

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2000

MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. M là tập hợp các ma trận cấp n ($n \geq 1$), thực, khả nghịch.

1. Chứng minh rằng M là nhóm đối với phép nhân ma trận.
2. $C \in M$ cố định. Chứng minh rằng ánh xạ $f : M \rightarrow M$, $f(A) = C^{-1}AC$ là một đồng cấu nhóm. Tìm $\text{Im } f$, $\text{Ker } f$ (hay chứng minh rằng f là đẳng cấu).
3. Chứng minh rằng ánh xạ $f_1 : M \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f_1(A) = |A|$ là đồng cấu nhóm. Tìm $\text{Im } f_1$, $\text{Ker } f_1$.

Câu II. Chứng minh rằng $\mathbb{C}^*$ là nhóm đối với phép nhân thông thường. Xét các ánh xạ $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $f(\alpha) = \bar{\alpha}$, $g : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $g(\alpha) = \|\alpha\|$ là đồng cấu nhóm, đơn cấu, toàn cấu hay không? Tìm $\text{Im } f$, $\text{Ker } f$.

Câu III. Chứng minh rằng các phép biến đổi trực giao trên không gian Euclid E làm thành một nhóm đối với phép nhân (phép hợp thành), ký hiệu G . Giả sử $g \in G$. Đặt ánh xạ $\varphi : G \rightarrow G$, $\varphi(f) = g^{-1}fg$. Chứng minh rằng φ là đẳng cấu nhóm.

Câu IV. $\mathbb{C}[x]$ là vành. Đặt ánh xạ

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}[x] &\rightarrow \mathbb{C}[x], \\ f(x) &\rightarrow \overline{f(x)} \end{aligned}$$

(được hiểu là $\bar{a}_0 + \bar{a}_1x + \dots + \bar{a}_nx^n$).

1. Chứng minh rằng φ là đồng cấu nhóm.
2. Chứng minh rằng $\mathbb{R}[x]$ là vành con mà không ideal.

Câu V.

1. Chứng minh rằng các ma trận đối xứng cấp n lập thành nhóm abel đối với phép cộng, ký hiệu nhóm này là M .
2. Chứng minh rằng ánh xạ $f : M \rightarrow M$, $f(A) = A'$ (chuyển vị của A) là đồng cấu nhóm. Tìm $\text{Im } f$, $\text{Ker } f$.
3. Chứng minh rằng tập M các ma trận đối xứng thực cấp n lập thành $\mathbb{R}$ -không gian véc tơ (hay $\mathbb{R}$ -không gian véc tơ con của không gian các ma trận vuông cấp n).
4. T là ma trận khả nghịch (không nhất thiết đối xứng). Chứng minh rằng ánh xạ $f : M \rightarrow M$, $f(A) = T^{-1}AT$ là đồng cấu (tức là ánh xạ tuyến tính).

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2000

MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Tìm hạng của hệ véc tơ $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ theo tham số a

$$a_1 = (1, a, 1),$$

$$a_2 = (1, 1, a),$$

$$a_3 = (a, 1, 1).$$

Tìm phần bù trực tiếp của $L = \{a_1, a_2, a_3\}$ khi $a = -2$ hoặc $a = 1$.

Câu II. Biết $\mathbb{R}_5[x]$ là không gian các đa thức có bậc nhỏ hơn 5. Cho $f(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4$. Chứng minh rằng (1) và (2) là các cơ sở của nó

1. $1, x, x^2, x^3, x^4$.

2. $f^{(4)}(x), f^{(3)}(x), f''(x), f'(x), f(x)$.

Tìm ma trận chuyển cơ sở (1) sang (2). Tìm tọa độ của $f(x) = 34 + 33x + 16x^2 + 5x^3 + x^4$ trong cơ sở (2).

Câu III. Phép biến đổi tuyến tính f trên không gian phức có ma trận là

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

có chéo hoá được không? Có tồn tại phép biến đổi tuyến tính nghịch đảo f^{-1} ? Tìm véc tơ riêng và giá trị riêng của f^{-1} .

Câu IV. Chứng minh rằng tập hợp các ma trận thực có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}.$$

với $a, b \in \mathbb{R}$ lập thành vành con của vành $\text{Mat}(2, \mathbb{R})$, hỏi nó có là ideal không?

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2001

MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Chứng minh rằng

1. Tập $\mathbb{S}^1$ các số phức có mô đun bằng 1 là một nhóm con của nhóm nhân các số phức khác 0.
2. Ánh xạ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ cho bởi $f(x) = \cos(\pi x) + i \sin(\pi x)$ là một đồng cấu từ nhóm cộng các số thực $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{S}^1$.

Câu II.

1. Chứng minh rằng mỗi không gian con L của không gian véc tơ hữu hạn chiều V đều có bù tuyến tính. Phần bù tuyến tính của L có duy nhất không?
2. Tìm số chiều, một cơ sở và phần bù tuyến tính của không gian con của không gian $\mathbb{R}^4$ sinh bởi hệ véc tơ $\{u_1 = (1, -2, -1, 1), u_2 = (-1, 3, 0, 2), u_3 = (2, -5, -1, -1), u_4 = (2, -4, -2, 2)\}$.

Câu III. Xét ma trận thực

$$A = \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ d & b & d \\ 0 & -d & c \end{pmatrix}.$$

1. Nếu φ là một phép biến đổi tuyến tính trong không gian $\mathbb{R}^3$ có ma trận đối với cơ sở chính tắc là A thì φ có chéo hoá được không? Vì sao?
2. Với $a = 3, b = 4, c = 5$ và $d = 2$ hãy tìm ma trận trực giao Q sao cho $B = Q^T A Q$ là ma trận đường chéo.

Câu IV. Phép biến đổi tuyến tính φ gọi là lũy linh bậc p nếu p là một số nguyên dương sao cho $\varphi^{p-1} \neq 0$ và $\varphi^p = 0$. Giả sử φ là một phép biến đổi tuyến tính lũy linh bậc p trong không gian véc tơ n -chiều V . Chứng minh rằng

1. Nếu x là một véc tơ sao cho $\varphi^{p-1}(x) \neq 0$ thì hệ véc tơ

$$\{x, \varphi(x), \varphi^2(x), \dots, \varphi^{p-1}(x)\}$$

độc lập tuyến tính.

2. $p \leq n$.
3. φ chỉ có một giá trị riêng $\lambda = 0$.
4. Nếu $E - A$ là ma trận của phép biến đổi φ đối với cơ sở nào đó thì ma trận A khả nghịch (E là ma trận đơn vị).

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2001

MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Chứng minh rằng tập $O(n)$ các ma trận trực giao cấp n là một nhóm đối với phép nhân ma trận.
2. Cho $Q \in O(n)$, xét ánh xạ $f : O(n) \rightarrow O(n)$ cho bởi $f(A) = Q^T A Q$ trong đó Q^T là chuyển vị của Q . Chứng minh rằng f là một đẳng cấu nhóm.

Câu II. Xét phép biến đổi tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cho bởi

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_2 + 4x_3, 4x_1 - 7x_2 + 8x_3, 6x_1 - 7x_2 + 7x_3).$$

1. Tìm giá trị riêng, véc tơ riêng của φ .
2. Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ có tồn tại hay không một cơ sở sao cho đối với cơ sở đó ma trận của φ có dạng đường chéo.

Câu III. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ xét không gian con L sinh bởi hệ véc tơ

$$\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 0, 0, 3)\}.$$

1. Tìm cơ sở trực chuẩn của không gian con L và cơ sở trực chuẩn của phần bù trực giao $L^\perp$.
2. Giả sử $x = (4, -1, -3, 4)$. Tìm véc tơ $y \in L$ và véc tơ $z \in L^\perp$ sao cho $x = y + z$.

Câu IV.

1. Chứng minh rằng họ $\{1, x - a, (x - a)^2, \dots, (x - a)^{n-1}\}$ với $a \in \mathbb{R}$ là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}_n[x]$ các đa thức hệ số thực có bậc nhỏ hơn n .
2. Tìm tọa độ của $f(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ đối với cơ sở đó.

Câu V.

1. Giả sử f_1, f_2 là các dạng tuyến tính trên K -không gian véc tơ V . Chứng minh rằng ánh xạ $\varphi : V \times V \rightarrow K$ cho bởi $\varphi(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$ là một dạng song tuyến tính trên V . Tìm điều kiện cần và đủ để φ là dạng song tuyến tính đối xứng.
2. Giả sử V là K -không gian véc tơ hữu hạn chiều. Chứng minh rằng dạng song tuyến tính φ có hạng bằng 1 khi và chỉ khi $\varphi \neq 0$ và có hai dạng tuyến tính f_1, f_2 sao cho $\varphi(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$ với mọi $x, y \in V$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2002
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

- Giả sử h là một đồng cấu vành từ vành K vào vành K' , và A là vành con của vành G . Chứng minh rằng $h(A)$ là một vành con của vành K' .
- Trên tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ xét hai phép toán xác định bởi

$$\begin{aligned}a \oplus b &= a + b - 1 \\ a \circ b &= a + b - ab.\end{aligned}$$

Chứng minh rằng $(\mathbb{Z}, \oplus, \circ)$ là một vành giao hoán có đơn vị.

Câu II. Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ xét phép biến đổi tuyến tính g xác định bởi

$$g(u) = (8x - y - 5z, -2x + 3y + z, 4x - y - z) \text{ với } u = (x, y, z).$$

- Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của g .
- Tìm một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$ sao cho đối với cơ sở đó ma trận B của phép biến đổi g có các phần tử ở phía trên đường chéo chính bằng 0. Viết ma trận B .

Câu III. Trong không gian véc tơ Euclide E xét hệ véc tơ $\{u_1, \dots, u_n\}$, và ma trận

$$G = ((u_i, u_j))_{n \times n}.$$

Chứng minh rằng hệ véc tơ $\{u_1, \dots, u_n\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\det G \neq 0$.

Câu IV. Giả sử f là một dạng song tuyến tính hạng r trên K -không gian véc tơ V n -chiều. Xét các tập con

$$\begin{aligned}V_r &= \{y \text{ thuộc } V : f(x, y) = 0 \text{ đối với mọi } x \text{ thuộc } V\}, \\ V_l &= \{y \text{ thuộc } V : f(y, x) = 0 \text{ đối với mọi } x \text{ thuộc } V\}.\end{aligned}$$

Chứng minh rằng V_r, V_l là các không gian con và $\dim V_r = \dim V_l = n - r$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2002

MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Giả sử h là một đồng cấu từ nhóm G vào nhóm G' , và H là nhóm con của nhóm G . Chứng minh rằng $h(H)$ là một nhóm con của nhóm G' .
2. Xét ánh xạ f từ nhóm tuyến tính tổng quát $GL(n, \mathbb{R})$ vào nhóm nhân $\mathbb{R}^*$ các số thực khác 0 xác định bởi $f(A) = \det A$. Chứng minh rằng f là một toàn cấu. Xác định nhóm con $f(O(n))$, với $O(n)$ là nhóm các ma trận trực giao.

Câu II.

1. Giả sử L là một không gian con p -chiều của không gian véc tơ Euclide E n -chiều. Chứng minh rằng tập

$$L^* = \{x \in E : (x, y) = 0, \forall y \in L\},$$

là một không gian con $(n - p)$ -chiều và $E = L \oplus L^*$.

2. Xét không gian con L của không gian véc tơ Euclide $\mathbb{R}^4$ sinh bởi hệ véc tơ $u_1 = (1, 0, 2, 1)$, $u_2 = (2, 1, 2, 3)$, $u_3 = (0, 1, -2, 1)$. Xác định một cơ sở trực chuẩn của không gian con L^* .

Câu III. Vết của ma trận A cấp n trên trường K là tổng các phần tử trên đường chéo chính, được ký hiệu là $\text{Tr}(A)$. Chứng minh rằng

1. $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
2. Vết của ma trận của một phép biến đổi tuyến tính không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở của không gian.

Câu IV.

1. Hạng của ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ được ký hiệu là $r(A)$. Chứng minh rằng

$$r(A + B) \leq r(A) + r(B).$$

2. Tính $r(A)$ với $A = (\min\{i, j\})_{m \times n}$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2003
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Chứng minh rằng tích các đồng cấu vành là một đồng cấu vành.
2. Xét đồng cấu nhóm $f : G \rightarrow G'$. Chứng tỏ rằng nếu G là một nhóm giao hoán thì $\text{Im}(f)$ cũng là một nhóm giao hoán.. Cho một ví dụ chứng tỏ điều ngược lại nói chung không đúng.

Câu II.

1. Giả sử L là không gian con của không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ sinh bởi hệ véc tơ

$$\{u_1 = (2, 3, 5), u_2 = (3, 7, 8), u_3 = (1, -6, 1)\}.$$

Với giá trị nào của tham số a thì véc tơ $u = (7, -1, a)$ thuộc không gian con L .

2. Chứng minh rằng trong không gian các hàm số thực liên tục $C(a, b)$ hệ véc tơ $\{1, \cos x, \cos^2 x, \dots, \cos^n x\}$ độc lập tuyến tính.

Câu III. Xét ma trận thực đối xứng

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận trực giao Q sao cho $Q^T A Q$ là ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo đó.

Câu IV. Giả sử u là một véc tơ của không gian Euclid E .

1. Chứng minh rằng với mỗi véc tơ x thuộc E có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng $x = au + v$ trong đó véc tơ v trực giao với véc tơ u .
2. Cho $E = \mathbb{R}^4$, $u = (2, -1, 0, 2)$, $x = (1, 1, 1, -1)$. Tính a và v .

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2003

MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Trong nhóm G xét ánh xạ $h : G \rightarrow G$ xác định bởi $h(a) = a^{-1}$, $\forall a \in G$. Chứng minh rằng ánh xạ h là một tự đẳng cấu khi và chỉ khi G là một nhóm Aben.

Câu II. Trong không gian véc tơ Euclide $\mathbb{R}^4$ xét không gian con L cho bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

1. Tìm số chiều và một cơ sở của phần bù trực giao $L^\star$ của không gian con L .
2. Cho véc tơ $x = (7, -4, -1, 2)$. Tìm véc tơ $y \in L$, $z \in L^\star$ sao cho $x = y + z$.

Câu III. Xét ánh xạ tuyến tính $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ được cho bởi

$$g((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 - 2x_2 + x_4, x_1 + x_3 - x_4, 2x_2 + x_3 - 2x_4).$$

1. Tìm $\dim \text{Ker } g$, $\dim \text{Im } g$.
2. Với giá trị nào của tham số a thì véc tơ $y = (-1, 2, a)$ thuộc không gian con $\text{Im } g$.

Câu IV. Giả sử f là một phép biến đổi tuyến tính lũy linh bậc n (tức là $f^{n-1} \neq 0$, $f^n = 0$) trong K -không gian véc tơ V . Chứng minh rằng

1. Nếu $x \in V : f^k(x) \neq 0$ thì hệ véc tơ $\{x, f(x), \dots, f^k(x)\}$ độc lập tuyến tính.
2. $n \leq \dim V$.
3. Nếu $n = \dim V$ thì đa thức đặc trưng của phép biến đổi f có dạng $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2004
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Giả sử $(G, \circ)$ là một nhóm có hữu hạn phần tử, đơn vị e . Chứng minh rằng

1. Đối với mỗi phần tử $a \in G$ tồn tại số nguyên $k \geq 1$ sao cho $a^k = e$ (số nguyên dương nhỏ nhất có tính chất đó gọi là cấp của phần tử a).
2. Nếu a là phần tử cấp n thì $A = \{a, a^2, \dots, a^n\}$ là một nhóm con của nhóm $(G, \circ)$.

Câu II. Xét ma trận thực

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}.$$

1. Chứng tỏ ma trận A không khả nghịch.
2. Tính hạng của ma trận A theo giá trị của các tham số a, b, c .

Câu III. Phép biến đổi tuyến tính f trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ được cho bởi

$$f(x, y, z) = (4x - 5y + 2z, 5x - 7y + 3z, 6x - 9y + 4z).$$

1. Tìm các giá trị riêng, véc tơ riêng của f .
2. Phép biến đổi f có chéo hoá được không? Vì sao? Tìm một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$ sao cho ma trận của f đối với cơ sở đó là ma trận tam giác.

Câu IV. Chứng minh rằng tập con khác rỗng L của không gian véc tơ $\mathbb{R}^n$ là một không gian con khi và chỉ khi L là tập nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất trên $\mathbb{R}$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2004
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Giả sử X là một vành. Chứng minh rằng

1. Đối với mỗi số nguyên $n \geq 0$, tập

$$nX = \left\{ a = nx = \underbrace{x + x + \dots + x}_{n \text{ lần}} : x \in X \right\}$$

là một ideal của vành X (với quy ước $0x = 0$).

2. Các tập dạng $n\mathbb{Z}$ với $n = 0, 1, 2, \dots$ là tất cả các ideal của vành số nguyên $\mathbb{Z}$.

Câu II.

1. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ xét không gian con L sinh bởi hệ véc tơ

$$\{u_1 = (1, a, -1, -2), u_2 = (2, -1, a, 5), u_3 = (1, 10, -6, 1)\}.$$

Tính $\dim L$ theo tham số a .

2. Giả sử hệ véc tơ $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là một cơ sở của K -không gian véc tơ V . Đặt $v_k = u_k + \dots + u_n$ với $k = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh rằng hệ $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ là một cơ sở của không gian V .

Câu III. Phép biến đổi tuyến tính g trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ được cho bởi

$$g((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - 3x_2 - x_3, -3x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + 5x_3).$$

1. Chứng tỏ rằng g là một phép biến đổi đối xứng.
2. Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian véc tơ Euclid $\mathbb{R}^3$ là các véc tơ riêng của g .

Câu IV. Giả sử f là một dạng song tuyến tính hạng k trên K -không gian véc tơ $\mathbb{K}^n$. Xét các tập con

$$V_r = \{y \in \mathbb{K}^n : f(x, y) = 0 \text{ đối với mọi } x \in \mathbb{K}^n\},$$

$$V_l = \{y \in \mathbb{K}^n : f(y, x) = 0 \text{ đối với mọi } x \in \mathbb{K}^n\}.$$

Chứng minh rằng V_r, V_l là các không gian con và $\dim V_r = \dim V_l = n - k$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2005
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Trong nhóm G xét ánh xạ $f : G \rightarrow G$ cho bởi $f(x) = x^2$ với mọi $x \in G$.

1. Chứng minh rằng f là một tự đẳng cấu của nhóm G khi và chỉ khi G là nhóm aben.
2. Cho một ví dụ sao cho f là tự đẳng cấu và một ví dụ sao cho f là một tự đồng cấu nhưng không phải là tự đẳng cấu.

Câu II. Xét ánh xạ tuyến tính $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi: với $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ thì

$$h(u) = (x_1 + ax_2 - x_3 + 2x_4, 2x_1 - x_2 + ax_3 + 5x_4, x_1 + 10x_2 - 6x_3 + x_4)$$

1. Xác định $\dim \operatorname{Im} h$, $\dim \operatorname{Ker} h$ theo tham số a .
2. Với $a = 3$, với giá trị nào của b thì véc tơ $u = (1, -2, b)$ thuộc $\operatorname{Im} h$.

Câu III. Xét ma trận thực

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Tìm các giá trị riêng, véc tơ riêng của A .
2. Tìm ma trận trực giao Q sao cho $B = Q^T A Q$ là ma trận đường chéo. Viết ma trận B .

Câu IV.

1. Giả sử F là một không gian con của K -không gian véc tơ n -chiều V . Chứng minh rằng nếu $\dim F < n$ thì trong không gian V có cơ sở $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ sao cho $u_i \notin F$, $i = 1, 2, \dots, n$.
2. Chứng minh rằng đối với mỗi dạng tuyến tính φ trên không gian véc tơ Euclid hữu hạn chiều E tồn tại duy nhất một véc tơ $u^* \in E$ sao cho

$$\varphi(x) = (u^*, x) \text{ với mọi } x \in E.$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2005
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Xét đồng cấu vành $f : K \rightarrow K^*$. Chứng minh rằng

1. Nếu A là một vành con của vành K thì $f(A)$ là một vành con của K^* .
2. Nếu B là một ideal của vành K' thì $f^{-1}(B)$ là một ideal của vành K .

Câu II.

1. Xác định số chiều của không gian nghiệm N của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau đây theo tham số a

$$\begin{aligned}x_1 + ax_2 - x_3 + 2x_4 &= 0, \\2x_1 - x_2 + ax_3 + 5x_4 &= 0, \\x_1 + 10x_2 - 6x_3 + x_4 &= 0.\end{aligned}$$

2. Với $a = 3$, tìm cơ sở trực giao của phần bù trực giao $N^\perp$ của N trong không gian véc tơ Euclid $\mathbb{R}^4$.

Câu III. Xét ma trận thực

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Tìm các giá trị riêng, véc tơ riêng của A .
2. Tìm một ma trận tam giác đồng dạng với ma trận A .

Câu IV. Xét dạng toàn phương ω trên không gian véc tơ Euclid $\mathbb{R}^n$ cho bởi

$$\omega(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Chứng minh rằng

1. Nếu dạng ω xác định dương thì $a_{ii} > 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.
2. Dạng ω xác định dương khi và chỉ khi tồn tại ma trận khả nghịch S sao cho $(a_{ij})_{n \times n} = S^T S$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2006 ĐỢT 1

MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I.

1. Chứng minh rằng giao các ideal của một vành là một ideal.
2. Giả sử S là tập con khác rỗng của vành K giao hoán có đơn vị. Chứng minh rằng tập

$$(S) = \left\{ x = \sum_{i=1}^n a_i s_i : s_i \in S, a_i \in K, i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

là ideal nhỏ nhất chứa tập S .

Câu II. Xét phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cho bởi

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + ax_2 + x_3, 2x_1 + ax_2 + bx_3, -x_1 + (b-1)x_3)$$

1. Với giá trị nào của các tham số a, b thì f là một tự đẳng cấu.
2. Tìm $\dim \operatorname{Im} f$, $\dim \operatorname{Ker} f$ với $a = b = 1$.

Câu III. Xét ma trận đối xứng thực

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Tìm các giá trị riêng, véc tơ riêng của A .
2. Dạng toàn phương ω trên không gian véc tơ Euclid $\mathbb{R}^3$ cho bởi

$$\omega(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian $\mathbb{R}^3$ là cơ sở chính tắc của ω . Viết dạng chính tắc của ω tương ứng với cơ sở đó.

Câu IV. Giả sử E là không gian véc tơ Euclid n -chiều.

1. Chứng minh rằng nếu $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của E thì mỗi véc tơ x thuộc E đều có thể biểu diễn dưới dạng

$$x = \sum_{i=1}^n (x \cdot u_i) u_i.$$

2. Giả sử L, M là các không gian con của E và $\dim L < \dim M$. Chứng minh rằng tồn tại véc tơ $u \in M, u \neq 0$ sao cho $(u, y) = 0$ với mọi $y \in L$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2006 ĐỢT 2
MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Xét vành đa thức $\mathbb{R}[x]$ ẩn x hệ số thực. Chứng minh rằng

- Đối với mỗi đa thức $f(x)$ thuộc $\mathbb{R}[x]$ tập

$$f(x)\mathbb{R}[x] = \{g(x) = f(x)h(x) : h(x) \in \mathbb{R}[x]\}$$

là một ideal của vành $\mathbb{R}[x]$.

- Đối với mỗi ideal $I \neq \{0\}$ của vành $\mathbb{R}[x]$ tồn tại duy nhất đa thức dạng chuẩn $p(x)$ sao cho $I = p(x)\mathbb{R}[x]$.

Câu II. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ xét hệ véc tơ

$$u_1 = (1, a, 2, 1) \quad , \quad u_2 = (1, 1, b, 0) \quad , \quad u_3 = (1, b, 2, 1) \quad .$$

- Với những giá trị nào của các tham số a, b thì hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính.
- Tìm một cơ sở của phần bù trực giao $L^\star$ của không gian con L sinh bởi hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ với $a = b = 1$.

Câu III. Xét phép biến đổi tuyến tính f trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f((x, y, z)) = (8x - y - 5z, -2x + 3y + z, 4x - y - z) \quad .$$

- Tìm các giá trị riêng, véc tơ riêng của f , của f^n , $n > 0$.
- Tìm một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$ sao cho ma trận B của f đối với cơ sở đó là ma trận tam giác. Viết ma trận B .

Câu IV. Xét dạng song tuyến tính g trên K -không gian véc tơ n -chiều V thoả mãn điều kiện $g(x, x) = 1$ với mọi x thuộc V . Chứng minh rằng

- $g(x, y) = -g(y, x)$ với mọi x, y thuộc V .
- Nếu g không suy biến thì mỗi véc tơ u thuộc V , $u \neq \{0\}$, luôn luôn tồn tại véc tơ v thuộc V sao cho $g(u, v) = 1$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2007 ĐỢT 1

MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Phần tử a thuộc nhóm $(G, \circ, e)$ gọi là có cấp hữu hạn p nếu p là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $a^p = e$. Giả sử G là một tập hợp hữu hạn có n phần tử. Chứng minh rằng

- Mỗi phần tử a thuộc nhóm $(G, \circ, e)$ đều có cấp hữu hạn.
- Với mọi a, b thuộc nhóm $(G, \circ, e)$ các phần tử $a \circ b$ và $b \circ a$ có cấp bằng nhau.

Câu II.

- Xác định số chiều của không gian nghiệm N_0 của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau đây theo tham số thực a

$$x_1 + ax_2 - x_3 + 2x_4 = 0,$$

$$2x_1 - x_2 + ax_3 + 5x_4 = 0,$$

$$x_1 + 10x_2 - 6x_3 + x_4 = 0.$$

- Cho $a = 3$, tìm phần bù trực tiếp của N_0 trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^4$.

Câu III. Trong không gian véc tơ Euclid $\mathbb{R}^3$ xét phép biến đổi tuyến tính f cho bởi

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (3x_1 + 2x_2, 2x_1 + 4x_2 - 2x_3, -2x_2 + 5x_3).$$

- Chứng minh rằng f là phép biến đổi đối xứng.
- Tìm cơ sở trực chuẩn của không gian véc tơ Euclid $\mathbb{R}^3$ là các véc tơ riêng của f và cho biết ma trận của f đối với cơ sở đó.

Câu IV. Xét dạng song tuyến tính không suy biến g trên K -không gian véc tơ n -chiều V . Giả sử rằng dạng song tuyến tính g_1 trên không gian véc tơ con r -chiều F cho bởi $g_1(x, y) = g(x, y)$ với mọi x, y thuộc F là một dạng không suy biến. Xét tập

$$F^* = \{x \in V : g(x, y) = 0 \text{ với mọi } y \in F\}.$$

Chứng minh rằng

- F^* là một không gian con và $F^* \cap F = \{0\}$.
- $V = F \oplus F^*$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2007 ĐỢT 2

MÔN THI CƠ BẢN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Phần tử x thuộc một vành được gọi là lũy linh nếu tồn tại số n nguyên dương sao cho $x^n = 0$.

1. Chứng minh rằng tập I tất cả các phần tử lũy linh của một vành K giao hoán là một ideal.
2. Giả sử A là một vành có đơn vị e . Chứng minh rằng nếu phần tử a thuộc A là một phần tử lũy linh thì $e - a$ là một phần tử khả nghịch.

Câu II. Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^3$ xét không gian con L sinh bởi hệ véc tơ

$$u_1 = (1, 2, -1); u_2 = (1, 3, a); u_3 = (0, 1, b).$$

1. Tính $\dim L$ theo các giá trị tham số a, b .
2. Cho $a = 1, b = 2$. Hãy xác định giá trị của tham số m để véc tơ $u = (1, 0, m)$ thuộc không gian con L .

Câu III. Giả sử $A = (a_{ij})_{n \times n}$ là một ma trận thực cấp n . Trong $\mathbb{R}$ -không gian véc tơ $M_{1 \times n}[\mathbb{R}]$ các ma trận hàng xét ánh xạ $f : M_{1 \times n}[\mathbb{R}] \rightarrow M_{1 \times n}[\mathbb{R}]$ cho bởi

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n)) = (x_1, x_2, \dots, x_n) A.$$

1. Chứng minh rằng ánh xạ f là phép biến đổi tuyến tính và các giá trị riêng của f trùng với các giá trị riêng của ma trận A .
2. Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của f đối với trường hợp

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Câu IV. Chứng minh rằng dạng song tuyến tính g trên K -không gian véc tơ n -chiều V có hạng bằng 1 khi và chỉ khi $g \neq 0$ và có hai dạng tuyến tính g_1 và g_2 trên V sao cho $g(x, y) = g_1(x)g_2(y)$ với mọi x, y thuộc V .

Đại học quốc gia Hà nội

ĐỀ THI TUYỂN SINH SAU ĐẠI HỌC NĂM 2010

Môn thi cơ bản: Đại số

Đề số III

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. Cho A là một ma trận vuông. Chứng minh rằng mỗi giá trị riêng của A cũng là một giá trị riêng của ma trận chuyển vị A^t .

Câu II. (a) Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp khử Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 23 \\ 9 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

(b) Dùng kết quả của câu (a) để giải bài toán sau: Tìm đa thức bậc 3 theo biến u , ký hiệu là $\varphi = \varphi(u)$, sao cho $\varphi(1) = 6, \varphi(2) = 23$ và giá trị của đạo hàm của φ tại 1 và 2 lần lượt là 9 và 26.

Câu III. Cho V là không gian vectơ phức gồm tất cả các đa thức có dạng $f(x, y)$, trong đó f là một đa thức theo hai biến x, y , có bậc không quá 2. (Bậc của đơn thức $cx^m y^n$ là $m + n$, còn bậc của một đa thức là bậc lớn nhất của các đơn thức nằm trong đa thức đó.)

(a) Hãy xây dựng một cơ sở của V và từ đó tìm số chiều của không gian vectơ này.

(b) Giả sử $f \in V$. Định nghĩa một hàm Lf theo công thức $Lf = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Chứng minh rằng L là một tự đồng cấu tuyến tính của không gian vectơ V . Tìm ma trận biểu diễn của L đối với cơ sở đã xây dựng trong câu (a).

(c) Tự đồng cấu L có chéo hóa được hay không? Vì sao?

Câu IV. Cho q là một dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$, có ma trận trong cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm dạng chính tắc của q theo các bước sau đây:

(a) Tìm các giá trị riêng của A .

(b) Với mỗi giá trị riêng đó, tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian con riêng tương ứng.

(c) Tìm một ma trận trực giao Q sao cho $Q^{-1}AQ$ là một ma trận chéo.

(d) Kết luận về dạng chính tắc của q .

Câu V. Cho A là vành các hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ đối với phép cộng và phép nhân thông thường. Ký hiệu $I \subset A$ là tập con gồm tất cả các hàm liên tục f thỏa mãn $f(0) = 0$.

(a) Chứng minh rằng I là một ideal cực đại của A .

(b) Chứng minh rằng vành thương A/I đẳng cấu với trường số thực $\mathbb{R}$.

Câu VI. (a) Đa thức $x^3 + x + 1$ có bất khả quy trong vành $\mathbb{Z}/5[x]$ hay không? (Nói cách khác, đa thức này có phân tích được thành tích của hai đa thức đều có bậc nhỏ hơn 3 trong vành nói trên hay không?) Ở đây $\mathbb{Z}/5$ là vành các số nguyên mod 5.

(b) Chứng minh rằng đa thức $x^3 + (5m+1)x + 5n+1$ là bất khả quy trên $\mathbb{Z}$ với mọi giá trị nguyên của m và n .