

KỲ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2010 (Đợt 1)

Môn thi: GIẢI TÍCH

(Dành cho cao học)

Thời gian làm bài: **180** phút

Câu 1.

- a. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{2x}{x+2} < \ln(x+1), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

- b. Cho $a > 1$, tìm tất cả các số thực α để chuỗi sau hội tụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)^\alpha.$$

- c. Cho hàm số f xác định trên hình vuông $D = [0; 1] \times [0; 1]$

$$f(x, y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{nếu } x \leq y \\ y(1-x) & \text{nếu } x > y. \end{cases}$$

Khảo sát tính khả vi của hàm f tại các điểm trong của D .

Câu 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n > 1$, hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất trong tập $D = [0; 1] \times [0; 1]$:

$$\begin{cases} x^n + y^n + n = 3nx \\ x^{2n} + y^{2n} + n = 6nx. \end{cases}$$

Câu 3. Cho $X = C_{[0;1]}$ với chuẩn $\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in [0; 1]\}$.

Cho ánh xạ $A: X \rightarrow X$ xác định bởi

$$Ax(t) = t \cdot x(1-t) - (1-t) \cdot x(t), \quad \forall x \in X, t \in [0; 1].$$

Chứng minh A là ánh xạ tuyến tính liên tục. Tìm $\|A\|$.

Câu 4. Cho H là một không gian Hilbert.

- a. Giả sử $\{x_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ là hệ trực giao trong H . Chứng minh rằng, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ yếu khi và chỉ khi nó hội tụ mạnh (hội tụ theo chuẩn).

- b. Cho (x_n) là dãy hội tụ yếu về x trong H . Giả sử dãy $(\|x_n\|)$ hội tụ về $\|x\|$ trong $\mathbb{R}$. Chứng minh dãy (x_n) hội tụ mạnh về x .

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.



ĐÁP ÁN ĐỀ GIẢI TÍCH CAO HỌC ĐỢT 1 NĂM 2010

Câu 1. (4đ)

a. Xét hàm $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}, x \geq 0$. Ta có $f'(x) = \frac{x(x+4)}{(x+1)(x+2)^2}, x > 0$.

Do vậy $f(x) > f(0) = 0$ hay $\ln(1+x) > \frac{2x}{x+2}, x > 0$. (1đ)

b. Đặt $a_n = \sqrt[n]{a} - 1$ thì $a_n > 0$ và $\sqrt[n]{a} = 1 + a_n$. Theo trên ta có

$$\frac{2a_n}{a_n + 2} < \frac{1}{n} \ln a = \ln(1 + a_n) < a_n \quad \text{hay} \quad na_n \frac{2}{a_n + 2} < \ln a < na_n \quad (0,5\text{đ})$$

Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \ln a$. Nên các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)^\alpha$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ khi $\alpha > 1$ và phân kỳ khi $\alpha \leq 1$. (1đ)

c. Dễ thấy f khả vi tại các điểm của D mà $x < y$ hay $x > y$. (0,5đ)

Để xét tính khả vi của f tại các điểm $(a, a), |a| < 1$, ta xét hàm

$\varphi(x) = f(x, a)$, khi đó $\varphi'(a^+) = -a \neq \varphi'(a^-) = 1 - a$ tại mọi $|a| < 1$. Suy ra f không khả vi tại các điểm $(a, a), |a| < 1$. (1đ)

Câu 2. (2đ)

Xét không gian metric $X = \mathbb{R}^2$ với khoảng cách d xác định bởi

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}, \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$$

(X, d) là không gian metric đầy đủ. (0,5đ)

Xét hàm $f: X \rightarrow X$ xác định bởi

$$f((x, y)) = \left(\frac{x^n + y^n + n}{3n}, \frac{x^{2n} + y^{2n} + 2n}{6n} \right), (x, y) \in X.$$

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$ ta có

$$\begin{aligned} d(f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)) &= \\ &= \max \left\{ \frac{|x_1^n - x_2^n + y_1^n - y_2^n|}{3n}, \frac{|x_1^{2n} - x_2^{2n} + y_1^{2n} - y_2^{2n}|}{6n} \right\} \end{aligned} \quad (0,5\text{đ})$$

Chú ý

$$\begin{aligned} |x_1^n - x_2^n + y_1^n - y_2^n| &\leq |x_1^n - x_2^n| + |y_1^n - y_2^n| \leq n(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \\ &\leq 2n d((x_1, y_1), (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x_1^{2n} - x_2^{2n} + y_1^{2n} - y_2^{2n}| &\leq |x_1^{2n} - x_2^{2n}| + |y_1^{2n} - y_2^{2n}| \\ &\leq 2n(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \leq 4n d((x_1, y_1), (x_2, y_2)). \end{aligned} \quad (0,5\text{đ})$$

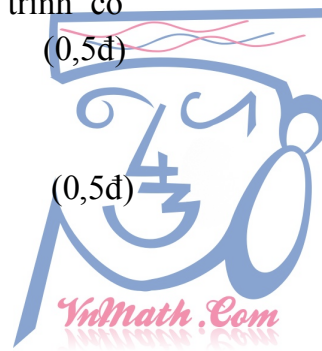
Do đó $d(f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)) \leq \frac{2}{3} d((x_1, y_1), (x_2, y_2))$. Theo nguyên lý ánh xạ

co, có duy nhất $(x, y) \in X$ sao cho $(x, y) = f(x, y)$, tức là hệ phương trình có duy nhất nghiệm. (0,5đ)

Câu 3. (2đ)

Kiểm tra tính tuyến tính của A .

(0,5đ)



$\forall x \in X, t \in [0; 1]$ ta có $|Ax(t)| \leq t|x(1-t)| + (1-t)|x(t)| \leq \|x\|$. Nên $\|Ax\| \leq \|x\|$. Vậy A liên tục và $\|A\| \leq 1$ (1đ)

Xét hàm $\bar{x}(t) = 2t - 1, t \in [0; 1]$. Ta có $\|\bar{x}\| = 1$ còn

$$\|A\bar{x}\| = \max_{t \in [0; 1]} |1 - 2t| = 1$$

Vậy $\|A\| = 1$. (0,5đ)

Câu 4. (2đ)

a. Đặt $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$. Giả sử $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = x_0$. Khi đó với mọi $x \in H$ ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\langle S_n - x_0, x \rangle| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - x_0\| \cdot \|x\| = 0. \text{ Vậy } S_n \xrightarrow{w} x_0. \quad (0,5\text{đ})$$

Ngược lại, giả sử $S_n \xrightarrow{w} x_0$ khi đó với mọi $x \in H$ ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\langle S_n, x \rangle| = \langle x_0, x \rangle.$$

Do đó dãy $(\langle S_n, x \rangle)_n$ bị chặn. Theo nguyên lý bị chặn đều $\|S_n\| \leq M, \forall n$.

Suy ra $\|S_n\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \leq M^2, \forall n$. Vì vậy $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ hội tụ nên $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ. (0,5đ)

b. Giả sử $x_n \xrightarrow{w} x$. Ta có

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|^2 &= \langle x_n - x, x_n - x \rangle = \langle x_n, x_n \rangle - \langle x, x_n \rangle - \langle x_n, x \rangle + \langle x, x \rangle \\ &= \|x_n\|^2 - \langle x, x_n \rangle - \langle x_n, x \rangle + \|x\|^2 \end{aligned} \quad (0,5\text{đ})$$

Theo giả thiết $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$. Vậy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x. \quad (0,5\text{đ})$$

