$

Chứng minh:

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}; \forall m \in \mathbb{Z}: f(x+m) = f(x) + 2m$.
- 2) $\forall q \in \mathbb{Q}: f(q) = 2q$

Bài 5.

Gọi T là phép biến đổi trên dãy số như sau: chọn 19 số hạng của dãy số và mỗi số hạng này được cộng thêm 1, các số hạng còn lại của dãy số giữ nguyên.

Cho dãy số gồm 2010 số nguyên $a_1; a_2; \dots; a_{2010}$

Chứng minh rằng: Từ dãy số đã cho, sau một số hữu hạn phép biến đổi T , ta có thể được dãy gồm 2010 số bằng nhau.