SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO PHÚ THỌ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2001 - 2002

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn Toán

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Đề thi có 01 trang

BÀI 1. Cho các số nguyên dương x, y, z thay đổi có tổng là 2002. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x!y!z!$.

BÀI 2. Hãy tìm đa thức $f(x)$ có bậc thấp nhất nhận giá trị cực đại là 6 tại x=1 và giá trị cự tiểu là 2 tại x=3.

BÀI 3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^{\log_y z} + z^{\log_y x} = 512 \\ y^{\log_z x} + x^{\log_z y} = 8 \\ z^{\log_x y} + y^{\log_x z} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

BÀI 4. Cho dãy số $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ được xây dựng bởi $x_0 = 1000$ và $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2002}{x_n}\right)$ với $\forall n \geq 0$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \sqrt{2002}$ và $\left|x_{30} - \sqrt{2002}\right| < 10^{-6}$.

BÀI 5. Cho tam giác ABC biến thiên nhưng luôn vuông góc tại A và có đường cao AH là một đoạn thẳng cố định cho trước. Gọi E, F thứ tự là hình chiếu của H lên AB và AC. Chứng minh rằng tứ giác EBCF nội tiếp đường tròn và tâm đường tròn này nằm trên một đường thẳng cố định.

----------------------------------Hết----------------------------------

Họ và tên thí sinh:... Số báo danh:.................

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO PHÚ THỌ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2002 - 2003

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn Toán

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Đề thi có 01 trang

BÀI 1

Cho x là số thực dương. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có bất đẳng thức:

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

BÀI 2

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n tuỳ ý, đa thức sau đây không thể có nhiều hơn một nghiệm thực:

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + ... + \frac{x}{1!} + 1$$

BÀI 3.

Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{a^{x-1} + 5}{a^x + 3a}$ với a là tham số dương

1) Tìm tập giá trị của $f(x)$.

2) Tìm a để tập giá trị của $f(x)$ không thể chứa bất cứ một số nguyên chẵn nào.

BÀI 4

Cho phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2 + b^2$

BÀI 5

Cho đường tròn: $(C): x^2 + y^2 + 3ax = 0$

$$(C_m): (1+m^2)(x^2+y^2) - 2ax - 2amy - 3a^2 = 0$$

Trong đó a là hằng số thực khác 0, m là tham số thực. Chứng minh (C_m) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến tại mỗi điểm chung ấy luôn vuông góc với nhau.

---------------------------------Hết---------------------------------

Họ và tên thí sinh:.. Số báo danh:................

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO PHÚ THỌ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2003 - 2004

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn Toán

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Đề thi có 01 trang

Bài 1 *(2,0 điểm)*. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} = 2y \\ y^2 + \sqrt{y} = 2x \end{cases}$$

Bài 2 *(2,0 điểm)*

Cho hai đường tròn $(O_1;R_1),(O_2;R_2)$ cắt nhau tại A, B. S là một điểm cố định nằm trên đường thẳng AB sao cho A nằm giữa S và B, một cát tuyến thay đổi đi qua B cắt các đường tròn $(O_1,R_1),(O_2,R_2)$ lần lượt tại M, N. Đường thẳng SM cắt đường tròn (O_1,R_1) tại điểm thứ hai P, đường thẳng SN cắt đường tròn (O_2,R_2) tại điểm thứ hai Q.

1- Chứng minh tứ giác MPQN nội tiếp.

2- Chứng minh đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác SPQ luôn đi qua điểm cố định thứ hai khác S.

3- Gọi *I* là trung điểm của MN, J là giao của SI với đường tròn (C), chứng minh rằng J luôn thuộc một đường tròn cố định.

Bài 3 *(2,0 điểm)*. Cho a, b, c là các số dương, chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{a^4}{b^4}} + \sqrt[3]{\frac{b^4}{c^4}} + \sqrt[3]{\frac{c^4}{a^4}} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

Bài 4 *(2,0 điểm)*

Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là n $(n \geq 2)$ số nguyên phân biệt. Chứng minh rằng đa thức:

$P(x) = (x-a_1)^2(x-a_2)^2...(x-a_n)^2 + 1$ không thể phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên.

Bài 5 *(2,0 điểm)*

Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ thoả mãn $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + x_n + 1} - \sqrt{x_n^2 - x_n + 1}$ với mọi n nguyên dương.

1- Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn.

2- Tìm giới hạn của dãy số đó.

---Hết---

Họ và tên thí sinh:.. Số báo danh:................

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO PHÚ THỌ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2004 - 2005

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn Toán

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Đề thi có 01 trang

Bài 1 *(2,5 điểm)*

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x + x^2 y = y \\ 2y + y^2 z = z \\ 2z + z^2 x = x \end{cases}$$

Bài 2 *(2,5 điểm)*

Cho dãy số $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ với $u_0 = 3; u_1 = 17; u_{n+2} = 6u_{n+1} - u_n$ với mọi n tự nhiên.

Chứng minh rằng: Với mọi n tự nhiên ta có $\frac{u_n^2 - 1}{2}$ là một số chính phương.

Bài 3 *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC có các cạnh *BC=a, CA=b, AB=c* và bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Gọi G là trọng tâm tam giác, Các đường thẳng *AG, BG, CG* lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tại *D, E, F* tương ứng. Chứng minh rằng:

$$\frac{3}{R} \le \frac{1}{GD} + \frac{1}{GE} + \frac{1}{GF} \le \sqrt{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Bài 4 *(2,0 điểm)*

Cho tam giác *ABC*, gọi độ dài các cạnh tương ứng với các đỉnh *A, B, C* lần lượt là *a, b, c;* độ dài các đường cao tương ứng lần lượt là h_a, h_b, h_c và độ dài các đường trung tuyến tương ứng là m_a, m_b, m_c. Chứng minh rằng:

$$h_a.m_a^4 + h_b.m_b^4 + h_c.m_c^4 \ge 9\sqrt[4]{3S^{10}}$$

----------------------------------Hết----------------------------------

Họ và tên thí sinh:... Số báo danh:.................

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO PHÚ THỌ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2005 - 2006

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn Toán

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Đề thi có 01 trang

BÀI 1 *(2,0 điểm)*

Chứng minh rằng các đồ thị của hai hàm số $y = x^2 - 1$ và $y=\dfrac{2x-1}{x}$ có ba điểm chung phân biệt. Tìm tâm và bán kính đường tròn đi qua 3 điểm ấy.

BÀI 2 *(2,0 điểm)*

Chứng minh rằng phương trình $3^x + 5^x = 6x + 2$ chỉ có hai nghiệm phân biệt và tìm hai nghiệm đó.

BÀI 3 *(2,0 điểm)*

Tìm tất cả các giá trị mà tổng $x + y + z$ có thể nhận được, với x, y, z là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = y(4-y) \\ y = z(4-z) \\ z = x(4-x) \end{cases}$$

BÀI 4 *(2,0 điểm)*

Cho tứ diện *OABC* có các cạnh *OA, OB, OC* đôi một vuông góc với nhau, ngoại tiếp một hình cầu bán kính *r*. Gọi *h* là độ dài đường cao hạ từ *O* đến mặt phẳng *(ABC)*. Hỏi rằng trong số những tứ diện như thế, tứ diện nào có tỉ số giữa *h* và *r* đạt giá trị lớn nhất.

BÀI 5 *(2,0 điểm)*

Cho hình chóp *S.ABCD* đáy *ABCD* là hình bình hành, Gọi *K* là trung điểm của *SC*. Mặt phẳng đi qua *AK* cắt *SB, SC* tứ tự tại *M* và *N*. Đặt $V_1 = V_{S.AMKN}, V = V_{S.ABCD}$. Chứng minh:

$$\frac{1}{3} \le \frac{V_1}{V} \le \frac{3}{8}$$

---------------------------------Hết---------------------------------

Họ và tên thí sinh:... Số báo danh:.................

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO PHÚ THỌ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2006 - 2007

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn Toán

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Đề thi có 01 trang

BÀI 1 *(2,0 điểm)*

a) Giải bất phương trình: $27^x - 7.3^x + 6 \le 0$

b) Cho 2006 số dương $x_1, x_2, ..., x_{2006}$ có tổng bằng 2050. Tìm giá trị lớn nhất của tổng

$$S = x_1^3 + x_2^3 + ... + x_{2006}^3$$

BÀI 2 *(2,0 điểm)*

a) Tính đạo hàm của hàm số: $f\left(x\right) = \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x}$

b) Chứng minh bất đẳng thức: $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$

BÀI 3 *(2,0 điểm)*

Chứng minh trong mọi tam giác ta có

$$\cos\frac{A}{2}\sqrt{\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}} \le \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

BÀI 4 *(2,0 điểm)*

Trong tứ diện ABCD các cạnh DB và DC vuông góc với nhau và chân đường vuông góc hạ từ D xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\left(AB + BC + CA\right)^2 \le 6\left(AD + BD + CD\right)^2$$

Với tứ diện nào thì xảy ra dấu đẳng thức?

BÀI 5 *(2,0 điểm)*

Cho hai đường tròn C(I; R) và C'(I'; R') có tâm và bán kính thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định thứ tự tại hai điểm cố định A và A'. Ta nói rằng hai đường tròn này cắt nhau theo góc α nếu hai tiếp tuyến với hai đường tròn tại giao điểm của chúng tạo với nhau một góc α.

a) Chứng minh rằng hai đường tròn (C) và (C') cắt nhau theo góc α khi và chỉ khi

$$II'^2 = R^2 + R'^2 \pm RR'\cos\alpha \text{ II'}$$

b) Tìm tập hợp giao điểm M của (C) và (C')

----------------------------------Hết----------------------------------

Họ và tên thí sinh:.. Số báo danh:................

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO PHÚ THỌ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2007 - 2008

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn Toán

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Đề thi có 01 trang

Câu 1 *(1,5 điểm)*

Giải phương trình: $3x^2 - 2x + 4 - 4\sqrt{x^3+1} = 0$

Câu 2 *(2,0 điểm)*

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - 1 = y^3 - 2y^2 + 3y \\ 3y - 1 = z^3 - 2z^2 + 3z \\ 3z - 1 = x^3 - 2x^2 + 3x \end{cases}$$

Câu 3 *(1,5 điểm)*

Cho tam giác ABC, đường tròn tâm I nội tiếptam giác tiếp xúc với cạnh BC tại D, kẻ đường kính DM của đường tròn, đường thẳng AM cắt cạnh BC tại N. Chứng minh rằng BN=CD.

Câu 4 *(2,0 điểm)*

Cho dãy số $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ thảo mãn $x_1 = \dfrac{1}{6},\ x_{n+1} = \dfrac{3x_n}{2x_n + 1}$ với mọi n nguyên dương.

1) Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn và tính giới hạn đó.

2) Tìm số hạng tổng quát của dãy số đã cho.

Câu 5 *(1,0 điểm)*

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho bất đẳng thức

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_n^2 \geq \left(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}\right)x_n$$

thoả mãn với mọi số thực $x_1, x_{2,} \ldots, x_n$ x

Câu 6 *(2,0 điểm)*

Cho tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối bằng nhau từng đôi một. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnhk BC và AD.

1) Chứng minh rằng IJ là đường vuông góc chung của BC và AD.

2) Tìm tập hợp các điểm M sao cho tổng MA+MB+MC+MD nhỏ nhất.

---------------------------------Hết---------------------------------

Họ và tên thí sinh:.. Số báo danh:................

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO PHÚ THỌ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2008-2009

Môn Toán

Đề chính thức

Thời gian làm bài: 180 phút không kể thời gian giao đề

Đề thi có 01 trang

Câu 1 (2,0 điểm)

Giải bất phương trình

$$\frac{2^{4-x}-x+1}{\left(\log_2|x|-2\right)\left(x^2-25\right)}\ge 0$$

Câu 2 (2,0 điểm)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3-8x=y^3+2y \\ x^2-3=3\left(y^2+1\right) \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm)

Cho hai tia Ox, Oy vuông góc với nhau tạo O. Trên tia Ox, Oy lần lượt lấy các điểm A, B không trùng với O sao cho diện tích tam giác OAB bằng S cho trước. Kẻ OH vuông góc với AB $(H\in AB)$, gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác OHA và OHB, đường thẳng O_1O_2 lần lượt cắt OA, OB tại I, J.

1) Chứng minh tam giác OIJ là tam giác cân.

2) Xác định vị trí các điểm A, B sao cho diện tích tam giác OIJ lớn nhất.

Câu 4 (2,0 điểm)

Cho dãy số (x_n) thoả mãn $x_1=1,\ x_{n+1}=\sqrt{x_n\left(x_n+1\right)\left(x_n+2\right)\left(x_n+3\right)+1}$ với mọi n nguyên dương, đặt $y_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+2}$ $(n=1,2,3...)$. Tìm $\lim y_n$.

Câu 5 (2,0 điểm)

Cho hình chóp S.ABC, từ điểm O nằm trong tam giác ABC vẽ các đường thẳng lần lượt song song với các cạnh SA, SB, SC và cắt các mặt (SBC), (SCA), (SAB) tương ứng tại các điểm D, E, F.

1) Chứng minh rằng $\frac{OD}{SA}+\frac{OE}{SB}+\frac{OF}{SC}=1$

2) Xác định vị trí của điểm O để thể tích của hình chóp O.DEF đạt giá trị lớn nhất.

----------------------------------Hết----------------------------------

Họ và tên thí sinh:.. Số báo danh:................

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*