OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN ĐẠI HỌC GTVT NĂM 2011

ĐỀ THI MÔN: ĐẠI SỐ

Thời gian: 180 phút

Câu 1a. Cho ma trận
$$A = \begin{pmatrix} a+b & 1 & 1 \\ 1 & b+c & 1 \\ 1 & 1 & c+a \end{pmatrix}$$
trong đó a, b, c là ba nghiệm của đa thức $P(x) = x^3 + mx + 2010$.

a) Tính det(A) theo tham số m.

b) Tìm m để A có một giá trị riêng là 2010.

Câu 1b. Giải phương trình ma trận
$$X^3 - 3X^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Câu 2a. Cho A và N là hai ma trận thực vuông cấp hai sao cho $AN = NA$ và $N^2 = 0$. Chứng minh rằng

a) tr$(N + I) = 2$ và det$(N + I) = 1$.

b) det$(A + N) =$det(A).

c) Nếu det$(A) \neq 0$ thì $(A+N)$ là ma trận khả nghịch và $(A+N)^{-1} = (A-N)A^{-2}$.

Câu 2b. Cho A và B là các ma trận vuông cấp hai có các phần tử là các số nguyên và $AB = BA$, det$B = 1$. Chứng minh rằng nếu det$(A^3 + B^3) = 1$ thì $A^2 = I$.

Câu 3a. Chứng ming rằng với mọi ma trận vuông cấp hai A và B ta có
$$r(AB) - r(BA) \leqslant 1.$$
Hãy lấy ví dụ về ma trận A và B để ta có dấu đẳng thức.

Câu 3b. Cho p là số nguyên dương, A là ma trận vuông cấp n sao cho $A^{p+1} = A$. Chứng minh rằng

a) $r(A) + r(I - A^p) = n$.

b) Nếu p là số nguyên tố thì
$$r(I - A) = r(I - A^2) = ... = r(I - A^{p-1}).$$

Câu 4. Cho đa thức $P(x) = x^n + 2x^{n-1} + 3x^{n-2} + ... + nx + (n+1)$ và $\epsilon = \cos(\frac{2\pi}{n+2}) + i\sin(\frac{2\pi}{n+2})$. Chứng minh rằng
$$P(\epsilon)P(\epsilon^2)...P(\epsilon^{n+1}) = (n+2)^n.$$

Câu 5a. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+2}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}-2}{2} \end{pmatrix}$. Hãy tính A^{2010}.

Câu 5b. Tìm các đa thức với hệ số thực $P(x)$ và $Q(x)$ sao cho

$$(x^2+x+1)P(x^2-x+1) = (x^2-x+1)Q(x^2+x+1).$$

Chú ý:

+) Ta ký hiệu I là ma trận đơn vị, tr(A) là tổng các phần tử trên đường chéo chính của ma trận A.

+) Sinh viên K50 và K51 làm các câu 1a, 2a, 3a, 4, và 5a.

+) Sinh viên K47, K48, K49 làm các câu 1b, 2b, 3b, 4 và 5b.