

ĐỀ THI SINH VIÊN GIỎI TOÁN NĂM 2010 – VÒNG CHUNG KHẢO

Câu 1. Cho A là ma trận vuông cấp 2011 và $|A| = 2010$. Tính $|A^*|$, trong đó A^* là ma trận phụ hợp của A .

Câu 2. Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \tan x^2 + 3x}{1 + 2 \sin x - \cos x}$$

Câu 3. Tìm m để ma trận sau có hạng nhỏ nhất:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & 1 \\ m & 4 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & m^2 & 3 \end{pmatrix}$$

Câu 4. Xét sự khả vi của hàm số sau:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

tại điểm $x = 0$.

Câu 5. Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 11 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_5 = 5 \end{cases}$$

-----&&-----

HƯỚNG DẪN GIẢI - NĂM 2010

Câu 1. Do $|A| = 2010 \neq 0$ nên A khả nghịch.

Ta có: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* \Rightarrow A^* = 2010 \cdot A^{-1} \Rightarrow |A^*| = 2010^{2011} \cdot |A^{-1}|$

Mà $A \cdot A^{-1} = E$ suy ra $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$ suy ra $|A^{-1}| = 1/|A| = 1/2010$

Suy ra $|A^*| = 2010^{2010}$.

Câu 2. Do $\sin^2 x \sim \tan^2 x \sim x^2$ khi $x \rightarrow 0$

$$1 - \cos x = 2\sin^2(x/2) \sim x^2/2 \text{ khi } x \rightarrow 0$$

nên

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \tan^2 x + 3x}{1 + 2\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2\sin x} = \frac{3}{2}$$

Câu 3. Biến đổi ma trận A

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & 1 \\ m & 4 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & m^2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & 1 & m \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & m^2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 10 & m-6 \\ 0 & 0 & -25 & 17-3m \\ 0 & 0 & m^2-49 & 28-4m \end{pmatrix}$$

Do $D_{1,2,3}^{1,2,3} = -25 \neq 0$ suy ra $r(A) \geq 3$

Dễ thấy với $m = 17/3$ thì $r(A) = 4$.

$$\text{Với } m \neq 17/3 \text{ ta thấy } r(A) = 3 \Leftrightarrow \frac{m^2-49}{-25} = \frac{28-4m}{17-3m} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 7 \\ m = \frac{-2+\sqrt{61}}{3} \\ m = \frac{-2-\sqrt{61}}{3} \end{cases}$$

Câu 4. Xét $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-t^2}}{1/t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{t^2}} \stackrel{Lop}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2te^{t^2}} = 0$

(Với $t = 1/x$). Vậy $f(x)$ khả vi tại 0.

Câu 5. Biến đổi ma trận hệ số mở rộng

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & -3 & 2 & 5 & 11 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

về dạng tam giác (nên đổi cột 1 cho cột 4, ẩn cũng đổi tương ứng), thay ẩn, ta được nghiệm duy nhất của hệ: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 1, 0, -1, 0)$.

-----&&-----