Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội

Đề thi tuyển chọn hệ kỹ sư tài năng năm 2000

Môn thi : **Toán**

Thời gian làm bài : 90 phút[1]

Bài 1:

Cho dãy số $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$ xác định như sau:
$x_n > 0, x_n = ln(1 + x_{n-1}) \forall n \geq 1$

Chứng minh rằng dãy số ấy hội tụ đến một giới hạn l.Tính l.

Bài 2:

Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn điều kiện

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|^3, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

thì $f(x)$ là hàm hằng.

Bài 3:

$f(x)$ là một hàm số xác định và liên tục tại mọi $x \neq 0$, lấy giá trị ≤ 0 , thỏa mãn điều kiện

$$f(x) \leq k \int_0^x f(t)dt. \forall x \geq 0$$

trong đó k là một hằng số dương, Chứng minh rằng $f(x) = 0, \forall x \geq 0$.

(Gợi ý : Có thể xét sự biến thiên của hàm số $F(x) = e^{-kx} \int_0^x f(t)dt$ trên khoảng $(0, +\infty)$)

Bài 4:

Hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$f[tx + (1-t)y] \leq tf(x) + (1-x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall t \in (0,1).$$

Bài 5:

Cho số thực $k_1, k_2, \ldots, k_n$, khác nhau từng đôi một. Chứng minh rằng

$$a_1 e^{k_1 x} + a_2 e^{k_2 x} + \ldots + a_n e^{k_n x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

---

[1] Tài liệu được soạn thảo lại bằng $\LaTeX\,2_\varepsilon$ bởi **Phạm duy Hiệp**