

**ĐỀ GIỚI THIỆU OLYMPIC TOÁN  
TOÀN QUỐC LẦN THỨ XIV NĂM 2006**

MÔN: **ĐẠI SỐ**

Thời gian: *180 phút*

NỘI DUNG:

Câu 1: Cho  $A, B$  là các ma trận vuông thực cấp 2 khác 0, thỏa  $AB = BA$  và  $A^{2006} = B^{2006} = 0$ . Chứng minh  $(A + B)^{2005} = 0$ .

Câu 2: Cho

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}, x_i, y_i \in \mathbb{R}, i=1, \dots, n.$$

Tính  $\Delta_2, \Delta_3$ . Từ đó tính  $\Delta_n, n \geq 4$ .

Câu 3: Tìm một ma trận vuông cấp hai  $B = (b_{ij})$ ,  $b_{ij} \neq 0, i, j = 1, 2$  sao cho  $B$  có 2 giá trị riêng  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$ .

Câu 4: Cho  $A$  là một ma trận vuông thực cấp  $n$  không khả nghịch và  $A^t$  là ma trận chuyển vị của  $A$ . Chứng minh rằng, tồn tại các số thực  $x_1, x_2, \dots, x_n$  không đồng thời bằng 0 thỏa

$$[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] A^t A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

-----  
Người giới thiệu Thạc sỹ Hoàng Huy Sơn  
Trưởng bộ môn Toán Trường Đại học An Giang.

**ĐÁP ÁN ĐỀ THI GIỚI THIỆU OLYMPIC TOÁN  
TOÀN QUỐC LẦN THỨ XIV NĂM 2006**

MÔN: **ĐẠI SỐ**

Thời gian: *180 phút*

NỘI DUNG:

Câu 1: Cho  $A, B$  là các ma trận vuông thực cấp 2 khác 0, thỏa  $AB = BA$  và  $A^{2006} = B^{2006} = 0$ . Chứng minh  $(A + B)^{2005} = 0$ .

GIẢI:

Từ giả thiết  $A^{2006} = 0$  suy ra  $\det A = 0$ . Ký hiệu  $A = (a_{ij}), i, j = 1, 2$  thì ta có

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Dễ thấy

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(a_{11} + \lambda a_{12}) & a_{12}(a_{11} + \lambda a_{12}) \\ \lambda a_{11}(a_{11} + \lambda a_{12}) & \lambda a_{12}(a_{11} + \lambda a_{12}) \end{pmatrix} \\ &= (a_{11} + \lambda a_{12}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \end{pmatrix} = (a_{11} + \lambda a_{12}) A \\ &\Rightarrow A^{2006} = (a_{11} + \lambda a_{12})^{2005} A. \end{aligned}$$

Do  $A^{2006} = 0$  và  $A \neq 0$  nên  $(a_{11} + \lambda a_{12})^{2005} = 0 \Rightarrow (a_{11} + \lambda a_{12}) = 0$ . Vậy  $A^2 = 0$ . Từ đó  $A^n = 0, \forall n \geq 2$ . Tương tự thì  $B^n = 0, \forall n \geq 2$ .

Ta có  $(A + B)^{2005} = \sum_{n=0}^{2005} C_{2005}^n A^{2005-n} B^n = 0$ . (Đpcm)

Câu 2: Cho

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 + x_1 y_1 & 1 + x_1 y_2 & \dots & 1 + x_1 y_n \\ 1 + x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & \dots & 1 + x_2 y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 + x_n y_1 & 1 + x_n y_2 & \dots & 1 + x_n y_n \end{vmatrix}$$

Tính  $\Delta_2, \Delta_3$ . Từ đó tính  $\Delta_n, n \geq 4$ .

GIẢI:

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1y_2 \\ 1 & x_2y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1y_1 & 1 \\ x_2y_1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 \\ x_2y_1 & x_2y_2 \end{vmatrix} \\
&= 0 + y_2(x_2 - x_1) + y_1(x_1 - x_2) + 0 = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1). \\
\Delta_3 &= \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Dùng các tính chất của định thức giống như đối với  $\Delta_2$ , ta có các định thức thành phần đều bằng 0 (đều có hai cột giống nhau hoặc tỷ lệ nhau). Vậy  $\Delta_3 = 0$ . Nhận xét đó cũng đúng cho các  $\Delta_k, \forall k \geq 4$ .

Câu 3: Tìm một ma trận vuông cấp hai  $B = (b_{ij})$ ,  $b_{ij} \neq 0, i, j = 1, 2$  sao cho  $B$  có 2 trị riêng  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$ .

GIẢI: Ma trận  $B$  cần tìm phải đồng dạng với một ma trận  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$  tức là  $B = PDP^{-1}$  với  $P$  là một ma trận cấp hai nào đó khả nghịch, chẳng hạn  $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\text{Vậy } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Câu 4: Cho  $A$  là một ma trận vuông thực cấp  $n$  không khả nghịch và  $A^t$  là ma trận chuyển vị của  $A$ . Chứng minh rằng, tồn tại các số thực  $x_1, x_2, \dots, x_n$  không đồng thời bằng 0 thỏa

$$[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] A^t A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{GIẢI: Đặt } A = (a_{ij})_n. \text{ Khi đó } [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] A^t = \left[ \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \quad \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j \quad \dots \quad \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \right]$$

$$[x_1 \ x_2 \dots x_n] A^t A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = 0 \text{ tương đương với } \left( \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \right)^2 + \dots + \left( \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \right)^2 = 0, \text{ ta có hệ}$$

[illegible]

không tầm thường.

(Mỗi câu 2,5 điểm)

Người giới thiệu: Thạc sỹ Hoàng Huy Sơn  
Trưởng bộ môn Toán Trường Đại học An Giang.

**Giới thiệu đề thi: OLYMPIC TOÁN HỌC**  
**Môn thi : Giải Tích**

**Câu 1:** Tìm giới hạn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-n \sin x} dx$$

**Giải:** Đặt  $I_n = \int_0^1 e^{-n \sin x} dx$  ta có  $I_n \geq 0$ , hàm  $y = \frac{\sin x}{x}$  trên đoạn  $[b, 1]$  với

$0 < b \leq 1$  liên tục nên bị chặn trên đoạn đó và  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , do đó tồn tại số dương  $c$  sao cho  $\sin x \geq cx \quad \forall x \in [0, 1]$

Do đó:  $I_n \leq \int_0^1 e^{-ncx} dx = \frac{1}{-nc} e^{-ncx} \Big|_0^1 = \frac{1}{-nce^{nc}} + \frac{1}{nc} \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow \infty$ . Vậy  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ .

**Câu 2:** Tìm giới hạn hàm số

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+2x+x^2} - 2\cos 2x - \sqrt[4]{2+4x+x^3} - \sqrt{1+2x^2}}{x^2}$$

**Giải:** Đặt  $f(x) = \sqrt[4]{2+4x+x^3} - \sqrt{1+2x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+2x+x^2} - 2\cos 2x - \sqrt[4]{2+4x+x^3} - \sqrt{1+2x^2}}{x^2} =$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+2x+x^2} - (1+x)}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-f(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sin^2 x}{x^2 (\sqrt{3+2x+x^2} - 2\cos 2x + 1+x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 + 3x^3 + x^4 + \sqrt{1+2x^2} - 1}{x^2 \left[ (1+x)^3 + (1+x)^2 f(x) + (1+x) f^2(x) + f^3(x) \right]}$$
$$= 2 + \frac{1}{4} \left[ \lim_{x \rightarrow 0} (6 + 3x + x^2) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+2x^2} + 1} \right] = \frac{15}{4}.$$

**Câu 3:** Tìm hàm số  $f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện

$$2006f(x-1) + 2005f(1-x) = x, \quad \forall x \in R.$$

**Giải :**

Thay  $x$  bởi  $x+1$  ta có  $2006f(x) + 2005f(-x) = x+1$  suy ra  $2006f(-x) + 2005f(x) = -x+1$

$$\text{Do đó } (2006 + 2005)(f(x) + f(-x)) = 2 \Rightarrow f(x) + f(-x) = \frac{2}{4011}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} 2006f(x) + 2005f(-x) = x+1 \\ f(x) + f(-x) = \frac{2}{4011} \end{cases} \Rightarrow f(x) = x + \frac{2}{4011} \text{ thỏa đề bài.}$$

-----

Giáo viên ra đề: Thạc sĩ: VÕ TIẾN THÀNH  
Đại Học An Giang