ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH NGHỆ AN
MÔN TOÁN BẢNG B

Câu 1:

a)Tìm giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$(m-3)x + (2-m)\sqrt{x} + (3-m) = 0$$

b) Chứng minh rằng :

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x \qquad \text{với } x \in (0;\frac{\pi}{2})$$

Câu 2:

a) Tìm GTNN và GTLN của

$$A = x + \sqrt{1-x^2} \qquad \text{với } x \in (0;\frac{\pi}{2})$$

b, giải hệ phương trình

$$\begin{cases} e^{x-y} = \dfrac{\sin x}{\sin y} \\ \sin 2x - \cos 2y = \sin x + \cos y - 1 \\ x, y \in (0;\dfrac{\pi}{4}) \end{cases}$$

Câu 3:Giải phương trình nghiệm nguyên

$$\cos[\frac{\pi}{8}(3x+\sqrt{9x^2+160x+800})] = 1$$

Câu 4:

a)Trong hệ trục 0xy cho tam giác ABC có diện tích là $\frac{3}{2}$. Điểm A(3; –2) ; B(2; –3) và trọng tâm G thuộc đường thẳng 3x – y – 8 = 0. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC

b) Cho đường tròn (C) có phương trình : $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 4 = 0$. Điểm M thuộc đường thẳng (d) x – y + 3 = 0. từ M kẻ 2 tiếp tuyến tới C tại hai tiếp điểm là A và B .Chứng minh rằng đường thẳng AB đi qua 1 điểm cố định khi M di chuyển trên (d)

NGHỆ AN
CHỌN TUYỂN QUỐC GIA VÒNG 1

Bài 1:giải hệ: $\begin{cases} |y| = |x-3| \\ (2\sqrt{z} - 2 + y)y = 1 + 4y \\ x^2 + z - 4x = 0 \end{cases}$

Bài 2:cho số nguyên a,chứng minh rằng phương trình: $x^4 - 7x^3 + (a+2)x^2 - 11x + a = 0$ không thể có nhiều hơn 1nghiệm nguyên.

Bài 3:cho dãy số thực x_n xác địn bởi: $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 2 + \sqrt{x_n} - 2\sqrt{1+\sqrt{x_n}}, \forall n \in N. \end{cases}$

Ta xác định dãy y_n bởi công thức $y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i 2^i, \forall n \in N^*$,tìm công thức tổng quát của dãy y_n.

Bài 4:cho các số nguyên dương a,b,c khác 0 thỏa mãn:

$$\begin{cases} \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \in z \\ \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \in z \end{cases}$$

Chứng minh: $\frac{3a^4}{b^2}+\frac{2b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2}-4|a|-3|b|-2|c| \geq 0$

Bài 5:Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho 9 điểm có tọa độ là các số nguyên,trong đó không có 3 điểm nào thẳng hang.Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1 tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 9 điểm trên có diện tích là 1 số chẵn.

Bài 6:Cho 2 đường tròn (O) và (O') tiếp xúc trong tại điểm K,(O') nằm trong (O).Điểm A Nằm trên (O) sao cho 3 điểm A,O,O' không thẳng hang.Các tiếp tuyến AD và AE của (O') cắt (O) lần lượt tại B và C(D,E là các tiếp điểm).Đường thẳng AO' cắt (O) tại F.Chứng minh rằng các đường thẳng BC,DE,FK đồng quy.

Bài 7:cho $n \geq 2, n \in N$.Kí hiệu $A = \{1, 2, ..., n\}$,tập con B của A được gọi là 1 tập tốt nếu B khác rỗng và trung bình cộng của các phần tử của B là 1 số nguyên,Gọi T_n là số các tập tốt của A.Chứng minh rằng $T_n - n$ là 1 số chẵn.

NGHỆ AN

CHỌN TUYỂN QUỐC GIA VÒNG 2

Bài 1:giải phương trình: $16x^3 - 24x^2 + 12x - 3 = \sqrt[3]{x}$

Bài 2:Tìm tất cả các số nguyên a,b,c thỏa mãn điều kiện 1<a<b<c và abc chia hết cho (a-1)(b-1)(c-1).

Bài 3:cho a,b,c,x,y,z là các số thực thay đổi thỏa mãn: $(x+y)c-(a+b)z = \sqrt{6}$

Tìm GTNN của:

$F = a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2+\text{ax+by+cz}$

Bài 4:Tìm tát các các hàm $f: R \to R$ sao cho:

$f(x+\cos(2009y))=f(x)+2009\cos(f(y)), \forall x,y \in R$

Bài 5: cho tam giác ABC thay đổi,gọi H là trực tâm ,O là tâm đường tròn ngoại tiếp và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.Xác định GTNN của số K sao cho $\frac{OH}{R} < K$

Bài 6:Cho ABCD là tứ giác nội tiếp.M và N là các điểm lần lượt thay đổi trên các cạnh AB và CD sao cho $\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{ND}$.Điểm P thay đổi trên đoạn thẳng MN sao cho $\frac{PM}{PN} = \frac{AB}{CD}$.Chứng minh rằng tỉ số diện tích của 2 tam giác PAD và PBC không phụ thuộc vào vị trí của M và N.

Bài 7:Gọi S là tập hợp các số nguyên dương đồng thời thỏa mãn 2 điều kiện sau:

1.Tồn tại 2 phần tử x,y thuọc S sao cho (x,y)=1.

2.Với bất kì a,b thuộc S thì tổng của a và b cũng thuộc S.

Gọi T là tập hợp tát cả các số nguyên duơng khong thuộc S.Chứng minh rằng số phần tử của T là hửu hạn và không nhỏ hơn $\sqrt{S(T)}$, trong đó $S(T)$ là tổng các phàn tử của tập T(nếu $T = \phi$ thì $S(T)$=0).

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NGHỆ AN

KỲ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH KHỐI 12 THPT 2004-2005

Bài 1: a) Tìm giá trị m để phương trình sau có nghiệm: $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1} = m$

b) Giải phương trình: $2003^x + 2005^x = 4006x + 2$

Bài 2: a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $f(x)=\dfrac{1+\cos 8x}{6+2\cos 4x}$

b) Tìm m để tồn tại cặp số (x,y) không đồng thời bằng o và thỏa mãn phương trình:

$$(4m-3)|x|+(3m-4)|y|+(m-1)\sqrt{x^2+y^2}=0$$

Bài 3:Tìm tất cảc các đa thức p(x) thỏa mãn: $P(x)+P(1)=\dfrac{1}{2}[P(x+1)+P(x-1)],\forall x$

Bài 4: a) cho a,b,c,d là 4 số thực thỏa mãn điều kiện: $a^2+b^2=1, c+d=3$,chứng minh rằng;

$$ac+bd+cd\le\frac{9+6\sqrt{2}}{4}$$

b) Trong mặt phẳng Oxy cho họ đường tròn (Cm):

$x^2+y^2-2(m-1)x-(m+6)+m+10\,, m\ne 0$

Chứng minh rằng: các đường tròn (Cm) luôn luôn tiếp xúc với nhau tai một điểm cố định khi m thay đổi.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NGHỆ AN

KỲ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH KHỐI 12 THPT 1997-1998

Bài 1: cho phương trình: $x^2+x+12\sqrt{x+1}-36=0$

a) Chứng minh rằng phương trình có nghiệm số trên (0,10)
b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình trên.

Bài 2: a) Xác định số đo của góc A trong tam giác ABC,biết rằng tổng các nghich đảo số đo của 2 cạnh AB,AC bằng nghịch đảo số đo đường phân giác của góc xen giữa 2 cạnh ấy.

b) Giải phương trình: SinxSin2xSin3x+CosxCos2xCos3x=1

Bài 3:Với giá trị nào của m thì số nghiệm của phương trình:

$15x^2-2(6m^2+1)x-3m^4+2m^2=0$ không nhiều hơn số nghiệm của phương trình: $(3m-1)^2.12^x+2x^3+6x=(3^{6m}-9)\sqrt{2^{8m}-0,25}$

Bài 4: a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $y=\dfrac{x^2-(k-1)x+k^2}{x}$,khi $0<x\le\sqrt{k^2-k+1}$,k là tham số dương.

b) Trong hệ trục tọa độ cho điểm M(2,4).Xét các tam giác có một cạnh vuông góc với Oy và hai đỉnh nằm trên parabol $y=3x^2$; $x\in[-1,1]$ nhận M là trung điểm của một trong 2 cạnh cọn lại.Xác định tam giác có diện tích lớn nhất.Tính diện tích ấy.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NGHỆ AN

KỲ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH KHỐI 12 THPT 1999-2000

Bài 1: a) Giải hệ phươmng trình: $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \end{cases}$

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên a phương trình:

$x^4-2001x^3+(2000+a)x^2-1999x+a=0$ không thể có 2 nghiệm nguyên.

Bài 2: a) Cho $xy+yz+zx=-1$,chứng minh rằng: $x^2+2y^2+2z^2\ge\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$

b) Cho x và y là hai số dương thay đổi có tổng bằng 1,m là một số dương cho trước.Tìm giá trị bé nhất của tổng: $S=\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{m}{xy}$

Bài 3:cho dãy số $\{U_n\}$ xác định như sau: $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2+U_n}{1-2U_n}, \forall n \ge 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy số $\{U_n\}$ không tuần hoàn.

Bài 4: Cho tứ diện SABC ,trên các cạnh SA,SB,SC lần lượt lấy các điểm D,E,F.Biết rằng các mặt phẳng (ABF),(BCD),(ACE) cắt nhau tai M và đường thẳng SM cắt mặt phẳng (DÈ) tại N,cắt mặt phẳng (ABC) tại P.Chứng minh: $\dfrac{NP}{NS} = 3\dfrac{MP}{MS}$

Bài 5: Cho hình hộp $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau và bằng AC_1.Các góc phẳng ở đỉnh của góc tam diện đỉnh A tạo bởi 3 mặt của hình hộp đều bằng nhau.

a) Tính số đo các góc phẳng ở đỉnh của góc tam diện đỉnh A nói trên.
b) Một mặt phẳng cắt các cạnh AB,AD,AA_1 tương ứng tại M.N.P và cắt AC_1 tại Q.Chứng minh: $\dfrac{1}{AQ} = \dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AN} + \dfrac{1}{AP}$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NGHỆ AN

KỲ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH KHỐI 12 THPT 2000-2001

Bài 1: a) Cho a,b,c,m là những số thực $(a \ne 0, m > 0)$ thỏa mãn điều kiện: $\dfrac{a}{m+2} + \dfrac{b}{m+1} + \dfrac{c}{m} = 0$

Chứng minh rằng: $b^2 - 4ac \ge 0$

b) Hãy xác định tất cả các hàm liên tục $f : R \to R$ thỏa mãn đẳng thức : $f(x^2) + f(x) = x^2 + x$

Bài 2: a) Cho n,m là những số tự nhiên không nhỏ hơn 2,hãy tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $\sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x + ... + \sqrt[n]{x}}} = y$

b) Hãy xác định m để phương trình: $\sin^4 x + (1+\sin x)^4 = m$ có nghiệm.

Bài 3:Trong mặt phẳng cho 2001 điểm và trong 3 điểm bất kỳ đả cho bao giờ cũng tìm được 2 điểm có khoảng cách giũa chúng nhỏ hơn 4.Chứng minh rằng tồn tại một hònh tròn có bán kính bằng 4 chứa không ít hơn 1001 điểm.

Bài 4: a) Cho họ đường cong (Cm) có phương trình:

$m(x^2 + y^2) - 2(2m+1)x + 2y + m + 1 = 0$,m là tham số.

Chứng tỏ rằng (Cm) là đường tròn với mọi m khác không.Tìm tập hợp tâm các đường tròn đó.

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm (3,1).Tìm phương trình đường thẳng đi qua M và cắt hai nửa trục Ox,Oy tương ứng tại A và B sao cho tổng (OA + OB) có giá trị bé nhất.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NGHỆ AN

KỲ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH KHỐI 12 THPT 2001-2002

Bài 1: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + (\sin\alpha)x + |\sin\alpha| - 1}{x+1}$

a) Tìm α để hàm số có cực đại – cực tiểu và $y_{cđ} + y_{ct} = -6$.
b) Tìm α để $y_{cđ}.y_{ct} > 0$

Bài 2: a) chứng minh rằng $\forall x : -1 \le x \le 1$ ta có: $\sqrt[4]{2} \le \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} \le 2$

c) Tìm các giá trị của k để phương trình sau có nghiệm: $\sin^4 x + cos^4 x = k^2 cos^2 4x$

Bài 3: a) Cho dãy $\{a_n\}$ xác định như sau: $\begin{cases} a_0 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2} \\ a_{n+1} = a_n(4a_n^2 - 10a_n + 5)^2, \forall n \geq 0 \end{cases}$

Tìm số hạng tổng quát a_n

b) Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác.Xét các số x,y,z thỏa mãn $x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P(x,y,z) = \dfrac{\sin x}{a} + \dfrac{\sin y}{b} + \dfrac{\sin z}{c}$

Bài 4: a) Một mặt phẳng Oxy cho điểm A (-4,0),B(4,0).Điểm M di động trong mặt phẳng sao cho tam giác MAB có tích của tang hai góc $\angle MAB, MBA$ bằng $\dfrac{1}{4}$.Chứng minh rằng M luôn chạy trên 1 elip (E) cố định.

b) Cho tam giác ABC.m là một điểm di động trên cạnh CB.hạ MN,MQ tương ứng vuông góc và song song với AB($N \in AB, Q \in AC$) .Gọi P là hình chiếu của Q trên AB và I là tâm hình chữ nhật MNPQ.Tìm quỹ tích của I khi M chạy trên CB.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NGHỆ AN — KỲ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH KHỐI 12 THPT 2002-2003

Bài 1: a) Cho $x \leq t$,chứng minh rằng $x^3 - 3x \leq t^3 - 3t + 4$,đẳng thức xảy ra khi nào?

b) Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 2y^3 - 4z^3 = 0$ không có nghiệm nguyên $x, y, z \neq 0$.

Bài 2: a) Tìm các điểm trong $[0,\pi]$,tại đó hàm số $f(x) = \sin x + \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{\sin 3x}{3}$ đạt giá trị cực đại-cực tiểu.

b) Chứng minh rằng hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 = y^3 + y^2 + y + k \\ y^2 = z^3 + z^2 + z + k \\ z^2 = x^3 + x^2 + x + k \end{cases}$ có một nghiệm duy nhất.

Bài 3: Tren mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy cho họ đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2\alpha x = 0$ và họ đường thẳng (D): ax+ay-aα=0 (a là tham số, α là hằng số dương).

a) Chứng minh rằng đường thẳng (D) luôn đi qua tâm của đường tròn (C) và luôn đi qua điểm cố định.
b) Tìm quỹ tích giao điểm của (D) và (C).

Bài 4:xác định giá trị của m để 2 hệ sau tương đương: $\begin{cases} \cos(x-y)=1 \\ \dfrac{m+xy}{x^3-y^3} = \dfrac{1}{x-y} \end{cases}$, $\begin{cases} |x-y| = 2\pi \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NGHỆ AN — KỲ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH KHỐI 12 THPT 2003-2004

Bài 1: a) Tìm hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$,biết $\begin{cases} xf(x-1) = (x-3)f(x), \forall x \in R \\ f(3) = 6 \end{cases}$

b) Xác định a,b để hàm số: $f(x) = \begin{cases} (x+a)e^{-bx}, x < 0 \\ ax^2 + bx + 1, x \geq 0 \end{cases}$ có đạo hàm tại x = 0.

Bài 2: a) Cho dãy số u_n có $u_n = -n^4 + 8n^3 - 0,5n^2 + 4n, n \in N^*$,tìm số hạng lớn nhất của dãy số đả cho.

b)Cho các số thực a,b,c và số nguyên dương n thỏa mãn: $5c(n+2) + 6(a+b) = 0$

Chứng minh phương trình: $a\sin^n x + b\cos^n x + c\sin x + c = 0$ luôn có nghiệm trong khoảng $(0,\dfrac{\pi}{2})$.

Bài 3: a) Nhận dạng tam giác ABC biết rằng:

$$\frac{1}{1+\cos^3 A\cos B}+\frac{1}{1+\cos^3 B\cos C}+\frac{1}{1+\cos^3 C\cos A}=\frac{1}{1+\cos^4 A}+\frac{1}{1+\cos^4 B}+\frac{1}{1+\cos^4 C}$$

b) Có 120 quả cầu như nhau xếp sát nhau vừa đầy một hình chop tam giác đều có tát cả các cạnh bằng nhau(mỗi quả cầu ở lớp trên tiếp xúc đúng với 3 quả cầu lớp dưới).Hỏi có bao nhiêu quả xếp ở đáy hình chóp.

Bài 4: Trong hệ tọa độ trực chuẩn Oxy.

a) Cho 3 điểm A(1;3),B(7;0),C(2;5).Tìm phương trình đường tròn có bán kính nhỏ nhất chứa bên trong hoặc trên nó cả ba điểm đả cho.

b) Cho elip có phương trình: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>b>0$

Hai điểm M,N di động trên elip sao cho góc MON bằng 90^0.Chứng minh MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định và tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của diện tích tam giác MON.

ĐỀ THI SINH VIÊN GIỎI ĐHXD HÀ NỘI

GIẢI TÍCH

Bài 1: Cho dãy số thực $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$,biết $\begin{cases} u_1>2, n\ge 2 \\ u_{n+1}=\dfrac{6(u_n+1)}{u_n+7}\end{cases}$,tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

Bài 2:Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[2;+\infty)$,khả vi trên khoảng $(2;+\infty)$ và thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} f(2)=1 \\ |f(x)|\le \dfrac{2}{x}, \forall x\ge 2\end{cases}$ .Chứng minh rằng tồn tại $x_0>2$ sao cho $f'(x_0)=-\dfrac{2}{x_0^2}$

Bài 3:Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên R.Gỉa thiết rằng tồn tại các số thực $a<b<c<d, b-a=d-c$ sao cho $\int_a^b f(x)dx=\int_c^d f(x)dx$ .Chứng minh rằng tồn tại $x_0\in R$ để $f'(x_0)=0$

Bài 4:Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn [a,b],a<b,f(a)=0 .Chứng minh rằng:

$$(max|\mathrm{f(x)}|)^2\le (b-a)\int_a^b f'^2(x)dx, x\in[a,b]$$

Bài 5:Cho chuỗi số dương hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,chứng tỏ rằng dãy số $\{a_n\}$ đơn điệu giảm thì $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$

ĐẠI SỐ

Bài 1:Giải phương trình trên trường số phức: $(z+1)^9-1=0$ .Chứng minh rằng:

$$\sin\frac{\pi}{9}.\sin\frac{2\pi}{9}...\sin\frac{8\pi}{9}=\frac{9}{128}$$

Bài 2:A,B $\in \mathrm{w}_n(R)$ là hai ma trận vuông cấp n thỏa mãn $AB-BA=2B$ .ChỨNG minh rằng det B = 0

Bài 3: A,B $\in \mathrm{w}_n(R)$ là hai ma trận đối xứng cấp n.Chứng minh rằng nếu mọi trị rieng của A và mọi trị riêng của B đều dương thì các giá trị riêng của A + B cũng dương.

Bài 4:Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}2 & 6\\ a & b\end{pmatrix}$.Tìm a,b biết u = (3,1) và v = (2,1) là hai véc tơ riêng của A.

Bài 5: Cho A,B là 2 ma trận vuông cấp n,biết A + B = I và $r(A)+r(B)\le n$ .Chứng minh $\begin{cases}A^2=A\\ B^2=B\end{cases}$

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN TOÀN QUỐC NĂM 2008

ĐỀ THI:MÔN GIẢI TÍCH

Bài 1: cho dãy số $\{a_n\}$ được xác định như sau: $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ a_{n+2} = \dfrac{1}{a_{n+1}} + a_n, n = 1,2,... \end{cases}$.Tính a_{2008}

Bài 2:Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^{2008} + 2^{2008} + ... + n^{2008}}{n^{2009}}$

Bài 3:Gỉa sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0,\pi]$, $f(0) = f(\pi) = 0$ và thỏa mãn điều kiện $|f'(x)| < 1, \forall x \in (0,\pi)$

Chứng minh rằng:

i) $\exists c \in (0,\pi)$ sao cho $f'(c) = \tan f(c)$

ii) $|f(x)| < \dfrac{\pi}{2}, \forall x \in (0,\pi)$.

Bài 4:Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ và thỏa mãn điều kiện: $xf(y) + yf(x) \le 1, \forall x,y \in [0,1]$

Chứng minh rằng: $\int\limits_0^1 f(x)dx \le \dfrac{\pi}{4}$

Bài 5:Gỉa sử $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[0,1]$ với $f(0) = 0, f(1) = 1$ và khả vi trong $(0,1)$.Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in (0,1)$ luôn tồn tại $x_1, x_2 \in (0,1)$ sao cho: $\dfrac{\alpha}{f'(x_1)} + \dfrac{1-\alpha}{f'(x_2)} = 1$

Bài 6:Cho hàm số $g(x)$ có $g''(x) > 0, \forall x \in R$ .Gỉa sử hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên R và thỏa mãn các điều kiện: $\begin{cases} f(0) > g(0) \\ \int\limits_0^{\pi} f(x)dx < \pi.g(0) + \dfrac{\pi^2 g'(0)}{2} \end{cases}$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in [0,\pi]$ sao cho $f(c) = g(c)$.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN TOÀN QUỐC NĂM 2008

ĐỀ THI:MÔN GIẢI TÍCH

Bài 1:Gỉa sử dãy số $\{x_n\}$ được xác định theo công thức: $\begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \\ x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2}), n = 3,4... \end{cases}$,Tính x_{2009} ?

Bài 2:Cho hàm số $f:[0,1] \to R$ có đạo hàm cấp hai liên tục và $f''(x) > 0$ trên $[0,1]$.Chứng minh rằng: $2\int\limits_0^1 f(t)dt \ge 3\int\limits_0^1 f(t^2)dt - f(0)$.

Bài 3:Tìm tất cả các hàm số: $f: R \to R$ thỏa mãn các điều kiện: $\begin{cases} f(x) \le 4 + 2009x, \forall x \in R \\ f(x+y) \le f(x) + f(y) - 4, \forall x, y \in R. \end{cases}$

Bài 4:Gỉa sử $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên R và thỏa mãn điều kiện: $f(g(x)) \equiv g(f(x)), \forall x \in R.$
Chứng minh rằng nếu phương trình $f(x) = g(x)$ không có nghiệm thực thì phương trình $f(f(x)) = g(g(x))$ cũng không có nghiệm thực.

Bài 5:Cho hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ xác định theo công thức: $\begin{cases} x_1 = y_1 = \sqrt{3} \\ x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}, n = 2,3,... \\ y_{n+1} = \dfrac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}, n = 2,3,... \end{cases}$

Chứng minh rằng: $x_n.y_n \in (2,3), n = 2,3,...$ và $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$

Bài 6:Thí sinh làm một trong hai câu sau:

a) Cho $P(x)$ là đa thức bậc n với hệ số thực.Chứng minh rằng phương trình $2^x = P(x)$ có không quá n + 1 nghiệm thực.

b) Cho $f(x) - x$ và $f(x) - x^3$ là những hàm số đơn điệu tăng trên R.Chứng minh rằng hàm số $f(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ cũng là hàm đơn điệu tăng trên R.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN TOÀN QUỐC NĂM 2008

ĐỀ THI:ĐẠI SỐ

Bài 1:Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn đẳng thức sau: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 0 \end{cases}$

Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn có $x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = 0$

Bài 2:Tồn tại hay không một ma trận thực A vuông cấp 2 sao cho: $A^{2010} = \begin{pmatrix} -2008 & 2010 \\ 0 & -2009 \end{pmatrix}$

Bài 3:Cho A,B,C là các ma trận vuông cấp n sao cho C giao hoán với A và B, $C^2 = E$ (E là ma trận đơn vị) và $AB = 2(A+B)C$

a) Chứng minh rằng AB = BA

b) Nếu có thêm điều kiện $A + B + C = 0$,hãy chứng tỏ $rank(A - C) + rank(B - C) = n$

Bài 4:Tính A^{2009},trong đó: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Bài 5:Tìm tất cả các ma trận vuông A cấp n $(n \geq 2)$ sao cho với mọi ma trận vuông B cấp n,ta đều có $\det(A+B) = \det A + \det B$.

BÀI 6:Thí sinh chọn một trong hai câu sau:

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 1 \end{cases}$

b) Ưng với mỗi đa thức P(x) với hệ số thực và có nhiều hơn một nghiệm thực,gọi d(P) là khoảng cách nhỏ nhất giữa hai nghiệm thực bất kỳ của nó.Gỉa sử các đa thức với hệ số thực P(x) và P(x) + P’(x) đều có bậc k(k>1) và có k nghiệm thực phân biệt.Chứng minh rằng d(P + P’) $\geq d(P)$.

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN TOÀN QUỐC

ĐHXD HÀ NỘI

MÔN:GIẢI TÍCH

Bài 1: Tìm số α sao cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \dfrac{\alpha}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\alpha + u_n^2), \forall n \in N^* \end{cases}$ hội tụ.

Khi đó tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

Bài 2:Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a,b]$,khả vi trên khoảng (a,b) và $f(a) = f(b) = 0$.Chứng minh rằng phương trình: $g'(x)f(x) + f'(x) = 0$ có nghiệm trên $[a,b]$.

Bài 3:Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn điều kiện $f(0) = f(1)$.Chứng minh rằng tồn tại $c \in [0,1]$ sao cho $f(c) = f(c+\frac{1}{4})$.

Bài 4: với mỗi $n \in N^*$ đặt $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$

Chứng minh rằng $\{I_n\}$ là một dãy giảm.Hãy tìm mối liên hệ giữa I_{n+1} và I_n.Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

Bài 5:Tìm tát cả các hàm liên tục $f: R \to R$ thỏa mãn các điều kiện: $\begin{cases} f(1) = -1 \\ \forall x, y \in R: f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy \end{cases}$

MÔN:ĐẠI SỐ

Bài 1:Cho A là một ma trận cấp 2 xác định bởi: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,tính A^{2008}

Bài 2:Cho A là một ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^3 = I_n$,trong đó I_n là ma trận đơn vị cấp n.
Chứng minh rằng: $Rank(A - I_n) + Rank(A^2 + A + I_n) = n$

Bài 3: Cho A,B là hai ma trận vuông cấp n sao cho AB = BA,giả thiết thêm rằng $\begin{cases} (A - I_n)^{2008} = 0 \\ (B - I_n)^{2009} = 0 \end{cases}$

a) Tìm tất cả các giá trị riêng của A và B.
b) Chứng minh rằng AB,A + B là các ma trận khả nghịch.

Bài 4: Cho V và W là hai không gian véc tơ hữu hạn chiều trên trường số thực R.Gỉa sử U là một không gian con của W, $f: V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính.Đặt $S = f^{-1}(U)$.Chứng minh rằng: $\dim S + \dim W \geq \dim V + \dim U$

Bài 5:Cho A là một ma trận đối xứng xác định dương cỡ 2008.Gỉa sử y = (1,2,…,2008)$\in R^{2008}$.
tính $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{yA^{m+1}y^T}{yA^m y^T}$,trong đó y^T chỉ ma trận vec tơ cột của Y.

Bài 6: Cho M_n là một không gian các ma trận vuông cấp n và cho $P_k[x]$ là không gian véc tơ các đa thức theo n^2 biến số,bậc k.Một ánh xạ $f: M_n \to P_k[x]$ được coi là bất biến nếu $f(B^{-1}AB) = f(A)$ với mọi ma trận khả nghịch $B \in M_n$.Gỉa sử rằng X là một ma trận cho trước,kí hiệu:
$P(X) = \det(\lambda.I_n - X) = \lambda^n + a_1(X)\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}(X)\lambda + a_n(X)$.Chứng minh rằng:

a) $f_k(X)$ là đa thức thuần nhất bậc k tức là $f_k(tX) = t^k.f_k(X), \forall t \in R$.

b) $f_k(X)$ là ánh xạ bất biến.

Bài 7: Cho $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức với hệ số phức có bậc khác 0.Gỉa sử với $\omega \in c$ thỏa mãn $P(\omega) = 0$ thì đều suy ra $Q(\omega) = 0$ và ngược lại.Đồng thời nếu $\omega \in c$ thỏa mãn $P(\omega) = 1$ thì suy ra $Q(\omega) = 1$ và ngược lại.Chứng minh rằng $P(x) \equiv Q(x)$.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
ĐỀ THI TUYỂN CHỌN HỆ KỸ SƯ TÀI NĂNG VÀ CHẤT LƯỢNG CAO NĂM 1999

Bài 1:Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ xác định trên toàn R,được cho như sau: $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$

Bài 2:Tìm các số thực a,b,c thỏa mãn $a-2b+3c-16=0$ sao cho biểu thức $f=2a^2+2b^2+2c^2-4a-4b-4c+15$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3:Chứng minh rằng phương trình: a.cosx+b.sin2x+c.cos3x=x có nghiệm trên $[-\pi,\pi], \forall a,b,c\in R.$

Bài 4:Tìm hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0,1]$,biết rằng $0\le f(x)\le 1, \forall x\in[0,1]$ và $|f(x_1)-f(x_2)|\ge|x_1-x_2|, \forall x_1,x_2\in[0,1]$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
ĐỀ THI TUYỂN CHỌN HỆ KỸ SƯ TÀI NĂNG VÀ CHẤT LƯỢNG CAO NĂM 2000

Bài 1: cho dãy số $\{x_n\}$ xác định như sau: $\begin{cases} x_n>0 \\ x_n=\ln(1+x_{n-1}), \forall n\ge 1 \end{cases}$,chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ hội tụ đến một giới hạn l và tính l.

Bài 2:Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là hàm số xác định trên R, thỏa mãn điều kiện $|f(x_1)-f(x_2)|\le|x_1-x_2|^3, \forall x_1,x_2\in R.$ thì $f(x)$ là hàm hằng.

Bài 3: $f(x)$ là một hàm số xác định và liên tục tại mọi $x\neq 0$,lấy giá trị không âm,thỏa mãn điều kiện: $f(x)\le k\int_0^x f(t)dt, \forall x\ge 0$,trong đó k là một hằng số dương.Chứng minh rằng: $f(x)=0, \forall x\ge 0.$

Gợi ý:xét sự biến thiên của hàm số $F(x)=e^{-kx}\int_0^x f(t)dt$ trên $(0,+\infty)$

Bài 4: Hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f''(x)\ge 0, \forall x\in R.$.Chứng minh rằng: $f[\text{tx+(1-t)y}]\le \text{tf(x)+(1-t)f(y)}, \forall \text{x,y}\in \text{R}, \forall \text{t}\in(0,1)$

Bài 5: Cho các số thực $k_1,k_2,...,k_n$ khác nhau từng đôi một.Chứng minh rằng: $a_1e^{k_1x}+a_2e^{k_2x}+...+a_ne^{k_nx}=0, \forall x\in R.$ khi và chỉ khi $a_1=a_2=...=a_n.$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
ĐỀ THI TUYỂN CHỌN HỆ KỸ SƯ TÀI NĂNG VÀ CHẤT LƯỢNG CAO NĂM 2001

Bài 1:Cho hàm số $f(x)=\dfrac{e^x}{(x+1)^2}$.Xét dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n), \forall n\in Z^+ \end{cases}$

a) Chứng minh rằng phương trình $f(x)=x$ có một nghiệm duy nhất $\alpha\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

b) Chứng minh rằng $u_n\in\left[\dfrac{1}{2},1\right], \forall n\in Z^+$

c) Chứng minh rằng $f'(x)$ tăng trên $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.Suy ra tồn tại một số $k\in(0,1)$ sao cho $|u_n-\alpha|=k|u_n-\alpha|$ với mọi n nguyên dương.

d) Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\alpha$

Bài 2: Với hai số x,y thuộc R ta đặt $d(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$,chứng minh rằng với ba số x,y,z thuộc R ta luôn có: $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

Bài 3: Cho hàm số $f(x)$ có $f''(x)$ và a < b,chứng minh rằng:

a) $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]>\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),\forall x_1,x_2\in[a,b],\forall\lambda\in(0,1)$

b) $\int_a^b f(x)dx\le(b-a)f(\frac{a+b}{2})$

Bài 4: Cho a < b và hàm số $f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên R thỏa mãn $f(a)=f(b)=0$ và $\int_a^b |f'(x)|dx=m.$Chứng minh rằng: $|f(x)|\le\frac{m}{2},\forall x\in[a,b]$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
ĐỀ THI TUYỂN CHỌN HỆ KỸ SƯ TÀI NĂNG VÀ CHẤT LƯỢNG CAO NĂM 2002

Bài 1:Cho bất phương trình: $\frac{x}{1+|x|}\ge mx^2+x$

a) Gải bất phương trình khi m = 2.
b) Tìm $m\in R$ lớn nhất sao cho bất phương trình có nghiệm đúng với mọi $x\in R$.

Bài 2: cho dãy số $\{x_n\}$ xác định như sau: $\begin{cases} x_1=-\frac{1}{3} \\ x_{n+1}=\frac{x_n^2}{2}-1,n\ge1\end{cases}$,chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn khi $n\to\infty$ và tìm giới hạn đó.

Bài 3: Cho các số thực $a_i,i=\overline{0,2002}$ thỏa mãn: $\begin{cases} a_0=0 \\ a_0+\frac{a_1}{2}+...+\frac{a_{2002}}{2003}\end{cases}$

Chứng minh rằng phương trình: $a_0+a_1x+...+a_{2002}x^{2002}=0$ có nghiệm trên $[0,1]$

Bài 4:cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)\ge0$ trên toàn bộ R và $a\in R$ cố định.Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(x)+(a-x)f'(x)$ trên R.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
ĐỀ THI TUYỂN CHỌN HỆ KỸ SƯ TÀI NĂNG VÀ CHẤT LƯỢNG CAO NĂM 2003

Bài 1:Tìm đa thức $P(x)$ có bậc bé nhất,đạt cực đại tại x = 1 với $P(1)=6$ và đạt cực tiểu tại x = 3 và P(3) = 2.

Bài 2: Có tồn tại hay không một đa thức P(x) thỏa mãn hai điều kiện: $\begin{cases} P(x)\ge P''(x),(i) \\ P'(x)\ge P''(x).(ii)\end{cases},\forall x\in R.$

Bài 3: a) Cho hàm số f(x) xác định và f'(x) > 0 với $\forall x\in R.$ Biết rằng tồn tại $x_0\in R$ sao cho $f(f(f(f(x_0))))=x_0$ .Chứng minh rằng $f(x_0)=x_0$.

c) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x=y^3+2y-2 \\ y=z^3+2z-2 \\ z=t^3+2t-2 \\ t=x^3+2x-2\end{cases}$

Bài 4:Cho dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn: $\begin{cases} x_1=2 \\ x_1+x_2+...+x_n=n^2x_n\end{cases}$,tính $\lim_{n\to\infty}(n^2x_n)$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
ĐỀ THI TUYỂN CHỌN HỆ KỸ SƯ TÀI NĂNG VÀ CHẤT LƯỢNG CAO NĂM 2004

Bài 1:Tìm các số a,b,c sao cho: $\lim_{x\pm\infty}\frac{a(2x^3-x^2)+b(x^3+5x^2-1)-c(3x^3+x^2)}{a(5x^4-x)-bx^4+c(4x^4+1)+2x^2+5x}=1$

Bài 2:Chứng minh rằng với mọi tham số m,phương trình: $x^3-9x-m(x^2-1)$ luôn có 3 nghiệm.

Bài 3: f(x) là một hàm số xác định trên [0,1],lấy giá trị trên [0,1] thỏa mãn điều kiện: $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le\left|x_1-x_2\right|,\forall x_1,x_2\in[0,1]$.Chứng minh rằng tồn tại duy nhất $x_0\in[0,1]$ sao cho $f(x_0)=x_0$

Bài 4: a) Chứng minh rằng nếu f(x) liên tục trên [a,b] thì: $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b\left|f(x)\right|dx$

b) Chứng minh rằng nếu hàm số f(x) có đạo hàm liên tục trên đoạn [a,b] và thỏa mãn điều kiện f(a) = f(b) = 0 thì: $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{M(b-a)^2}{4}$,trong đó $M=max_{a\le x\le b}\left|f'(x)\right|$.Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
ĐỀ THI TUYỂN CHỌN HỆ KỸ SƯ TÀI NĂNG VÀ CHẤT LƯỢNG CAO NĂM 2005

Bài 1: Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau: $\begin{cases}u_0=1\\ u_n=u_{n-1}+\dfrac{1}{u_{n-1}},n\ge 1\end{cases}$

a) Chứng minh rằng dãy số ấy không dẫn tới giới hạn hữu hạn khi $n\to\infty$
b) Chứng minh rằng: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$

Bài 2:Cho hàm sô f(x) liên tục,đơn điệu trên đoạn [0,b] và $a\in[0,b]$,chứng minh rằng:

$$b\int_0^a f(x)dx\ge a\int_0^b f(x)dx$$

Bài 3: f(x) là một hàm số liên tục trên đoạn $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn: $\begin{cases}f(x)>0\\ \int_0^{\pi}2f(x)dx<1\end{cases}$,chứng tỏ rằng phương trình $f(x)=\mathrm{sinx}$ có một nghiệm trong khoảng $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Bài 4:Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin(\dfrac{1}{x}),x\ne=\\ 0,x=0\end{cases}$, α là hằng số dương.Với giá trị nào của α ,hàm số f(x) có đạo hàm tại mọi x.

Bài 5:Tìm tất cả các hàm số f(x) có đạo hàm liên tục trên R và thỏa mãn hệ thức $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy,\forall x,y\in R.$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
ĐỀ THI TUYỂN CHỌN HỆ KỸ SƯ TÀI NĂNG VÀ CHẤT LƯỢNG CAO NĂM 2006

Bài 1:Phương trình: $x^3-\mathrm{ax}^2+4=0$,(a là tham số) có bao nhiêu nghiệm?

Bài 2:Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau: $\begin{cases}u_0\in R\\ u_{n+1}=u_n+\int_0^1\left|t-u_n\right|dt,\forall n\in N.\end{cases}$

a) Chứng minh rằng: Đó là một dãy số tăng và nếu $u_0\ge 1$ thì: $u_{n+1}=2u_n-\frac{1}{2}$,từ đó chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$
b) Chứng minh rằng nếu $0\le u_0<1$ hay nếu $u_0<0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$

Bài 3: Với mọi n nguyên dương,đặt $I_n=\int_0^1 x^n\ln(1+x^2)dx$

a) Tính $\lim_{n\to\infty} I_n$

b) Gỉa sử $c \in (0,1)$,đặt $A_n = \int_0^c x^n \ln(1+x^2)dx, B_n = \int_c^1 x^n \ln(1+x^2)dx$,chứng minh: $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n} = 0$

Bài 4: a) Tìm những hàm số f(x) xác định trên R liên tục tại x = 0 sao cho f(2x)= f(x) $,\forall x \in R$.

c) Tìm những hàm số g(x) xác định trên R,có đạo hàm tại x = 0 sao cho g(2x) = 2g(x) $,\forall x \in R$.

Bài 5:Cho x và y là hai đường thẳng chéo nhau.A và B là hai điểm cố định trên x.CD là đoạn thẳng có chiều dài l cho trước trượt trên y.Tìm vị trí của CD sao cho diện tích toàn phần của tứ diên ABCD là nhỏ nhất.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
ĐỀ THI TUYỂN CHỌN HỆ KỸ SƯ TÀI NĂNG VÀ CHẤT LƯỢNG CAO NĂM 2007

Bài 1:Cho phương trình: $(\sqrt{1-x}+\sqrt{x})^3 - \sqrt{x(1-x)} = m$ (1) (m là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi m = 1.
b) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.

Bài 2:Với n là số nguyên dương đặt: $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{2n-1}(\sin x)^{2n}dx, V_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{2n-1}(\cos x)^{2n}dx$

Chứng minh rằng:

a) $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = 0$

b) $2U_n + V_n \le \frac{\pi^2}{32}, \forall n \ge 1.$

Bài 3: Giả sử $f: R^+ \to R^+$ là một hàm số liên tục thỏa mãn $f(f(x)) = \sqrt[5]{(x+1)^5+1}$ .Chứng minh rằng:

a) Nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì $x_1 = x_2$

b) Hàm số f(x) đơn điệu tăng và $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$

Bài 4: Cho mặt phẳng (P) và hai điểm C,D ở về hai phía đối với (P) sao cho CD không vuông góc với (P).Hãy xác định vị trí hai điểm A,B thuộc (P) sao cho AB = a (a > 0 cho trước) và tổng độ dài $CA + AB + BD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5: Cho $k_i, i = \overline{1,n}$ là các số thực dương khác nhau từng đôi một.Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cos(k_i x) = 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \lambda_i = 0$