UBND TỈNH AN GIANG
Trường ĐHAG

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN VÒNG 2

Môn thi : Đại số
Hình thức thi : Viết
Thời gian làm bài : 180 phút
Ngày thi : 28/02/2010

Đề thi gồm có: 1 trang

Câu 1: Tính $\det A$ biết

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & x_4 & -x_3 \\ -x_3 & -x_4 & x_1 & x_2 \\ -x_4 & x_3 & -x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

trong đó x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình

$$x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Câu 2: a) Cho A là ma trận vuông cấp n sao cho $AA' = A^2$ với A' là ma trận chuyển vị của A. Chứng minh rằng $\mathrm{Tr}[(A - A')'(A - A')] = 0$.

b) Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp n, C khả nghịch. Giả sử D là ma trận nghiệm đúng phương trình $AX + B = C$ và $BC^{-1} + C^{-1}B = 0$. Chứng minh rằng $\mathrm{Tr}(ADC^{-1}) + \mathrm{Tr}(C^{-1}AD) = 2n$.

Câu 3: Cho ma trận vuông $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Hãy tìm một ma trận B có các giá trị riêng không âm sao cho $B^2 = A$.

Câu 4: Cho A, B, C là các ma trận thực cấp lần lượt là $(3,4), (4,2), (2,3)$ trong đó $\mathrm{rank}(ABC) = 2$ và $(ABC)^2 = (ABC)$. Chứng minh rằng $(CAB) = I_2$. Từ đó suy ra nếu (BCA) khả nghịch thì $\det[(BCA)^{2010} - I_4] = 0$.

Câu 5: Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ và A chéo hóa được. Chứng minh rằng

$$A^{2010}B = 0 \Leftrightarrow AB = 0.$$

Câu 6: Giả sử đa thức $P(x)$ có bậc bằng n và có đúng n nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng đa thức $P(x) + P'(x)$ cũng có đúng n nghiệm thực phân biệt (Với $P'(x)$ là đạo hàm của $P(x)$).

——— Hết ———

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên sinh viên: .... MSSV: .....