BÙI QUANG TRƯỜNG

TÌM TÒI
LỜI GIẢI
CÁC PHƯƠNG TRÌNH VÔ ĐỊNH

Sách dùng cho học sinh
phổ thông yêu toán

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - 1995

LỜI GIỚI THIỆU

Phương trình vô định là một chủ đề toán học xa xưa và từ lâu rất quen thuộc đối với các bạn trẻ yêu toán. Nhưng điều kỳ diệu là những bí ẩn trong chúng không ngừng bị khám phá, mà cuốn sách này là một bằng chứng. Tác giả Bùi Quang Trường, với kinh nghiệm và sự ấp ủ nhiều năm chủ đề này đã dẫn dắt bạn đọc đi từ phương trình vô định quen thuộc ax + by = c đến phương trình nghiệm nguyên bậc cao với những cách giải mới gọn gàng, đôi khi bất ngờ, mang tính chất tìm tòi rõ rệt. Vì thế, cuốn sách này rất có ích cho các bạn trẻ yêu toán. Các em học sinh khá, giỏi toán ở cả cấp 2 và cấp 3 sẽ tìm thấy ở đây sự vận dụng khéo léo và linh hoạt các kiến thức thông thường như thế nào để giải những bài toán về tìm nghiệm nguyên từ đơn giản đến phức tạp, kể cả những bài toán có trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Hy vọng rằng sự dẫn dắt khéo léo của tác giả trong cuốn sách sẽ đem đến cho bạn đọc những giây phút hào hứng và say mê với toán học phổ thông.

Tôi xin trân trọng giới thiệu cuốn sách "Tìm tòi lời giải các phương trình vô định" với bạn đọc.

Hà Nội ngày 28 tháng 11 năm 1994.

Giáo sư 1, phó tiến sĩ

VŨ DƯƠNG THỤY

LỜI NÓI ĐẦU

Hơn ba thế kỷ đã trôi qua, phương trình Fecma không ngừng thách thức trí tuệ của con người. Chưa ai bác bỏ hay chứng minh được rằng "

"Phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm trong tập hợp số tự nhiên khi n là số nguyên lớn hơn 2".

Trên lề cuốn "Số học" của Điôphăng - một cuốn sách mà các nhà sáng tạo ra lý thuyết số hiện đại đều phải học - Fecma đã ghi lại bài toán đó và tiếp sau đó là dòng chữ "Tôi đã tìm được cách chứng minh thật kỳ lạ mệnh đề này. Nhưng ở đây chiều rộng của lề sách không cho phép trình bày cách chứng minh đó".

Fecma thường không công bố những phát hiện của mình khi còn sống. Và trong bút tích còn để lại của ông, người ta không tìm được một dấu vết nhỏ nào chứng minh ấy.

Nhiều bộ óc tuyệt đỉnh của nhân loại đã quan tâm đến bài toán. Những phương pháp tính toán mới thật sắc bén và kỳ diệu đã được sáng tạo... mà lời khẳng định hay phủ nhận chưa hề có.

Phương trình vô định là như thế !

Biết bao con người vĩ đại như Acsimet (Archimede 287 - 212 trước công nguyên), Điôphăng (A. Diophante, thế kỷ III sau công nguyên), Fecma (P. Fermat, 1601 - 1665), Ole (L. Euler, 1707 - 1783), Gauxơ (K. Gauss, 1777 - 1855), Kumme (P. Kemmer, 1810 - 1893), ... đã bị chúng lôi cuốn với một sức mạnh ghê gớm.

Sự khó khăn và niềm sảng khoái vô hạn là phần thưởng xứng đáng giành cho những người yêu thích phương trình vô định.

Xưa nay, người ta vẫn xem phương trình vô định bậc hai không phải là dễ. Chỉ phương trình vô định bậc nhất là đã có phương pháp giải hoàn chỉnh nhờ Bkhaskara (nhà toán học Ấn Độ thế kỷ XII). Nhưng cốt lõi của phương pháp chưa làm chúng ta vừa lòng. Các số nguyên t, t_1, t_2, ... liên tiếp phải xuất hiện, trợ giúp cho việc giải toán.

Nếu suy nghĩ một cách sáng tạo, chúng ta sẽ tìm ra những phương pháp giải vô cùng ngắn gọn, không bao giờ phải sử dụng đến t_1 và nếu không vội thỏa mãn với kết quả thu được, chúng ta sẽ chinh phục những phương trình còn phức tạp hơn nữa.

Cuốn sách này, được viết như một cuộc trò chuyện về việc tìm ra các phương pháp mới để giải phương trình $ax + by = c$ (chương I), tiến tới phương trình $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = f$ (chương II). Và chương III đề cập đến một số phương trình vô định bậc cao, cũng như một số phương trình vô định trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi trong nước và quốc tế.

Chúng tôi vô cùng cảm ơn giáo sư Vũ Dương Thụy đã đọc kỹ bản thảo và cho những ý kiến quý báu.

Chúng tôi hy vọng rằng cuốn sách sẽ đem đến cho bạn đọc những giây phút hào hứng, và cũng hy vọng sẽ nhận được từ bạn đọc nhiều ý kiến bổ ích.

Tác giả

Chương I

BA CÁCH GIẢI PHƯƠNG TRÌNH $ax + by = c$

§ 1. PHƯƠNG PHÁP TRUYỀN THỐNG

Sách giáo khoa* đã đưa ra thí dụ mẫu sau đây:

Bài toán 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định:

$$23x + 53y = 109$$

Và giải như sau:

1. Ta rút ẩn số có hệ số nhỏ hơn theo ẩn số kia:

$$x = \frac{109 - 53y}{23} = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23}$$

(tách các phần nguyên ra)

Muốn cho x nguyên khi y nguyên thì biểu thức $\frac{17 - 7y}{23}$ phải bằng một số nguyên nào đó, mà ta gọi là t.

Ta có: $\frac{17 - 7y}{23} = t$; $17 - 7y = 23t$ hay $23t + 7y = 17$

Nếu ta tìm được cho t và y những giá trị nguyên thỏa mãn phương trình $23t + 7y = 17$, tức là ta đã tìm được cho x những giá trị nguyên và đã giải được phương trình. Như vậy cách giải phương trình đã cho quy về cách giải một phương trình đơn giản hơn vì có hệ số nhỏ hơn.

* *Đại số lớp 12, Nhà xuất bản giáo dục – 1991*

2. Với phương trình mới $23t + 7y = 17$ này, ta lại làm như trên. Ta rút y

$$y = \frac{17 - 23t}{7} = 2 - 3t + \frac{3 - 2t}{7}$$

Muốn cho y nguyên thì biểu thức $\frac{3 - 2t}{7}$ phải

bằng một số nguyên nào đó, chẳng hạn t_1. Ta sẽ có

$$\frac{3 - 2t}{7} = t_1 \text{ hay } 7t_1 + 2t = 3.$$

3. Thành thử bài toán quy về cách giải một phương trình đơn giản hơn nữa. Ta lại tiếp tục làm như trên với phương trình này.

Ta rút t:

$$t = \frac{3 - 7t_1}{2} = 1 - 3t_1 + \frac{1 - t_1}{2}$$

Cho biểu thức $\frac{1 - t_1}{2}$ bằng một số nguyên t_2, ta có

$$\frac{1 - t_1}{2} = t_2 \text{ hay } 2t_2 + t_1 = 1 \text{ , do đó:}$$

$$t_1 = 1 - 2t_2$$

4. Bây giờ ta biểu thị trực tiếp x và y theo t_2.

Muốn thế, trong biểu thức của t, ta thay t_1 bằng biểu thức của nó theo t_2:

$$t = 1 - 3t_1 + t_2 = 1 - 3(1 - 2t_2) + t_2$$

hay $\quad t = -2 + 7t_2$

Trong biểu thức của y ta lại thay t và t_1 bằng biểu thức của chúng theo t_2:

$$y = 2 - 3t + \frac{3 - 2t}{7} = 2 - 3t + t_1 =$$

$$= 2 - 3(-2 + 7t_2) + (1 - 2t_2) \text{ hay } y = 9 - 23t_2.$$

Cuối cùng trong biểu thức của x ta thay t và y bằng biểu thức của chúng theo t_2:

$$x = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23} = 4 - 2y + t =$$

$$= 4 - 2(9 - 23t_2) - 2 + 7t_2 = 4 - 18 + 46t_2 - 2 + 7t_2$$

hay $x = -16 + 53t_2$.

Như vậy, ta được hai biểu thức sau đây của x và y theo t_2: $x = -16 + 53t_2$; $y = 9 - 23t_2$

Cho t_2 những giá trị nguyên tùy ý (dương, âm hoặc 0), ta được vô số nghiệm của phương trình đã cho.

Hãy dừng lại một chút để ngẫm nghĩ về con đường đã dẫn tới đáp số.

Bằng việc đưa ra các số nguyên t, t_1, t_2 sách giáo khoa đã liên tiếp thay phương trình phải giải bằng các phương trình có hệ số nhỏ hơn và tới khi xuất hiện hệ số bằng 1 bài toán sẽ kết thúc. Nhưng kết thúc vào lúc nào thì chỉ phụ thuộc vào các con số ở đầu bài, bất chấp chúng ta hay sao? Phương pháp giải đó, về mặt lý thuyết, có thể xuất hiện t_{100}, t_{1000} hoặc hơn nữa mà máy tính điện tử mới đủ kiên nhẫn giải quyết. Và nỗi vất vả để đi tới t_n là bao nhiêu thì nỗi vất vả trở về với x và y cũng bấy nhiêu. Như thế chúng ta đã leo lên đỉnh một ngôi nhà chọc trời, rồi lộn xuống để sang thăm anh bạn hàng xóm!

Cần tìm ra một con đường ngắn đáng lẽ phải có.

§ 2. CON ĐƯỜNG MỚI

Có thể vào một lúc tình cờ, bạn gặp bài toán có dạng sau đây:

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$12x + 67y = 43$$

GIẢI

Ta có

$$x = \frac{43 - 67y}{12} = 3 - 5y + \frac{7 - 7y}{12} = 3 - 5y + \frac{7(1 - y)}{12}$$

Để x nguyên, với y nguyên thì $\frac{7(1-y)}{12}$ phải nguyên.

Nhưng vì 7 và 12 nguyên tố cùng nhau nên $1 - y$ phải chia hết cho 12, tức là $1 - y = 12t$ với t nguyên. Vậy $y = 1 - 12t$ và $x = 3 - 5(1 - 12t) + 7t = 67t - 2$.

Các con số ngẫu nhiên trong bài toán đã cho ta một lời giải đẹp! Có thể giải bài toán 1 theo cách đó được không? Nhiều người cho ý kiến đó là kỳ quặc! Ta cứ thử xem.

Nhìn lại đẳng thức $x = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23}$

chúng ta "ước ao" 17 và 7 có ước số chung, hay đẹp hơn nữa: 17 chia hết cho 7(!). Và cố tạo ra con số chia hết cho 7 ấy, ta cộng và trừ thêm 4 thì được

$$x = 4 - 2y + \frac{7(3 - y) - 4}{23}$$

Con số 4 mới xuất hiện đã gây thêm phiền phức. Nếu nó chia hết cho 23 thì tốt quá!

Bằng một linh cảm trực giác, chúng ta chọn con số khác: 46. Ta viết:

$$x = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23}$$

$$= 4 - 2y + \frac{17 + 46 - 7y - 46}{23}$$

$$= 4 - 2y + \frac{7(9 - y)}{23} - 2$$

Hệ số 1 đã xuất hiện! Do 7 và 23 nguyên tố cùng nhau nên để x và y nguyên ta phải có $\frac{9 - y}{23} = t$ là một số nguyên. Suy ra $y = 9 - 23t$ và $x = 4 - 2(9 - 23t) + 7t - 2 = 53t - 16$.

Chúng ta đã đạt tới thắng lợi, không còn nghi ngờ gì nữa. Lời giải đẹp của bài toán 2 có những con số đặc biệt đã được ép không thương tiếc cho bài toán 1 vốn không có gì đặc biệt đã thực sự thành công. Chúng ta tin tưởng xét bài toán tổng quát:

Tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định:

$$ax + by = c$$

trong đó a, b, c là các số nguyên

Trước tiên, rút x và được $x = \frac{c - by}{a}$

Sau đó, chọn A là bội số nguyên của a, sao cho c + A chia hết cho b, tức là $A = ma$, $c + A = kb$ với k, m là các số nguyên.

Vậy $x = \frac{c + A - by - A}{a} = \frac{kb - by}{a} - m = \frac{b(k - y)}{a} - m$

Cuối cùng, giản ước $\frac{b}{a}$ để đưa về dạng tối giản $\frac{b'}{a'}$ ($= \frac{b}{a}$).

Để x nguyên phải có $\frac{b'(k - y)}{a'}$ nguyên, nhưng do $(b', a') = 1$

nên k - y phải chia hết cho a'.

Vậy k - y = ta' với t nguyên $\rightarrow$ y = k - ta' và x = tb' - m.

Đó chính là con đường thật ngắn đã dẫn chúng ta tới thăm *anh bạn hàng xóm - đáp số.*

Chẳng hạn, tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$-12x + 3{,}22\ldots y = 39\frac{2}{9}$$

Trước hết, viết lại $3,22\ldots = 3,(2) = 3 + \frac{2}{9} = \frac{29}{9}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$-108x + 29y = 353.$$

Từ đó $y = \dfrac{353 + 108x}{29} = 12 + 3x + \dfrac{5 + 21x}{29}$

Nhận thấy trong các bội số nguyên của 29 là ± 29, ± 58, ... thì 58 khi cộng với 5 sẽ chia hết cho 21. Vậy:

$$y = \frac{5 + 58 + 21x - 58}{29} + 12 + 3x = 12 + 3x - 2 + \frac{21(3 + x)}{29}$$

Vì (21 , 29) = 1 nên để y và x nguyên thì

$\dfrac{3 + x}{29}$ = t phải nguyên. Suy ra x = 29 t - 3

và y = 10 + 3(29t - 3) + 21t = 108t + 1.

Bao giờ cũng chỉ cần đến ngần ấy dòng cho mỗi phương trình vô định bậc nhất ax + by = c. Chúng ta hãy để ý: khi thực hành tính toán với những con số cụ thể, nên chia c và b cho a để thực hiện với những con số nhỏ hơn, dễ chịu hơn.

- Bản chất của phương pháp vừa nêu là gì?

Là thay cho việc phải tìm ngay toàn bộ các nghiệm, chúng ta chỉ cần tìm một nghiệm rồi sau đó suy ra tất cả các nghiệm còn lại.

Thật vậy, do c + A = kb và A = ma nên c + ma = kb. Suy ra a (- m) + bk = c.

Rõ ràng (- m; k) là một nghiệm nguyên của phương trình ax + by = c.

§3. CON ĐƯỜNG THỨ HAI

Một câu hỏi rất tự nhiên xuất hiện: Có thể nhanh chóng giải được phương trình ax + by = c hay không, khi ta biết một nghiệm nguyên (x_o, y_o) của nó. Câu trả lời là : Được:

Lúc này có thể viết

$$ax_o + by_o = c$$

Như vậy thì $ax_o + by_o = ax + by$ vì cùng bằng c. Suy ra:

$$x = \frac{ax_o + by_o - by}{a} = x_o + \frac{b(y_o - y)}{a}$$

Thay $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$, với a', b' nguyên và (a', b') = 1

chúng ta thấy rằng để x nguyên thì $\frac{b'(y_o - y)}{a'}$

phải nguyên, tức là $\frac{y_o - y}{a'} = t$ nguyên.

Vậy $y = y_o - a't$ và $x = x_o + b't$.

Thí dụ 1: Nếu nhẩm được một nghiệm của bài toán 1 là x = - 16, y = 9 ta tiến hành giải như sau:

Vì (- 16; 9) là nghiệm nên 23. (-16) + 53.9 = 109

Nhưng 23x + 53y = 109 nên

$$23x + 53y = 23(-16) + 53.9$$

$$x = \frac{23(-16) + 53.9 - 53y}{23} = -16 + \frac{53(9 - y)}{23}$$

Do 53 và 23 nguyên tố cùng nhau nên để x nguyên thì $9 - y$ cần chia hết cho 53, tức $9 - y = 53\,t$ với t nguyên.

Vậy $y = 9 - 53t$ và $x = -16 + 53\,t$.

Thí dụ 2: Nếu đoán được phương trình

$$-108x + 29y = 353$$

có nghiệm là $x = -3$, $y = 1$ thì ta có thể viết

$$-108x + 29y = 353 = -108\,(-3) + 29.1$$

Suy ra

$$x = \frac{108.3 + 29 - 29y}{-108} = -3 + \frac{29\,(1 - y)}{-108}$$

Vì $(29, 108) = 1$ nên để x nguyên phải có

$\frac{1 - y}{-108} = t$ nguyên. Vậy $y = 1 + 108\,t$ và $x = -3 + 29t$.

Rõ ràng bản chất của phương pháp 1 và phương pháp 2 là như nhau: tìm một nghiệm nguyên của $ax + by = c$ rồi sẽ suy ra tất cả.

Có một điều khá thú vị: khi tìm hiểu bản chất của phương pháp 1, chúng ta khám phá ra phương pháp 2. Và một điều này nữa: một phương pháp thứ 3, với dáng vẻ mờ ảo bên phương pháp 1, đã hiện lên ngày càng rõ nét khi việc tìm hiểu phương pháp 2 được hoàn tất!.

§ 4. CON ĐƯỜNG THỨ BA

Chúng ta xem lại bài toán 1, sau động tác rút x

$$x = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23}$$

Ta biết rằng để mau chóng đến được đáp số, phải làm xuất hiện hệ số của y là 1. Có nghĩa là phải làm thay đổi hình dạng bên ngoài của các con số. Hãy cứ nhìn vào đẳng thức trên rồi nghiền ngẫm. Chợt vào một phút giây lóe sáng, ta bắt gặp khuôn mặt mới thích hợp của 17.

$$17 = 63 - 46.$$

Và thật nhanh chóng, chúng ta biến đổi:

$$x = 4 - 2y + \frac{63 - 46 - 7y}{23} = 4 - 2y + \frac{7(9 - y)}{23} - 2$$

Do $(7, 23) = 1$ nên muốn x và y nguyên phải có $\frac{9 - y}{23} = t$ nguyên. Vậy $y = 9 - 23t$ và $x = 53t - 16$.

Liệu điều đó có làm nên một phương pháp mới hay không? Chúng ta nhìn lại thí dụ 2 (trang 13) và nhận thấy một biến dạng của 353 : $353 = -108(-3) + 29.1$

Điều đó có nghĩa là 353 cần được phân tích thành tổng đại số của hai số: một là bội số nguyên của (−108), một là bội số nguyên của 29.

Chúng ta có phương pháp 3 để giải phương trình $ax + by = c$ như sau:

Rút x được

$$x = \frac{c - by}{a}$$

Viết c dưới dạng $c = ap + bq$ với p , q nguyên thì

$$x = \frac{ap + bq - by}{a} = p + \frac{b(q - y)}{a} = p + \frac{b'(q - y)}{a'}$$

trong đó $(a', b') = 1$ và a', b' nguyên sao cho $\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$

Để x nguyên thì $\frac{q - y}{a'} = t$ nguyên.

Do đó $y = q - a't$ và $x = p + b't$

Thế là chúng ta đã có trong tay ba phương pháp để tìm nghiệm nguyên của phương trình $ax + by = c$. Chúng được áp dụng với các mẹo mực khác nhau nhưng cùng một bản chất. Trong phương pháp 3 thì (p, q) chính là một nghiệm của phương trình $ax + by = c$.

Bây giờ, chúng ta xét thêm một thí dụ nữa, giải bằng cả ba cách.

Bài toán 3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$1994x + 2001y = 2027.$$

(Các con số thể hiện năm 1994, năm đầu tiên của thế kỷ XXI và năm mà người ta dự đoán con người sẽ lên sao Hỏa).

GIẢI

Cách 1:

$$x = \frac{2027 - 2001y}{1994} = 1 - y + \frac{33 - 7y}{1994}$$

$$= 1 - y + \frac{33 - 2.1994 - 7y + 2.1994}{1994}$$

$$= 1 - y + \frac{7(-565 - y)}{1994} + 2$$

$$= 3 - y - \frac{7(565 + y)}{1994}$$

Vì 7 và 1994 nguyên tố cùng nhau nên để x, y nguyên thì $565 + y = 1994t$

với t nguyên. Vậy $y = 1994t - 565$, $x = 568 - 2001t$

Cách 2:

Thay $x = 568$, $y = -565$ vào phương trình thấy nó nghiệm đúng, tức là:

$$1994.568 + 2001(-565) = 2027$$

So sánh với phương trình đã cho ta rút ra

$$1994x + 2001y = 1994.(568) + 2001.(-565)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1994.568 + 2001.(-565) - 2001y}{1994}$$

$$= 568 + \frac{2001(-565 - y)}{1994}$$

Do (2001; 1994) = 1 nên để x nguyên phải có

$$\frac{565 + y}{1994} = t \text{ nguyên. Vậy } y = 1994t - 565$$

$x = 568 - 2001t$.

Cách 3:

Trong bài toán này nó cũng tương tự như cách 1, nhưng nếu ta "quên" chia 2027 cho 1994 thì

$$x = \frac{2027 - 2001y}{1994} = -y + \frac{2027 - 7y - 3.1994 + 3.1994}{1994}$$

$$= -y + \frac{7(-y - 565)}{1994} + 3$$

Để x, y nguyên thì phải có $\frac{y + 565}{1994} = t$ nguyên

và suy ra $y = 1994t - 565$

$$x = 568 - 2001t.$$

Cả ba phương pháp cùng tồn tại bên nhau, để khi gặp mỗi phương trình dạng $ax + by = c$, phương pháp thích hợp nhất sẽ được sử dụng. Không có phương pháp nào tỏ ra ưu việt trong mọi trường hợp để có thể dễ dàng bỏ rơi các phương pháp còn lại.

Điều đó làm nên vẻ đẹp của toán học, của các con số tưởng chừng khô khan mà biến đổi thật kỳ ảo. Nó thách thức chúng ta tấn công vào những thành lũy tưởng chừng bất khả xâm phạm.

Chương II

ĐƯỜNG DẪN TỚI PHƯƠNG TRÌNH

$$ax^2 + by^2 + cyx + dx + ey = f$$

§ 1. MỘT BÀI THI ĐẠI HỌC: PHƯƠNG TRÌNH $a(x + y) = xy$

Chúng ta bắt gặp bài toán sau đây trong kỳ thi vào Đại học tháng 6 năm 1970.

Bài toán 4. Hai đội cờ thi đấu với nhau. Mỗi đấu thủ của đội này phải đấu một ván với mỗi đấu thủ của đội kia. Biết rằng tổng số ván cờ đã đấu bằng bốn lần tổng số đấu thủ của hai đội và biết rằng số đấu thủ của ít nhất một trong hai đội là lẻ. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu đấu thủ?

GIẢI:

Gọi số đấu thủ của mỗi đội là x và y, theo giả thiết chúng là nghiệm nguyên dương của phương trình vô định $xy = 4(x + y)$

Vậy $4x = xy - 4y = y(x - 4)$. Cần tách riêng hai ẩn:

$$y = \frac{4x}{x-4}$$

Tới đây ta cần cộng và trừ thêm 16 vào 4x:

$$y = \frac{4x - 16 + 16}{x-4} = 4 + \frac{16}{x-4}$$

Để y nguyên thì $x - 4$ phải chia hết 16, tức là $x - 4 = \pm 16$, ± 8, ± 4, ± 2, ± 1.

Giả sử x lẻ, thế thì $x - 4 = \pm 1$.

Nếu $x - 4 = 1 \rightarrow x = 5$ và $y = 4 + 16 = 20$

Nếu $x - 4 = -1 \rightarrow x = 3$ và $y = 4 - 16 < 0$ (loại)

Vậy một đội có 5 người và đội kia có 20 người

Chúng ta lưu ý rằng phương trình thường trở nên khó hơn nhiều khi có mặt số hạng chéo xy.

Vậy mà khi cộng trừ thêm một con số thích hợp bài toán 4 đã được giải quyết một cách nhẹ nhàng.

Không mấy khó khăn, chúng ta giải bài toán tổng quát:

Tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định:

$a(x + y) = xy$ với a là số nguyên.

– Nếu $a = 0$ thì $x = 0$, y nguyên bất kỳ

hoặc $y = 0$, x nguyên bất kỳ

– Nếu $a \neq 0$ thì $ax = xy - ay = y(x - a)$

Do $x = a$ ($\neq 0$) không phải là nghiệm nên

$$y = \frac{ax}{x-a} = \frac{ax - a^2 + a^2}{x-a} = \frac{a(x-a) + a^2}{x-a} = a + \frac{a^2}{x-a}$$

Để y nguyên thì $x - a$ phải là ước số nguyên của a^2, từ đó tính được x và y.

Bài toán 5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$p(x + y) = xy$

trong đó p là số nguyên tố.

GIẢI

$$px = y(x - p)$$

Nếu $x = p$ thì đẳng thức trở thành $p^2 = 0$; vô lý.

Vậy $x \neq p$, nên ta có thể viết:

$$y = \frac{px}{x - p} = \frac{px - p^2 + p^2}{x - p} = p + \frac{p^2}{x - p}$$

Để y nguyên thì phải có p^2 chia hết cho $x - p$, nghĩa là $x - p = \pm p^2, \pm p, \pm 1$. Ngoài ra không có khả năng nào khác vì p là số nguyên tố. Bài toán có sáu nghiệm:

$x - p = p^2 \Rightarrow x = p^2 + p, \quad y = p + 1$

$x - p = -p^2 \Rightarrow x = -p^2 + p, \quad y = p - 1$

$x - p = p \Rightarrow x = 2p, \quad y = p + p = 2p$

$x - p = -p \Rightarrow x = 0, \quad y = 0$

$x - p = 1 \Rightarrow x = 1 + p, \quad y = p + p^2$

$x - p = -1 \Rightarrow x = p - 1, \quad y = p - p^2$

Trong các bài toán trên, hệ số của x và y như nhau, khá đặc biệt. Hãy xét trường hợp mạnh hơn.

Bài toán 6. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$7x - 12y = xy$$

GIẢI

$$7x = xy + 12y = y(x + 12)$$

Giá trị $x = -12$ không nghiệm đúng, nên

$$y = \frac{7x}{x+12} = \frac{7x + 7.12 - 7.12}{x+12} = 7 - \frac{7.12}{x+12}$$

Để y nguyên thì $x + 12$ phải là ước số nguyên của 7.12. Các ước số đó là $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 7, \pm 12, \pm 14, \pm 21, \pm 28, \pm 42, \pm 84$.

Từ đó dễ dàng suy ra các nghiệm cần tìm

Chúng ta có cảm giác các phương trình loại này luôn có nghiệm. Vì vậy hãy xét bài toán sau:

Bài toán 7. Tồn tại hay không nghiệm nguyên của phương trình

$$ax + by = xy$$

với a, b là các số nguyên?

GIẢI

Có thể viết $ax = xy - by = y(x - b)$

– Xét trường hợp phương trình có nghiệm $x = b$.

Thế thì $ab = 0$.

+ Nếu $a = 0 \rightarrow 0x + by = by \Rightarrow$ y nguyên bất kỳ

+ Nếu $b = 0$ (lưu ý $x = b$) $\Rightarrow a.0 + 0.y = 0.y \Rightarrow$ y nguyên bất kỳ.

(Như vậy khi $a = 0$ hoặc $b = 0$, phương trình đã cho có nghiệm $x = b$, y nguyên bất kỳ và có cả nghiệm $y = a$, x nguyên bất kỳ)

– Xét trường hợp phương trình không có nghiệm $x = b$.

Lúc này $x \neq b$ nên

$$y = \frac{ax}{x-b} = \frac{ax - ab + ab}{x-b} = a + \frac{ab}{x-b}$$

Để y nguyên thì $x - b$ phải là ước số nguyên của ab, suy ra $x - b$ nhận ít nhất các giá trị sau (khi a và b là các số nguyên tố): $\pm ab$, $\pm a$, $\pm b$, ± 1. Nếu $|a| = |b| = 1$, bài toán có hai nghiệm, đó là trường hợp số nghiệm ít nhất. Rõ ràng với a, b nguyên, phương trình $ax + by = xy$ luôn luôn có nghiệm. Tới đây nảy sinh một loạt bài toán thật là thú vị.

Bài toán 8. Chứng minh rằng, điều kiện cần và đủ để phương trình $ax + by = xy$ với $|a| \neq 1$, $|b| \neq 1$ có đúng tám nghiệm nguyên phân biệt là: a và b là các số nguyên tố không giống nhau.

Bài toán 9. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để phương trình $ax + by = xy$ với $|a|, |b| \neq 1$ có sáu nghiệm nguyên phân biệt là: $a = b = p$ là một số nguyên tố.

Những bài toán không dễ một chút nào, nhưng trình bày lời giải ở đây là thừa, chúng được giải tương tự bài toán 7.

Thế là chúng ta đã bước một chân vào thế giới các phương trình vô định bậc hai và cảm thấy yên ổn. Chẳng có gì khiến ta phải dừng lại.

§ 2. PHƯƠNG TRÌNH $ax + by = xy + c$

Đó là dạng tổng quát được nêu lên từ các phương trình $ax + by = c$ và $ax + by = xy$, với a, b, c là các số nguyên.

Một lần nữa, chúng ta lại thử dùng phương pháp cộng và trừ thêm một con số thích hợp.

Trước tiên cần tách riêng hai ẩn:

$$ax = y(x - b) + c$$

Nhưng để chia hai vế cho $x - b$ ta cần xét hai khả năng:

- Giả sử phương trình có nghiệm $x \neq b$ thì

$$y = \frac{ax - c}{x - b} = \frac{ax - ab + ab - c}{x - b} = a + \frac{ab - c}{x - b}$$

Để y nguyên thì $x - b$ phải là ước số nguyên của $ab - c$

- Giả sử phương trình có nghiệm $x = b$: lúc này $ax = 0 + c$ $\Rightarrow x = \frac{c}{a}$. Để nghiệm $x = b$ được chấp nhận thì phải có $b = \frac{c}{a} \Rightarrow$ $c = ab$.

Tương tự như vậy, xét $y \neq a$ và $y = a$, ta đi tới kết quả:

- Nếu $ab = c$ thì phương trình $ax + by = xy + c$ có nghiệm $x = b$, y nguyên bất kỳ và $y = a$, x nguyên bất kỳ.

- Nếu $ab \neq c$ thì $x - b$ hoặc $y - a$ là ước số nguyên của $ab - c$.

Bài toán 10. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$4x + 3y = xy - 20$$

GIẢI

$$3y = x(y - 4) - 20$$

Nhận thấy $y = 4$ không nghiệm đúng nên

$$x = \frac{3y + 20}{y - 4} = \frac{3y - 12 + 12 + 20}{y - 4} = 3 + \frac{32}{y - 4}$$

Muốn x nguyên thì $y - 4$ phải là ước số nguyên của 32, tức là $y - 4 = \pm 32, \pm 16, \pm 4, \pm 2, \pm 1$.

Để gọn gàng, các nghiệm được tính theo bảng

$y-4$	32	16	8	4	2	1	-1	-2	-4	-8	-16	-32
y	36	20	12	8	6	5	3	2	0	-4	-12	-28
$\frac{32}{y-4}$	1	2	4	8	16	32	-32	-16	-8	-4	-2	-1
x	4	5	7	11	19	35	-29	-13	-5	-1	1	2

Có tất cả 12 nghiệm.

Bài toán 11. Cho phương trình $6x - 5y = xy - 30$

Hãy tìm nghiệm a/ nguyên âm

b/ nguyên dương

c/ nguyên

GIẢI

$$6x = y(x + 5) - 30$$

Nếu $x = -5$ thì đẳng thức đúng với mọi y nguyên

Nếu $x \neq -5$ thì $y = \dfrac{6x + 30}{x + 5} = 6$

a/ Các nghiệm nguyên âm là $x = -5$, y nguyên âm bất kỳ.

b/ Các nghiệm nguyên dương là $y = 6$, x nguyên dương bất kỳ.

c/ Các nghiệm nguyên là $x = -5$, y nguyên bất kỳ hoặc $y = 6$, x nguyên bất kỳ

Bài toán 12. Tồn tại hay không hai số nguyên tố (x, y) thỏa mãn đẳng thức $x + 3,5\,y = 0,5\,xy$?

GIẢI

Có thể viết $2x + 7y = xy \Leftrightarrow 2x = y(x-7)$

Nhận thấy x không thể bằng 7, vậy

$$y = \frac{2x}{x-7} = \frac{2x - 14 + 14}{x-7} = 2 + \frac{14}{x-7}$$

Để y nguyên thì $\frac{14}{x-7} = \pm 14, \pm 7, \pm 2, \pm 1$ là các ước số nguyên của 14. Nhưng vì y là số nguyên tố (dễ thấy là số nguyên tố lẻ) nên $\frac{14}{x-7}$ chỉ có thể là 1. Nhưng khi đó $x = 21$, không phải là số nguyên tố nên không thỏa mãn đầu bài.

Chúng ta lưu ý rằng 1 không phải là số nguyên tố, cũng không phải là hợp số.

Tuy nhiên, dựa vào đặc điểm x và y là các số nguyên tố, ta sẽ có lời giải đẹp hơn:

Đẳng thức $2x = y(x-7)$ chứng tỏ 2x chia hết cho y. Vì $(x, y) = 1$ nên 2 chia hết cho y, vậy $y = 2$. Nhưng nếu $y = 2$ thì x không tồn tại. Phương trình đã cho không có nghiệm nguyên tố.

Bài toán 13.

Tìm các số nguyên trái dấu x và y thỏa mãn đẳng thức $2x + 5y = xy + 13$.

GIẢI

$$2x = y(x-5) + 13.$$

Do $x = 5$ không thỏa mãn đẳng thức nên $x - 5 \neq 0$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2x-13}{x-5} = \frac{2x-10-3}{x-5} = 2 - \frac{3}{x-5}$$

Để y nguyên thì $x - 5 = \pm 1, \pm 3$, do đó $x = 4, 6; 2; 8$ và các giá trị y tương ứng là 5; -1; 3; 1. Trong đó chỉ có một nghiệm thỏa mãn đầu bài là $x = 6, y = -1$.

Bây giờ, chúng ta thử "liều lĩnh" cho hệ số của số hạng chéo xy khác ± 1.

Bài toán 14. Tồn tại chăng nghiệm nguyên của phương trình

$$4x + 7y = 2xy + 17$$

GIẢI

$4x = y(2x - 7) + 17$

Vì $2x - 7 \neq$ (do x nguyên) nên

$$y = \frac{4x-17}{2x-7} = \frac{4x-14-3}{2x-7} = 2 - \frac{3}{2x-7}$$

Để y nguyên thì $2x - 7 = 3; -3; 1; -1$. Khi đó $x = 5; 2; 4; 3$ và các giá trị y tương ứng là 1; 3; -1; 5. Bài toán có bốn nghiệm.

Nhưng niềm vui của chúng ta kéo dài không lâu khi xét bài toán tổng quát:

"Tìm nghiệm nguyên của phương trình $ax + by = c + dxy$ với các số nguyên a, b, c, d.

Thật vậy, ta có $ax = c + y(dx - b)$

$$\Leftrightarrow y(dx - b) = ax - c$$

Trước khi chia hai vế cho $dx - b$ cần xét hai khả năng.

– Nếu phương trình có nghiệm $x = \frac{b}{d} = k$ (nguyên) thì lúc đó cả hai vế cùng bằng không, tức là x = c/a. Phương trình có nghiệm x = k, y nguyên bất kỳ khi và chỉ khi

$$\frac{b}{d} = \frac{c}{a} = k \text{ với } k \text{ nguyên}$$

(dễ dàng suy ra tương tự $\frac{a}{d} = \frac{c}{b}$ = k' nguyên

thì có nghiệm y = k', x nguyên bất kỳ)

– Nếu $dx - b \neq 0$ (tức là b không chia hết cho d)

thì $y = \frac{ax - c}{dx - b}$

Lúc này nếu $\frac{a}{d} = m$ là một số nguyên thì

$$y = \frac{dmx - mb + mb - c}{dx - b} = m + \frac{mb - c}{dx - b}$$

Vậy $dx - b$ phải là ước số nguyên của $mb - c$, từ đó xác định được x và y.

Nhưng nếu a không chia hết cho d, mà b cũng không chia hết cho d, phương pháp cộng trừ thêm một con số thích hợp tỏ ra bất lực?

Xét

$$y = \frac{ax - c}{dx - b}.$$

Nếu (d, a) = 1

$$\Rightarrow dy = \frac{dax - dc - ab + ab}{dx - b}$$

$$= a + \frac{-dc + ab}{dx - b}$$

Chúng ta đã nhảy lên lưng một con ngựa bất kham, lẽ nào lại cam chịu để nó hất xuống. Không! Chỉ có điều là phải dùng cách trị khác.

§ 3. PHƯƠNG TRÌNH $ax + by = dxy + c$

Khi chưa giải được bài toán tổng quát, ta hãy thử xét một trường hợp cụ thể. Biết đâu nó chẳng gợi lên trong ta một điều gì đó.

Hãy lấy hú họa một phương trình và tìm nghiệm nguyên của nó.

Bài toán 15. Tồn tại hay không nghiệm nguyên của phương trình

$$2x - 3y = -5xy + 39$$

GIẢI

$2x = y(3 - 5x) + 39.$

Vì $3 - 5x \neq 0$ (do $x \neq \frac{3}{5}$) nên $y = \frac{2x - 39}{3 - 5x}$

Để y nguyên thì điều kiện cần (mà chưa đủ) là $|2x - 39| \geq |3 - 5x| \rightarrow (2x - 39)^2 \geq (3 - 5x)^2$

$\Leftrightarrow (2x - 39)^2 - (3 - 5x)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (-3x - 36)(7x - 42) \geq 0$

$\Leftrightarrow -12 \leq x \leq 6.$

Thật sung sướng! Chúng ta đã giới hạn được x để từ đó dễ dàng tìm được các nghiệm nguyên (x, y) của phương trình là $(-12; -1)$, $(0; -13)$, $(2;5)$, $(6;1)$.

Như vậy, điều kiện cần để $y = \frac{ax - c}{dx - b}$ nguyên

là $|ax - c| \geq |dx - b|$

Liệu đây có phải là phương pháp tổng quát để tìm nghiệm nguyên của phương trình $ax + by = dxy + c$

Thử xét một bài toán khác.

Bài toán 16.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $5x - 3y = 2xy - 11$.

GIẢI

$5x = y(2x + 3) - 11 \Leftrightarrow y = \dfrac{5x + 11}{2x + 3}$. Để y nguyên cần có $|5x + 11| \geqslant |2x + 3|$

$\Leftrightarrow (5x + 11)^2 \geqslant (2x + 3)^2 \Leftrightarrow (7x + 14)(3x + 8) \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$$x \leqslant -\frac{8}{3};\ x \geqslant -2$$

Đáng buồn thay x có thể nhận tất cả các giá trị nguyên trên trục số. Chịu chăng? Tất nhiên là không. Bởi vì chúng ta đã có kinh nghiệm về việc biến đổi hình dạng các con số. Nay ta sẽ làm biểu thức y phải thay đổi hình dạng:

$$y = \frac{5x + 11}{2x + 3} = 2 + \frac{x + 5}{2x + 3}$$

Rõ ràng y nguyên khi $x = -5$. Vậy $x = -5$, $y = 2$ là một nghiệm. Để tìm các nghiệm còn lại ($x \neq -5$) ta nhận thấy điều kiện cần để y nguyên là $|x + 5| \geqslant |2x + 3| \Leftrightarrow$

$(x + 5)^2 - (2x + 3)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (3x + 8)(-x - 2) \geqslant 0$

$\rightarrow -\dfrac{8}{3} \leqslant x \leqslant 2 \Leftrightarrow x = -2; -1; 0, 1; 2.$

Thay vào phương trình đã cho, ta thu thêm được ba nghiệm (x, y) là $(-2; -1)$, $(2;3)$, $(-1;6)$.

Chỉ còn một chút nữa thôi, chúng ta sẽ khẳng định được ta đã có trong tay phương pháp tổng quát để tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định $ax + by = dxy + c$. Đó là việc giới hạn x trong khoảng $x_1 \leq x \leq x_2$, một việc hoàn toàn có thể làm được.

Nhận thấy bất phương trình $|ax - c| \geq |dx - b|$ có nghiệm $x_1 \leq x \leq x_2$ khi và chỉ khi bất phương trình tương đương với nó $(ax - c)^2 - (dx - b)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow [(a + d)x - c - b]\,[(a - d)x - c + b] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = (a^2 - d^2)x^2 + 2(bd - ac)x + c^2 - b^2 \geq 0$$

có nghiệm trong khoảng $x_1 \leq x \leq x_2$ với x_1 và x_2 là hai nghiệm của tam thức bậc hai f(x).

Điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases} a^2 - d^2 < 0 \ (1) \\ \Delta' = (bd - ac)^2 - (a^2 - d^2)(c^2 - b^2) = ab - cd > 0 \ (2) \end{cases}$$

Điều kiện (1) $\Leftrightarrow a^2 < d^2 \Leftrightarrow |a| < |d|$. Nếu $|a| > |d|$ ta thực hiện phép chia đa thức tương tự bài toán 16 sẽ được

$$y = m + \frac{a'x - c'}{dx - b}$$ và lúc này bất phương trình

$(a'x - c')^2 - (dx - b)^2 \geq 0$ sẽ có $|a'| < |d'|$

Xét điều kiện (2). Nếu ngược lại $\Delta' = ab - cd < 0$ thì bất phương trình vô nghiệm do $a^2 - d^2 < 0$

Trường hợp $ab - cd = 0$ đã xét ở trang 26

(nếu $\dfrac{b}{d} = \dfrac{c}{a} = k$ nguyên hoặc $\dfrac{a}{d} = \dfrac{c}{b} = k'$ nguyên

thì có nghiệm, k và k' không nguyên thì vô nghiệm).

Như vậy chỉ còn trường hợp $\Delta' > 0$, tức là có (2), khi đó $x_1 \leq x \leq x_2$. Vấn đề được hoàn toàn giải quyết. Nghiệm nguyên của phương trình vô định $ax + by = dxy + c$ được tìm bằng cách đưa ra điều kiện cần và sử dụng trị số tuyệt đối.

Bài toán 17.

Chứng minh rằng trong đẳng thức

$$4x - 3y = 7xy - 6$$

các giá trị x (hoặc y) không thể là các số nguyên âm để y (hoặc x) nguyên

GIẢI

$4x = 3y + 7xy - 6 = y(3 + 7x) - 6$

Vì $3 + 7x \neq 0$ (do x nguyên) nên $y = \dfrac{4x + 6}{7x + 3}$

Nhận thấy $4x + 6 \neq 0$ (do x nguyên)

nên để y nguyên thì điều kiện cần là

$|4x + 6| \geqslant |7x + 3| \Leftrightarrow (4x + 6)^2 - (7x + 3)^2 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (-3x + 3)(11x + 9) \geqslant 0 \Leftrightarrow -\dfrac{9}{11} \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow x = 0; 1.$

Với x = 0 thì y = 2, với x = 1 thì y = 1 → (đpcm)

Bài toán 18.

Chứng minh rằng phương trình

$$3x + 10y = -6 - 5xy$$

có vô số nghiệm nguyên.

GIẢI

$3x = -6 - 5y(x + 2)$

Nếu $x = -2$ thì đẳng thức đúng với mọi y. Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên ($x = -2$, y nguyên bất kỳ).

Chúng ta lưu ý đây là trường hợp $ab - cd = 0$, cụ thể hơn là

$\frac{b}{d} = \frac{c}{a} = -2$. Nếu vô ý thực hiện ngay phép chia

$$y = \frac{-6-3x}{5(x+2)} = -\frac{3}{5}$$

mà thiếu lập luận chặt chẽ chúng ta sẽ đi tới kết luận hoàn toàn khác là bài toán vô nghiệm(!)

Tóm lại, lược đồ để giải phương trình $ax + by = dxy + c$ với a, b, c, d nguyên như sau:

- Viết $ax = y(dx - b) + c$

- Xét $dx - b = 0$. Nếu $\frac{b}{d} = k$ nguyên, phương trình không có nghiệm $x = k$ khi $\frac{c}{a} \neq \frac{b}{d}$, và có vô số nghiệm ($x = k$, y nguyên bất kỳ) khi $\frac{c}{a} = \frac{b}{d}$.

- Xét $dx - b \neq 0$ (tức là $x \neq \frac{b}{d}$) thì $y = \frac{ax - c}{dx - b}$

+ Trường hợp 1: nếu a chia hết cho d, đặt $a = d.k'$ với k' nguyên, thực hiện cộng và trừ một con số thích hợp:

$$y = \frac{dk'x - k'b + k'b - c}{dx - b} = k' + \frac{k'b - c}{dx - b}$$

suy ra $dx - b$ là ước số nguyên của $k'b - c$... Từ đó tìm được x và y nguyên.

+ Trường hợp 2: nếu a không chia hết cho d mà $|a| < |d|$ thì điều kiện cần để y nguyên là $|ax - c| \geqslant |dx - b|$. Từ đó xác định được x nguyên rồi tính y. Phương trình nhận thêm nghiệm x =

c/a; y = 0 nên c chia hết cho a.

+ Trường hợp 3: nếu a không chia hết cho d mà $|a| > |d|$ phải thực hiện phép chia

$$y = \alpha + \frac{a'x - c'}{dx - b}$$

với α nguyên và $|a'| < |d|$. Điều kiện cần để có y nguyên là $|a'x - c'| \geqslant |dx - b|$. Từ đó xác định được x nguyên rồi tính y. Lưu ý nếu a' là ước số nguyên của c' thì phương trình có thêm nghiệm $x = c'/a'$, $y = \alpha$

Bài toán 19.

Tìm các nghiệm nguyên của phương trình

$$14x + 5y = 7xy - 3.$$

GIẢI

Cách 1: $$5y = 7x(y - 2) - 3$$

Giá trị y = 2 không thỏa mãn phương trình. Vậy $y \neq 2$ nên

$$x = \frac{5y + 3}{7(y - 2)}$$

$5y + 3 \neq 0$ vì y nguyên. Điều kiện cần để x nguyên là $|5y + 3| \geqslant |7(y - 2)| \Leftrightarrow (5y + 3)^2 - (7y - 14)^2 \geqslant 0$

$$\Leftrightarrow (12y - 11)(-2y + 17) \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{11}{12} \leqslant y \leqslant \frac{17}{2}$$

Vì y nguyên nên chỉ nhận các giá trị trong bảng sau:

y	1	2	3	4	5	6	7	8
5y + 3	8	13	18	23	28	33	38	43
7 (y − 2)	− 7	0	7	14	21	28	35	42
$x = \frac{5y+3}{7(y-2)}$	Không nguyên							

Kết quả là không thu được giá trị x nguyên nào.

Chúng ta lưu ý rằng phương trình vô nghiệm thường có cách giải hay. Nếu để ý hệ số của x và xy là 14 và 7 ta có cách giải gọn hơn như sau:

Cách 2: $14x = y(7x - 5) - 3$

Do $7x - 5 \neq 0$ ($\Rightarrow x \neq \frac{5}{7}$) nên $y = \frac{14x + 3}{7x - 5} = 2 + \frac{13}{7x - 5}$

Để y nguyên thì $7x - 5$ phải là ước số nguyên của 13, tức là $7x - 5 = 13, -13, 1, -1 \Rightarrow 7x = 18; -8; 6; 4$

$\Rightarrow$ x không nguyên. Bài toán không có nghiệm nguyên.

Cách 3:

$$7x = \frac{5y + 3 - 10 + 10}{y - 2}$$

$$7x = 5 + \frac{13}{y - 2} = t$$

$$\frac{13}{y - 2} = \pm 13, \pm 1$$

Nhưng t không có dạng 7x nên vô nghiệm

Bài toán 20. Phương trình $14x + 5y = 7xy + 12$ có nghiệm nguyên hay không?

GIẢI

Cách 1:

$14x = y(7x - 5) + 12$. Do $7x - 5 \neq 0$ (vì x nguyên) nên

$$y = \frac{14x - 12}{7x - 5} = 2 + \frac{-2}{7x - 5}$$

Để y nguyên thì $7x - 5 = \pm 1, \pm 2 \Rightarrow 7x = 6; 4; 7; 3$.

Chỉ có một giá trị $x = 1$ nguyên, khi đó $y = 2 - 1 = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên.

Cách 2:

$5y = 7x(y - 2) + 12$. Nếu $y = 2$ thì $10 = 12$; vô lý. Vậy $y \neq 2$

Suy ra $x = \dfrac{5y - 12}{7(y - 2)}$. Do $5y - 12 \neq 0$ nên điều kiện

cần để x nguyên là $|5y - 12| \geqslant |7(y - 2)| \Leftrightarrow$

$(5y - 12)^2 - (7y - 14)^2 \geqslant 0 \rightarrow (12y - 26)(-2y + 2) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 1 \leqslant y \leqslant \dfrac{13}{6} \Rightarrow y = 1; 2$. Giá trị $y = 2$ bị loại

Vậy $y = 1$, khi đó $x = 1$ phương trình có nghiệm nguyên. (Cách 2 không hay bằng cách 1. Nó chỉ hay hơn khi phải thử với số trường hợp ít hơn hẳn).

§ 4. PHƯƠNG TRÌNH $ax^2 + by^2 = c$

Ta có thể đặt $X = x^2$, $Y = y^2$ và trước hết tìm nghiệm nguyên không âm của phương trình $aX + bY = c$ quen thuộc, rồi từ đó tìm lại x và y.

Tuy nhiên, vấn đề không quá đơn giản như vậy. Nhiều học sinh giỏi trong các kỳ thi vô địch đã phải bó tay trước một số phương trình dạng này, vì bất lực trước số phép thử hầu như vô tận trong một thời gian hạn chế. Ngay cả khi có nhiều thời gian việc cố tìm chỉ một vài nghiệm nguyên của một số phương trình dạng $ax^2 + by^2 = c$ cũng rất khó khăn. Tốt nhất là chúng ta hãy bắt tay vào việc giải các bài toán.

Bài toán 21.

Tìm các nghiệm nguyên của phương trình

$$17x^2 + 12y^2 = 23$$

GIẢI

Rõ ràng x^2, y^2 là các số nguyên không âm. Nếu $x^2, y^2 \geqslant 1$ thì $17x^2 + 12y^2 \geqslant 29$. Như vậy, ít nhất một trong hai số x^2, y^2 phải bằng 0, tức là vế trái sẽ bằng 17, 12 hoặc 0. Điều đó không thể xảy ra, vậy bài toán vô nghiệm.

Bài toán 22. Tồn tại chăng nghiệm nguyên của phương trình

$$6x^2 - 5y^2 = 34$$

GIẢI

Đặt $X = x^2 \geqslant 0$, $Y = y^2 \geqslant 0 \rightarrow 6X - 5Y = 34$

$$\rightarrow X = \frac{34 + 5Y}{6} = \frac{40 + 5Y - 6}{6} = \frac{5(8 + Y)}{6} - 1$$

Để X nguyên thì phải có $8 + Y = 6t$ với t nguyên, vậy $Y = 6t - 8$, $X = 5t - 1$.

$Y \geqslant 0$ khi $t \geqslant \frac{4}{3}$, $X \geqslant 0$ khi $t \geqslant \frac{1}{5}$.

Điều kiện cần là $t = 2, 3, 4, \ldots$

Chẳng hạn, với $t = 2$ thì $X = 9$, $Y = 4$ nên $(x, y) = (3; 2), (3;$

$-2)$, $(-3; 2)$, $(-3; -2)$. Với $t = 3$ thì $X = 14$ không chính phương nên không có x nguyên ...

Tất nhiên, ngay từ đầu chúng ta cũng có thể đưa ra $x = 3$, $y = 2$ và khẳng định phương trình đã cho có nghiệm nguyên.

Bài toán 23. Chứng minh phương trình

$$4x^2 + 231y^2 = 1613$$

vô nghiệm trong tập hợp số nguyên.

GIẢI

Đặt $X = x^2 \geqslant 0$, $Y = y^2 \geqslant 0 \rightarrow 4X + 231Y = 1613$

$$\Rightarrow X = \frac{1613 - 231Y}{4} = 403 - 58Y + \frac{1 + Y}{4}$$

Để X nguyên, với Y nguyên thì $1 + Y = 4t$ với t nguyên

$$\Rightarrow Y = 4t - 1, X = 403 - 58(4t - 1) + t$$
$$= 461 - 231t$$

$$Y \geqslant 0 \text{ khi } t \geqslant \frac{1}{4}, X \geqslant 0 \text{ khi } t \leqslant \frac{461}{231} < 2.$$

Vậy để X và Y cùng không âm thì $t = 1$. Nhưng với $t = 1$ thì $Y = 3 = y^2 \rightarrow y$ không nguyên (đpcm).

Bài toán 24. Tìm các nghiện nguyên dương của phương trình

$$x^2 - 3y^2 = 1$$

GIẢI

Ta viết $1 = (x + y\sqrt{3})(x - y\sqrt{3})$

Như vậy cần phân tích 1 thành tích của hai số vô tỉ có dạng $(x + y\sqrt{3})$ và $(x - y\sqrt{3})$ với x, y là các số nguyên dương. Có bao nhiêu cách phân tích như thế thì có ngần ấy nghiệm.

Nhận thấy phương trình đã cho có nghiệm $x = 2$, $y = 1$. Đó là nghiệm nhỏ nhất trong các nghiệm nguyên dương có thể có. Vấn đề là làm thế nào để tìm tất cả các nghiệm nguyên dương còn lại khi đã biết được một nghiệm. Chúng ta nhớ lại phương pháp 2 tìm nghiệm nguyên của phương trình ax + by = c (trang 12). Bây giờ có thể viết

$$1 = (x + y\sqrt{3})^k (x - y\sqrt{3})^k$$

và nhận thấy với k nguyên dương bất kỳ thì

$$(x + y\sqrt{3})^k = x_k + y_k\sqrt{3}$$

$$(x - y\sqrt{3})^k = x_k - y_k\sqrt{3}$$

mà x_k và y_k là các số nguyên dương.

Do đó (x_k, y_k) là nghiệm của bài toán đã cho.

Chúng ta đã đoán được $x_1 = 2$, $y_1 = 1$ và x_2, y_2 được xác định như sau:

Với $k = 2 \Rightarrow x_2 + y_2\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$

Vậy $x_2 = 7$, $y_2 = 4$

Với $k = 3 \Rightarrow x_3 + y_3\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^3 = 26 + 15\sqrt{3}$

Vậy $x_3 = 26$, $y_3 = 15$,...

Số nghiệm rõ ràng là vô hạn.

Phương trình vừa xét là một trường hợp riêng của phương trình $x^2 - Py^2 = 1$, với P là số nguyên dương không chính phương, được gọi là phương trình Pell.

Phương trình Pell có nghiệm $x = \pm 1$, $y = 0$ được gọi là nghiệm tầm thường. Nó luôn có vô số các nghiệm không tầm thường. Giả sử x_0, y_0 là các số nguyên dương nghiệm đúng phương trình Pell, thế thì các cặp số $(x_0, -y_0)$, $(-x_0, y_0)$, $(-x_0, -y_0)$ cũng là nghiệm. Thành thử, để tìm các nghiệm không tầm thường của phương trình Pell, ta chỉ cần đi tìm các nghiệm nguyên dương của nó. Tất cả các nghiệm nguyên dương x_k, y_k được xác định từ đẳng thức

$$x_k + y_k\sqrt{P} = (x_1 + y_1\sqrt{P})^k$$

với k = 1, 2, 3,... Trong đó x_1, y_1 là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất.

Với P nhỏ, việc tìm x_1, y_1 không khó khăn lắm. Chúng ta chỉ việc thử lần lượt y = 1, 2, 3,... để tìm $x^2 = Py^2 + 1$ là một số chính phương. Nhưng với P lớn, xác định được x_1, y_1 không quá đơn giản. Chẳng hạn, khi P = 13, ta có:

$$13y^2 = x^2 - 1$$

x có dạng 13m + a với m nguyên không âm, và a = 0, ±1, ±2, ±3, ±4, ±5, ±6.

Vì $x^2 - 1 = (13m + a)^2 - 1 = 169m^2 + 26am + a^2 - 1$ nên điều kiện cần để phương trình có nghiệm nguyên là $(a^2 - 1)$ chia hết cho 13. Dễ thấy rằng a^2 = 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36 và trong đó chỉ có $a^2 = 1$ thì $(a^2 - 1) \vdots 13$.

Vậy x = 13m ±1. Từ đó tìm được $x_1 = 649$.

Nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình Pell $x^2 - Py^2 = 1$ ứng với P từ 1 đến 20 (loại trừ các số chính phương) được tính và ghi lại trong bảng 1.

Bảng 1. Nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình Pell với P ⩽ 20

P	$x^2 - Py^2 = 1$	x_1	y_1
2	$x^2 - 2y^2 = 1$	3	2
3	$x^2 - 3y^2 = 1$	2	1
5	$x^2 - 5y^2 = 1$	9	4
6	$x^2 - 6y^2 = 1$	5	2

P	$x^2 - Py^2 = 1$	x_1	y_1
7	$x^2 - 7y^2 = 1$	4	3
8	$x^2 - 8y^2 = 1$	3	1
10	$x^2 - 10y^2 = 1$	19	6
11	$x^2 - 11y^2 = 1$	10	3
12	$x^2 - 12y^2 = 1$	7	2
13	$x^2 - 13y^2 = 1$	649	180
14	$x^2 - 14y^2 = 1$	15	4
15	$x^2 - 15y^2 = 1$	4	1
17	$x^2 - 17y^2 = 1$	33	8
18	$x^2 - 18y^2 = 1$	17	4
19	$x^2 - 19y^2 = 1$	170	39
20	$x^2 - 20y^2 = 1$	9	2

Bài toán 25. Chứng minh rằng phương trình

$$x^2 - 13y^2 = 1$$

không thể có nghiệm nguyên dương x_0, y_0 mà $x_0 < 649$.

GIẢI

Nhận thấy $x_k = 649$ nghiệm đúng phương trình (lúc đó $y_k = 180$). Giả sử đây không phải là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất x_1, y_1, tức là $k \geqslant 2$. Ta có:

$$(x_1 + y_1\sqrt{13})^k = 649 + 180\sqrt{13}.$$

Nếu $k = 2$ thì $x_1^2 + 13y_1^2 + 2x_1y_1\sqrt{13} = 649 + 180\sqrt{13}$.

Vì vậy

$$\begin{cases} x_1^2 + 13\, y_1^2 = 649 \\ x_1 y_1 = 90 \end{cases}$$

Từ hệ phương trình ấy suy ra

$$x_1^4 - 649\, x_1^2 + 13.8100 = 0$$

nên $\quad x_1^2 = 325$ (không chính phương)

$$324 = 18^2$$

Kết quả là $x_1 = 18$, $y_1 = 5$. Nhưng cặp số này không thỏa mãn đẳng thức $x^2 - 13y^2 = 1$.

Như vậy $x_k = 649$ không thể là x_2. Nếu $k \geqslant 3$ thì giá trị x_1 được tính tương tự như trên (nếu có) sẽ nhỏ hơn 18. Nhưng dễ dàng kiểm tra được các số nguyên $x = 1, 2, ..., 18$ không cho y là số nguyên. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 26. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 - 81y^2 = 1$$

GIẢI

Nếu $y = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

Giả sử phương trình có nghiệm x_0, y_0 nguyên dương, thế thì nó cũng có các nghiệm (x_0, y_0), $(-x_0, y_0)$, $(-x_0, -y_0)$, do đó chỉ cần tìm các nghiệm nguyên dương là suy ra các nghiệm nguyên còn lại.

Phương trình đã cho có thể viết lại là

$$1 = (x + 9y)(x - 9y)$$

Do $x, y > 0$ nên $x + 9y > 0 \Rightarrow x - 9y > 0$. Vậy $x + 9y = 1$, $x - 9y = 1 \rightarrow x = 1/2$, $y = 0$. Các giá trị này không thỏa mãn, phương trình đã cho chỉ có nghiệm $(x, y) = (1; 0), (-1; 0)$.

Một cách tổng quát: phương trình

$$x^2 - k^2y^2 = 1$$

với $k = 1, 2, 3,...$ chỉ có nghiệm tầm thường $x = \pm 1$, $y = 0$.

Bài toán 27. Chứng minh phương trình

$x^2 - 2y^2 = 5$ không có nghiệm nguyên.

GIẢI

Dễ thấy $x, y \neq 0$. Do trong phương trình chỉ có lũy thừa bậc chẵn của x và y nên nếu phương trình có nghiệm thì nó phải có nghiệm x, y nguyên dương. Phương trình đã cho có thể viết là $4 + 2y^2 = (x - 1)(x + 1) > 0$.

Do xét $x > 0$ nên $x + 1 > 0$, suy ra $x - 1 > 0$.

Điều kiện cần để phương trình đã cho có nghiệm là $(x - 1)(x + 1)$ là tích của hai số chẵn liên tiếp $x - 1 = 2k$, $x + 1 = 2(k + 1)$ với k nguyên dương. Như vậy:

$$4 + 2y^2 = 2k.2(k + 1)$$

$$2 + y^2 = 2k(k + 1)$$

y phải là số chẵn, đặt $y = 2t$ với t nguyên

$$2 + 4t^2 = 2k(k + 1)$$

Vế phải là số chia hết cho 4 vì $k(k + 1)$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp (nên chia hết cho 2), còn vế trái không chia hết cho 4. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 28: Chứng minh phương trình

$$x^2 - 2y^2 = n$$

không có nghiệm nguyên nếu $n = 8k \pm 3$ với k là số nguyên.

GIẢI

Tương tự bài toán 27, xét $x > 0$. Phương trình được viết lại là

$$(x + 1)(x - 1) = 2(y^2 + 4k\,{}^{+1}_{-2})$$

Vế trái phải chẵn, nên nó là tích của hai số chẵn liên tiếp $x - 1 = 2m$, $x + 1 = 2(m + 1)$ với m nguyên dương, như vậy

$$2m(m + 1) = y^2 + 4k\,{}^{+1}_{-2}$$

Nhưng $m(m + 1)$ là số chẵn vì là tích hai số tự nhiên liên tiếp, đặt $m(m + 1) = 2t$ với t nguyên dương:

$$4t = y^2 + 4k\,{}^{+1}_{-2}$$

suy ra $$y^2 = 4t - 4k\,{}^{-1}_{+2} = 4S\,{}^{-1}_{+2}$$

Với $S = t - k$ là một số nguyên. Nhưng không số chính phương nào có dạng $4S - 1$ hoặc $4S + 2$. Thật vậy:

- Bình phương của một số chẵn $2n$ là $4n^2$, có dạng $4k$ với k nguyên.

- Bình phương của một số lẻ $2n - 1$ là $4n^2 - 4n + 1$ có dạng $4k + 1$ với k nguyên.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 29. Chứng minh rằng phương trình

$$x^2 - 2y^2 = -1$$

có vô số nghiệm nguyên.

GIẢI

Nhận thấy phương trình có nghiệm $x = y = 1$, và có thể viết dưới dạng

$$-1 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2})$$

Thay $x = y = 1$ vào thì được

$$-1 = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})$$

Nếu nâng hai vế lên lũy thừa bậc lẻ $2k-1$ với k nguyên dương:

$$-1 = (1+\sqrt{2})^{2k-1}(1-\sqrt{2})^{2k-1}$$

thì $$(1+\sqrt{2})^{2k-1} = x_k + y_k\sqrt{2}$$

$$(1-\sqrt{2})^{2k-1} = x_k - y_k\sqrt{2}$$

với x_k, y_k là các số nguyên dương. Đó là các nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho. Vậy phương trình có vô số nghiệm vì có vô số giá trị k nguyên dương.

Ta gọi phương trình dạng $x^2 - Py^2 = -1$

với P nguyên dương, không chính phương là phương trình đối Pell. Không phải phương trình đối Pell nào cũng có nghiệm nguyên. Nhưng nếu nó đã có một nghiệm nguyên thì số nghiệm nguyên của nó là vô hạn. Khi đó, ta cần trước hết xác định nghiệm nguyên dương nhỏ nhất (tương tự như đối với phương trình Pell).

Xét các phương trình đối Pell trong phạm vi $P \leq 20$. Cho $y_1 = 1$ thì x_1 lần lượt là 1, 2, 3, 4 ứng với P là 2, 5, 10, 17 là những số P có dạng $n^2 + 1$ với n nguyên dương, điều đó không có gì lạ. Nhưng thật ngạc nhiên khi khó mà tìm được một nghiệm của các phương trình đối Pell khác (với $P \leq 20$). Đến nỗi chúng ta nghi ngờ rằng phải chăng các phương trình đối Pell, hoặc có nghiệm $y_1 = 1$, hoặc không có nghiệm nguyên. Nếu điều đó đúng thì cũng thật thú vị.

Chúng ta đi theo hướng xác định khả năng vô nghiệm (nguyên) của phương trình đối Pell.

Với mỗi P, điều kiện cần để phương trình đối Pell $x^2 - Py^2 = -1$ có nghiệm nguyên được xác định như sau: số nguyên dương x chỉ có thể nhận một trong P dạng $Pk + a$ với k nguyên không âm, a = 0, 1, 2, ..., P − 1. Phương trình đối Pell được viết lại là $Py^2 = (Pk + a)^2 + 1 = P^2k^2 + 2Pka + a^2 + 1$ và điều kiện cần để nó có nghiệm nguyên là $a^2 + 1$ chia hết cho P. Cái "sàng" này đã nhanh chóng chặn đứng các phương trình đối Pell còn lại trong phạm vi $P \leqslant 20$, chỉ trừ trường hợp $P = 13$ (chúng ta nhớ lại cũng với $P = 13$, phương trình Pell đã có một đột biến như thế nào). Nghĩa là với P = 3, 6, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 18, 19, 20, phương trình đối Pell không có nghiệm nguyên. Riêng với P = 13, phương trình $x^2 - 13y^2 = -1$ có thể có nghiệm nguyên $x = 13k \pm 5$. Mặc dầu vậy, ta vẫn nghi ngờ khả năng có nghiệm, và cố chứng minh nó vô nghiệm. Nhưng, lại một bất ngờ nữa, các cố gắng theo hướng đó không mang lại một kết quả nào. Phương trình có nghiệm chăng? Và sự thật khi $x = 18$ thì $y_1 = 5$. Những kết luận ấy được ghi lại trong bảng 2 và bảng 3. Chúng ta cũng thấy rằng phương trình đối Pell không có nghiệm không tầm thường.

Bảng 2. Nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình đối Pell $x^2 - Py^2 = -1$ với $P \leqslant 20$

P	$x^2 - Py^2 = -1$	x_1	y_1
2	$x^2 - 2y^2 = -1$	1	1
5	$x_2 - 5y^2 = -1$	2	1
10	$x^2 - 10y^2 = -1$	3	1
13	$x^2 - 13y^2 = -1$	18	5
17	$x^2 - 17y^2 = -1$	4	1

Bảng 3. Các phương trình đối Pell vô nghiệm (nguyên) với $P \leqslant 20$

P	$x^2 - Py^2 = -1$
3	$x^2 - 3y^2 = -1$

6	$x^2 - 6y^2 = -1$
7	$x^2 - 7y^2 = -1$
8	$x^2 - 8y^2 = -1$
11	$x^2 - 11y^2 = -1$
12	$x^2 - 12y^2 = -1$
14	$x^2 - 14y^2 = -1$
15	$x^2 - 15y^2 = -1$
18	$x^2 - 18y^2 = -1$
19	$x^2 - 19y^2 = -1$
20	$x^2 - 20y^2 = -1$

Bài toán 30.

Tìm các nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 - (ky)^2 = -1$$

với k nguyên dương.

GIẢI

Nếu k = 1, phương trình có nghiệm $x = 0$, $y = \pm 1$.

Nếu $k \geqslant 2$, phương trình không nghiệm đúng với $x = 0$, hoặc $y = 0$. Do chỉ có các lũy thừa chẵn trong phương trình, nên trước hết ta chỉ cần xét các nghiệm nguyên dương. Vì phương trình có thể viết là $(ky + x)(ky - x) = 1$ nên do $x, y > 0$ suy ra $ky + x > 0$, do đó $ky - x > 0$.

Vậy $ky + x = 1$, $ky - x = 1 \Rightarrow x = 0$. Giá trị này không thích hợp, phương trình đã cho không có nghiệm nguyên với $k \geqslant 2$.

Bài toán 31. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 - 5y^2 = 5$$

GIẢI

Điều kiện cần để phương trình có nghiệm nguyên là $x = 5k$ với k nguyên, suy ra $y^2 - 5k^2 = -1$. Đây là phương trình đối Pell mà P = 5. Dễ thấy nghiệm nguyên dương nhỏ nhất là $y_1 = 2$, $k_1 = 1$, (nên $x_1 = 5$). Nghiệm nguyên dương thứ n là y_n, k_n mà $y_n + k_n\sqrt{5} = (y_1 + k_1\sqrt{5})^{2n-1} = (2 + \sqrt{5})^{2n-1}$

Chẳng hạn, với n = 2 thì

$y_2 + k_2\sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^3 = 8 + 3.4.\sqrt{5} + 3.2.5 + 5\sqrt{5} = 38 + 17\sqrt{5} \Rightarrow y_2 = 38$, $k_2 = 17$, $(\Rightarrow x_2 = 5.17 = 85)$.

Phương trình đã cho có các nghiệm nguyên

$(x,y) = (x_n, y_n), (x_n, -y_n), (-x_n, y_n), (-x_n, -y_n)$ với $n = 1,2,3,\ldots$

Bài toán 32. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 - 8y^2 = 2$$

GIẢI

x phải là số chẵn, đặt $x = 2k$ với k là số nguyên

$\rightarrow 4k^2 - 8y^2 = 2 \rightarrow 2k^2 - 4y^2 = 1$. Phương trình vô nghiệm vì vế trái là số chẵn, vế phải là số lẻ.

Bài toán 33. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 - 3y^2 = 5$$

GIẢI

$x^2 - 2 = 3(y^2 + 1)$. Nếu $x = 3k$ với k nguyên thì phương trình vô nghiệm vì 2 không chia hết cho 3.

Nếu $x = 3k \pm 1$ phương trình đã cho trở thành

$$9k^2 + 1 \pm 6k - 2 = 3(y^2 + 1)$$

Vế phải chia hết cho 3, vế trái không chia hết cho 3 nên phương trình vô nghiệm

Bài toán 34: Chứng minh rằng phương trình

$$x^2 - 21y^2 = 340$$

có vô số nghiệm nguyên dương.

GIẢI

Dễ thấy nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình là $x_0 = 19, y_0 = 1$. Ta chứng minh bài toán tổng quát: Nếu phương trình $x^2 - Py^2 = m$ (với m nguyên khác không, P nguyên dương không chính phương) có một nghiệm nguyên dương thì sẽ có vô số nghiệm nguyên dương. Ta có:

$$x_0^2 - Py_0^2 = m$$

$$x_k^2 - Py_k^2 = 1$$

Mà x_o, y_o là một nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2 - Py^2 = m$ (tồn tại do giả thiết) và x_k, y_k, với k tự nhiên là các nghiệm (luôn có) của phương trình Pell $x^2 - Py^2 = 1$. Nhân các vế của hai phương trình chúng ta được:

$$m = (x_0^2 - Py_o^2)(x_k^2 - Py_k^2) = x_o^2x_k^2 + P^2y_o^2y_k^2 - Px_o^2y_k^2 - Py_o^2x_k^2$$

Con số thích hợp được cộng và trừ thêm vào vế phải là $2Px_ox_ky_oy_k$, khi đó ta có:

$$m = (x_ox_k \pm Py_oy_k)^2 - P(x_oy_k \pm x_ky_o)^2 = X_k^2 - PY_k^2$$

Rõ ràng $X_k = |x_ox_k \pm Py_oy_k|, Y_k = |x_oy_k \pm x_ky_o|$ là nghiệm của phương trình tổng quát

$m = x^2 - Py^2$. Vì số nghiệm x_k, y_k của phương trình Pell là vô hạn, nên số nghiệm của phương trình $x^2 - Py^2 = m$ là vô hạn. Tuy nhiên, đó không phải là tất cả các nghiệm.

Trở lại phương trình $x^2 - 21y^2 = 340$ có nghiệm nguyên dương nhỏ nhất $x_0 = 19$, $y_0 = 1$. Phương trình Pell tương ứng $x^2 - 21y^2 = 1$ có nghiệm nguyên dương nhỏ nhất $x_1 = 55$, $y_1 = 12$ (còn $x_2 = 6049$, $y_2 = 1320$) nên nghiệm $x = X_1$, $y = Y_1$ của phương trình đã cho là $X_1 = |x_0x_1 \pm Py_0y_1| = |19.55 \pm 21.1.12| \rightarrow X_1 = 793$, $X'_1 = 1297$

$Y_1 = |x_0x_1 \pm x_1y_0| = |19.12 \pm 55.1| \rightarrow Y_1 = 173$, $Y'_1 = 283$.

Chúng không chứa những nghiệm, mà bằng cách thử trực tiếp chúng ta có được là $y = 1, 3, 4, 7, 12, 19, 23....$ với các giá trị tương ứng $x = 19, 23, 26, 37, 58, 89, 107,...$ (Tất nhiên, vẫn đủ để kết luận là có vô số nghiệm).

Bài toán 35. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 - 2y^2 = 8$$

GIẢI

Không thể chỉ dựa vào lý luận chứng minh phương trình $x^2 - Py^2 = m$ có vô số nghiệm khi có một nghiệm (nguyên dương) như ở bài toán 34, vì không chỉ ra được tất cả các nghiệm.

Nhận thấy $x = 2k$ với k nguyên, nên phương trình đã cho trở thành $2k^2 - y^2 = 4$. Lại thấy y cũng phải là số chẵn 2t (với t nguyên), do đó $k^2 - 2t^2 = 2$.

Cuối cùng $k = 2m$ với m nguyên, nên

$$t^2 - 2m^2 = -1.$$

Đây là phương trình đối Pell mà nghiệm nguyên dương nhỏ nhất là $t_1 = m_1 = 1$. Các nghiệm nguyên dương khác được xác định từ đẳng thức

$$t_s + m_s\sqrt{2} = (t_1 + m_1\sqrt{2})^{2S-1} = (1 + \sqrt{2})^{2S-1}$$

với s là số nguyên dương.

Thí dụ: $t_2 + m_2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^3 = 7 + 5\sqrt{2}$.

Vậy $t_2 = 7$, $m_2 = 5$ suy ra $x_2 = 4m_2 = 20$, $y_2 = 2t_2 = 14$.
(Còn $x_1 = 4m_1 = 4$, $y_1 = 2t_1 = 2$.)

Các nghiệm nguyên của phương trình đã cho là $(x,y) = (4m_s, 2t_s), (4m_s, -2t_s), (-4m_s, 2t_s), (-4m_s, -2t_s)$.

§ 5. PHƯƠNG TRÌNH $ax^2 + by^2 = c + dxy$

Chúng ta tiến thêm một bước bằng việc đưa thêm số hạng chéo xy vào phương trình, và tìm cách giải phương trình đó trong tập hợp số nguyên.

Cách giải thứ nhất:

Xem phương trình là bậc hai đối với x, còn y là tham số: $ax^2 - dyx + by^2 - c = 0$

Điều kiện cần để phương trình có nghiệm x nguyên là biệt số $\Delta = k^2 = d^2y^2 - 4a(by^2 - c) = (d^2 - 4ab)y^2 + 4ac$ là một số chính phương, tức là k nguyên.

Xét phương trình $(d^2 - 4ab)y^2 = k^2 - 4ac$

Đặt $\lambda = d^2 - 4ab$ thì $\lambda y^2 = k^2 - 4ac$

- Nếu $\lambda = 0$, Phương trình trở thành $0.y^2 = k^2 - 4ac$

Phương trình sẽ vô nghiệm nếu $k^2 - 4ac \neq 0$ và đúng với mọi y nếu $k^2 - 4ac = 0$

- Nếu $\lambda \neq 0$ thì $y^2 = \dfrac{k^2 - 4ac}{d^2 - 4ab} = \dfrac{k^2 - 4ac}{\lambda}$

a) Đặc biệt khi $\lambda = m^2$ là một số chính phương thì $(my)^2 - k^2 = -4ac$

$$(my + k)(my - k) = -4ac$$

Chỉ cần phân tích $-4ac$ thành tích của hai số cùng chẵn, do tổng hai số $(my + k)$ và $(my - k)$ là số chẵn $2my$.

Trước khi tiếp tục *Cách giải thứ nhất* chúng ta xem xét một số bài toán.

Bài toán 36. Giải phương trình

$$3x^2 + 48y^2 = 1003 + 30xy$$

trong tập hợp số nguyên.

GIẢI

Coi phương trình là bậc hai của x :

$$3x^2 - 30yx + 48y^2 - 1003 = 0$$

thì $\Delta' = (15y)^2 - 3(48y^2 - 1003) = 81y^2 + 3009 = k^2$ phải là số chính phương để có x nguyên.

Như vậy k là số nguyên. Giới hạn trong việc xét nghiệm nguyên dương của phương trình

$$k^2 - 81y^2 = 3009$$

(vì lý do chỉ có k^2 và y^2), ta nhận thấy

$$(k + 9y)(k - 9y) = 3009 = 3.17.59.$$

(do $k, y > 0 \Rightarrow k + 9y > 0 \Rightarrow k - 9y > 0$).

Xảy ra bốn khả năng (chú ý rằng $k + 9y > k - 9y$)

$$\begin{cases} k - 9y = 1 \\ k + 9y = 3009 \end{cases} \qquad \begin{cases} k - 9y = 17 \\ k + 9y = 177 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k - 9y = 3 \\ k + 9y = 1003 \end{cases} \qquad \begin{cases} k - 9y = 51 \\ k + 9y = 59 \end{cases}$$

Nhưng không trường hợp nào cho y nguyên

Vậy bài toán vô nghiệm.

Nhưng chúng ta đã quá sa đà vào việc thực hiện các thủ thuật tính toán mà quên mất rằng: chỉ cần nhận thấy 1003 không chia hết cho 3 là đủ kết luận bài toán vô nghiệm. Đó là một bài học kinh nghiệm cần nhớ!

Bài toán 37:

Tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định

$9x^2 + 4y^2 = 15xy - 38$

GIẢI

Xem phương trình có ẩn số là x, còn y là tham số:

$$9x^2 - 15yx + 4y^2 + 38 = 0$$

Để x nguyên, điều kiện cần là $\Delta = k^2$ là số chính phương (k nguyên không âm):

$$\Delta = k^2 = (15y)^2 - 4.9.(4y^2 + 38) = 81y^2 - 1368$$

Nhận thấy phương trình $81y^2 - k^2 = 1368$ chỉ có các lũy thừa bậc chẵn nên tìm các nghiệm nguyên dương sẽ suy ra được các nghiệm còn lại (dễ thấy $y \neq 0$, $k \neq 0$). Đẳng thức có thể viết lại là

$$(9y + k)(9y - k) = 1368 = 2^3.3^2.19$$

Vì y, k > 0 nên $9y + k > 0$ suy ra $9y - k > 0$

Cần phân tích 1368 thành tích của hai số nguyên dương (có 12 khả năng). Nhưng nhận thấy $(9y + k) + (9y - k) = 18y$ nên chỉ xét hai trường hợp có tổng hai số là bội của 18 (loại mười trường hợp còn lại)

- Trường hợp 1:

$$\begin{cases} 9y + k = 114 \\ 9y - k = 12 \end{cases} \Rightarrow y = 7,\ k = 51$$

Vậy $x = \dfrac{15y \pm k}{18} = \dfrac{15.7 \pm 51}{18} = 3$ (loại nghiệm không nguyên)

Suy ra các nghiệm (x, y) = (3; 7), (−3; −7)

– Trường hợp 2:

$$\begin{cases} 9y + k = 228 \\ 9y - k = 6 \end{cases} \Rightarrow y = 13,\ k = 111$$

Vậy $x = \dfrac{15\ .\ 13 \pm 111}{18} = \dfrac{195 \pm 111}{18} = 17$

(loại nghiệm không nguyên)

Suy ra (x, y) = (17; 13); (−17; −13).

Tóm lại bài toán có bốn nghiệm

Bài toán 38: Tìm nghiệm nguyên của phương trình.

$$3x^2 - 12y^2 = -5 \pm 12xy$$

GIẢI

Bài toán vô nghiệm vì vế trái chia hết cho 3 còn vế phải không chia hết cho 3 với mọi x, y nguyên.

b) Nếu phương trình $ax^2 + by^2 = c + dxy$, với các số nguyên a, b, c, d mà có $\lambda = d^2 - 4ac$ khác 0, cũng không phải là số chính phương, nhưng nhỏ hơn 0 thì ta có cách giới hạn y trong một khoảng.

Bởi vì để tồn tại nghiệm x của phương trình bậc hai thì phải có

$$\Delta = \lambda y^2 + 4ac \geqslant 0$$

Do $\lambda < 0$ nên bất phương trình $\lambda y^2 + 4ac \geqslant 0$ hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm trong một khoảng $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$.

Bài toán 39. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$3x^2 + 2y^2 = 19 + 4xy$$

GIẢI

Phương trình được viết lại là

$$3x^2 - 4yx + 2y^2 - 19 = 0$$

Để tồn tại x thì phải có $\Delta' = -2y^2 + 57 \geqslant 0$

Suy ra $y^2 \leqslant \frac{57}{2} \Rightarrow |y| \leqslant 5{,}338$.

Vì y nguyên nên $y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$.

Để có x nguyên thì Δ' phải là số chính phương, hay chính xác hơn nữa:

$$x = \frac{2y \pm \sqrt{\Delta'}}{3} \text{ là số nguyên}$$

Chúng ta tìm được đáp số trong các trường hợp sau đây:

khi $y = \pm 2 \rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \Delta' = 49 \Rightarrow x = \frac{\pm 4 \pm 7}{3} = \mp 1$;

khi $y = \pm 4 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow \Delta' = 25 \Rightarrow x = \frac{\pm 8 \pm 5}{3} = \pm 1$

Vậy các nghiệm là (x, y) = (1; −2), (1; 4), (−1; 2), (−1; −4).

Bài toán 40. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$x^2 + 4y^2 = 4xy + 169$.

GIẢI

Phương trình bậc hai đối với x:

$$x^2 - 4yx + 4y^2 - 169 = 0$$

Có $\Delta' = 4y^2 - (4y^2 - 169) = 169$

Vậy $x = 2y \pm 13$. Phương trình có vô số nghiệm là y nguyên bất kỳ, còn $x = 2y \pm 13$. Một phương trình hiếm hoi chăng? Không phải! Chúng ta có thể tạo ra vô số phương trình như vậy. (Đó là khi $\lambda = 0$ và ac là một số chính phương), hoặc $\lambda = 0$ và bc là số chính phương. Trường hợp sau thì có nghiệm x nguyên bất kỳ).

Bài toán 41. Chứng minh phương trình

$$47x^2 + 34y^2 = 7 + 77xy$$

không có nghiệm nguyên

GIẢI

Coi là phương trình bậc hai đối với x, còn y là tham số:

$$47x^2 - 77yx + 34y^2 - 7 = 0$$

Để có x thì điều kiện cần là $\Delta \geqslant 0$

$$\Delta = (77y)^2 - 4.47.(34y^2 - 7) = -463y^2 + 1316 \geqslant 0$$

$$\Rightarrow y^2 \leqslant \frac{1316}{463} < 2,85$$

Vì y nguyên nên chỉ có thể là 0 hoặc ± 1.

Nếu $y = 0 \rightarrow 47x^2 = 7 \rightarrow x$ không nguyên

Nếu $y = 1 \Rightarrow 47x^2 - 77x + 27 = 0$. Lúc này $\Delta = 853$ không phải số chính phương nên x không phải là số nguyên.

Nếu $y = -1 \rightarrow 47x^2 + 77x + 27 = 0$ vẫn có $\Delta = 853$ nên x không nguyên.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

d) Nếu $\lambda > 0$ nhưng không phải là số chính phương thì điều kiện cần để có x nguyên là

$$\Delta = \lambda y^2 + 4ac = k^2$$

là một số chính phương. Tức là ta phải đi tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$k^2 - \lambda y^2 = 4ac$$

mà chúng ta đã biết cách giải. Tất nhiên đường lối này thường phức tạp.

Bài toán 42: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 + 3y^2 = 6xy - 6$$

GIẢI

Để phương trình bậc hai đối với x

$$x^2 - 6yx + 3y^2 + 6 = 0$$

có nghiệm x nguyên ($x = 3y \pm \sqrt{\Delta'}$) thì điều kiện cần và đủ là biệt số

$$\Delta' = (3y)^2 - (3y^2 + 6) = 6y^2 - 6 = m^2$$

phải là số chính phương, tức là m nguyên.

Rõ ràng m^2 là bội số của 6, nên m là bội số của 6, đặt $m = 6t$ với t là số nguyên, chúng ta có $6y^2 - 6 = 36t^2$ hay $y^2 - 6t^2 = 1$.

Đây là phương trình Pell với P = 6 mà nghiệm tầm thường là $t = 0$, $y = \pm 1$, và nghiệm nguyên dương nhỏ nhất là $y_1 = 5$, $t_1 = 2$. Các nghiệm nguyên dương y_k, t_k được xác định từ đẳng thức

$$y_k + t_k\sqrt{6} = (5 + 2\sqrt{6})^k$$

với k là số nguyên dương.

Vậy các nghiệm phải tìm là (x,y) = (3;1), (−3; −1),(3;5),(−3;−5), (27;5), (−27;−5),....

Bài toán 43: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$2x^2 + 3y^2 = 6xy - 6$$

GIẢI

Đưa tất cả về vế trái mà xem như một phương trình bậc hai của x :

$$2x^2 - 6yx + 3y^2 + 6 = 0$$

Để có x nguyên thì điều kiện cần là

$$\Delta' = (3y)^2 - 2(3y^2 + 6) = 3y^2 - 12 = m^2$$

là số chính phương, tức m nguyên.

Rõ ràng m^2 phải chia hết cho 3 nên m chia hết cho 3.

Đặt m = 3n với n nguyên, ta được

$$y^2 - 3n^2 = 4.$$

Dễ thấy y và n phải cùng chẵn hay cùng lẻ, do đó

$$x = \frac{3y \pm m}{2} = \frac{3y \pm 3n}{2} = \frac{3(y \pm n)}{2}$$ luôn là một số nguyên (chia hết cho 3) khi y và n nguyên

Phương trình $y^2 - 3n^2 = 4$ có nghiệm y = 2, n = 0 và nghiệm nguyên dương nhỏ nhất $y_1 = 4$, $n_1 = 2$. Khi đó các nghiệm tương ứng của phương trình đã cho là ($x = 3$, $y = 2$), ($x_1 = 3$, $y_1 = 4$), ($x'_1 = 9$, $y_1 = 4$). Tất nhiên phương trình dạng

$$ax^2 + by^2 = c + dxy$$

nếu có nghiệm (x_o , y_o) thì cũng có nghiệm ($-x_o$, $-y_o$). Dễ thấy trong bài toán này x và y cùng dấu.

Phương trình $y^2 - 3n^2 = 4$ có thể viết lại là

$$\frac{y + n\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{y - n\sqrt{3}}{2} = 1$$

Do đó các nghiệm nguyên dương y_k, n_k được xác định từ đẳng thức.

$$\frac{y_k + n_k\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{y_1 + n_1\sqrt{3}}{2}\right)^k = \left(\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}\right)^k$$

$\Rightarrow y_k + n_k\sqrt{3} = 2(2 + \sqrt{3})^k$

Với $k = 2 \rightarrow y_2 + n_2\sqrt{3} = 2(2 + \sqrt{3})^2 = 14 + 8\sqrt{3}$

Vậy $y_2 = 14$, $n_2 = 8 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}(y_2 \pm n_2) = 9;33$

Với $k = 3 \rightarrow y_3 + n_3\sqrt{3} = 2(2 + \sqrt{3})^3 = 52 + 30\sqrt{3}$

Vậy $y_3 = 52$, $n_3 = 30 \Rightarrow x_3 = \frac{3}{2}(y_3 \pm n_3) = 33;123$

....

Phương trình có vô số nghiệm vì có vô số k nguyên dương.

Cách giải thứ nhất đủ khả năng giải quyết tất cả các bài toán dạng $ax^2 + by^2 = c + dxy$. Tuy nhiên, trong một số bài toán, khi không yêu cầu tìm tất cả các nghiệm thì chúng ta có thể giải quyết theo một hướng khác, đơn giản hơn.

Cách giải thứ hai:

Lưu ý rằng a, b, c, d là các số nguyên, chúng ta nhận thấy:

-Nếu phương trình có nghiệm $x = 0$ thì $by^2 = c$, do đó c/b phải là số chính phương. Nếu c/b không chính phương thì phương trình không có nghiệm $x = 0$.

-Xét nghiệm $x \neq 0$ của phương trình. Lúc này có thể viết

$$a + b\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{c}{x^2} + d\left(\frac{y}{x}\right)$$

Đặt $\alpha = \frac{y}{x}$. Vì y và x nguyên nên α là số hữu tỷ.

Ta có

$$a + b\alpha^2 = \frac{c}{x^2} + d\alpha \rightarrow b\alpha^2 - d\alpha + a - \frac{c}{x^2} = 0$$

Điều kiện cần để phương trình bậc hai có nghiệm hữu tỉ là biệt số Δ của nó phải là bình phương của một số hữu tỉ p/q với p,q nguyên. Tức là:

$$\Delta = d^2 - 4b(a - \frac{c}{x^2}) = \frac{p^2}{q^2}$$

Rút ra $x^2 = \frac{4bcq^2}{p^2 - q^2(d^2 - 4ab)}$

Đây là động tác tách x. Rõ ràng x^2 phải là ước số chính phương của $4|bc|q^2$ nên x là ước số nguyên của $2q\sqrt{|bc|}$

Tương tự y là ước số nguyên của $2s\sqrt{|ac|}$. Việc xác định q hoặc s không phải đơn giản.

Sau đây là một số bài toán mà cách giải thứ hai cho lời giải khá gọn.

Bài toán 44: Phương trình $41x^2 - 61072y^2 = 369 + 15453xy$ có nghiệm nguyên hay không?

GIẢI

Vì a = 41, c = 369 nên $\frac{c}{a} = 9$ là số chính phương

Do đó phương trình có nghiệm y = 0, x = ±3.

Bài toán 45: Chứng minh phương trình

$$2x^2 + py^2 = 4p + pxy$$

có ít nhất ba nghiệm nguyên với mọi p nguyên tố.

• GIẢI

y là ước số nguyên của $2\sqrt{ac} = 2\sqrt{2.4p} = 4\sqrt{2p}$

nên y có thể là ± 1, ± 2, ± 4. Nếu p = 2 thì y còn có thể là ± 8.

– Nếu $y = \pm 1 \Rightarrow 2x^2 \pm px - 3p = 0 \Rightarrow \Delta = p^2 + 24p$ không chính phương nên x không nguyên.

– Nếu $y = \pm 2 \Rightarrow 2x^2 \mp 2px = 0 \Rightarrow x = 0 ; \pm p$

– Nếu $y = \pm 4 \Rightarrow x^2 \mp 2x + 6p = 0 \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow$ không có x

Tóm lại, với mọi p nguyên tố, phương trình đã cho có ít nhất bốn nghiệm nguyên $(x, y) = (0;2), (0;-2), (p;2), (-p;-2)$ thỏa mãn đầu bài.

Bài toán 46. Chứng minh phương trình

$$2x^2 - 3y^2 = 36 + 2xy$$

có ít nhất 10 nghiệm nguyên. Chỉ ra các nghiệm đó.

GIẢI

x là ước số nguyên của $2\sqrt{|bc|} = 2\sqrt{3.36} =$

$= 12\sqrt{3} \Rightarrow x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$. Chỉ cần xét các $x > 0$ vì nhận thấy nếu phương trình có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm $(-x_0, -y_0)$:

– nếu $x = 1 \Rightarrow 3y^2 + 2y + 34 = 0 \Rightarrow \Delta' < 0$, không có y

– nếu $x = 2 \Rightarrow 3y^2 + 2y + 28 = 0 \Rightarrow \Delta' < 0$, không có y,

– nếu $x = 3 \Rightarrow y^2 + 2y + 6 = 0 \Rightarrow \Delta' < 0$, không có y.

– nếu $x = 4 \Rightarrow 3y^2 + 8y + 4 = 0 \Rightarrow y = -2$. Phương trình có nghiệm $(x, y) = (4;-2), (-4; 2)$;

- nếu $x = 6 \Rightarrow y^2 + 4y - 12 = 0 \Rightarrow y = -6; 2$. Phương trình có nghiệm $(x, y) = (6;-6), (6;2), (-6;6), (-6;-2)$.

- Nếu $x = 12 \Rightarrow 3y^2 + 24y - 252 = 0 \Rightarrow y = -14; 6$.

Phương trình có nghiệm $(x, y) = (12,-14), (12;6), (-12;14), (-12;-6)$.

Ta đã liệt kê được 10 nghiệm nguyên của phương trình đã cho.

Bài toán 47. Tìm a để phương trình

$$4x^2 + 31y^2 = a + 6 - 17xy$$

có nghiệm nguyên (x, y) duy nhất.

GIẢI

Nếu phương trình có nghiệm nguyên (x_o, y_o) thì nó cũng có nghiệm $(-x_o, -y_o)$. Do đó, điều kiện cần để phương trình có nghiệm nguyên duy nhất là $x_o = -x_o$, $y_o = -y_o$, tức là $x_o = y_o = 0$ khi đó $a = -6$.

Đây cũng là điều kiện kiện đủ vì phương trình đã cho với $a = -6$ là

$$4x^2 + 31y^2 = -17xy$$

Xem phương trình là bậc hai đối với x, còn y là tham số thì $\Delta = -207y^2$. Để có x thì $\Delta > 0 \Rightarrow y = 0$. Lúc đó $4x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = 0$.

§ 6. PHƯƠNG TRÌNH $AX^2 + BY^2 + CXY + DX + EY + F = 0$

Chúng ta đã tích lũy sức mạnh để tấn công vào dinh lũy kiên cố nhất của phương trình vô định bậc hai có hai ẩn số.

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

trong đó a, b, c, d, e, f là các số nguyên.

Viết lại dưới dạng phương trình bậc hai đối với x, còn y là tham số:

$$ax^2 + (cy + d)x + by^2 + cy + f = 0$$

Điều kiện cần để có x nguyên là biệt số

$$\Delta = (cy + d)^2 - 4a(by^2 + ey + f) = k^2$$

là một số chính phương (k nguyên không âm). Để phương trình bậc hai có ẩn số $(c^2 - 4ab)y^2 + (2cd - 4ae)y + d^2 - 4af - k^2 = 0$

có nghiệm y nguyên thì điều kiện cần là biệt số δ của nó là một số chính phương m^2 (m là số nguyên không âm). Đẳng thức $\delta = m^2$ là phương trình vô định có dạng $m^2 - Ak^2 = C$ với A, C là các số nguyên mà chúng ta đã biết cách giải.

Bài toán 48. Tìm nghiệm của phương trình

$$2x^2 + 3y^2 - 5xy + 3x - 2y - 3 = 0$$

GIẢI

Xem phương trình là bậc hai đối với x:

$$2x^2 + (3 - 5y)x + 3y^2 - 2y - 3 = 0$$

Để có x nguyên thì điều kiện cần là

$$\Delta = (3 - 5y)^2 - 4.2(3y^2 - 2y - 3)$$

$$= y^2 - 14y + 33 = k^2$$

là số chính phương (k nguyên không âm).

Lại xem $y^2 - 14y + 33 - k^2 = 0$ là phương trình bậc hai đối với y. Để có y nguyên thì điều kiện cần là:

$\delta' = 49 - (33 - k^2) = 16 + k^2 = m^2$ là một số chính phương (m nguyên dương). Dễ thấy số nguyên dương $m > k \geq 0$. Vì $16 = (m + k)(m - k)$ mà $m + k > 0$ nên $m - k > 0$, tất nhiên $m + k > m - k > 0$. Nhận thấy $(m + k)$ và $(m - k)$ có tổng là số chẵn 2m nên chúng đồng thời chẵn hay lẻ. Do đó cần phân tích 16 thành tích của hai số chẵn sau đây $16 = 8.2 = 4.4$.

a) $\begin{cases} m + k = 8 \\ m - k = 2 \end{cases}$

Suy ra $m = 5$, $k = 3$. Lúc đó phương trình

$y^2 - 14y + 33 - k^2 = 0$ có nghiệm $y = 7 \pm 5 = 12; 2$

và $x = \dfrac{5y - 3 \pm k}{4} = \dfrac{5.12 - 3 \pm 3}{4} = 15$

(loại nghiệm không nguyên) khi $y = 12$;

$x = \dfrac{5.2 - 3 \pm 3}{4} = 1$ (loại nghiệm không nguyên) khi $y = 2$;

phương trình đã cho có nghiệm $(x, y) = (15;12), (1;2)$

b) $\begin{cases} m + k = 4 \\ m - k = 4 \end{cases}$

Suy ra $m = 4$, $k = 0$. Tương tự như trên, bài toán có thêm hai nghiệm $(x,y) = (13;11), (3;3)$

Bài toán 49: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$-6x^2 - 2y^2 + 6xy + 8x + 3y = 168$$

GIẢI

Viết lại dưới dạng phương trình bậc hai của x:

$$-6x^2 + 2(3y + 4)x - 2y^2 + 3y - 168 = 0$$

Xét biệt số $\Delta' = (3y + 4)^2 - (-6)(-2y^2 + 3y - 168)$

$$= -3y^2 + 42y - 152$$

$$= -3[(y-7)^2 + \frac{5}{3}] < 0$$

Phương trình không tồn tại x, vậy không thể có nghiệm nguyên.

Bài toán 50. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$1987x^2 + 1988\,y^2 = 3000 - 2x^2y^2$$

GIẢI

Dễ thấy rằng x^2 và y^2 không nghiệm đúng khi chúng cùng bằng 0, cùng bằng 1 hoặc một số bằng 0, số kia bằng 1.

Nếu $x^2 = y^2 = 1$ thì vế trái lớn hơn vế phải.

Sự sai khác càng lớn khi $|x|$ và $|y|$ tăng lên.

Vậy phương trình vô nghiệm (nguyên).

Bài toán 51. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một cặp số nguyên (x,y) cùng âm thỏa mãn đẳng thức

$$8x^2 - 7y = 100$$

GIẢI

Đặt $x^2 = X > 0 \Rightarrow 8X - 7y = 100$

$$\Rightarrow y = \frac{8X - 100}{7} = X - 14 + \frac{X-2}{7}$$

Để y nguyên, với X nguyên thì $X - 2 = 7t$ với t nguyên. Vậy $X = 7t + 2$, $y = 8t - 12$

Nhận thấy $X > 0 \Rightarrow t > -\frac{2}{7} \Rightarrow t = 0, 1, 2, \ldots$

và $y < 0 \Rightarrow t < \dfrac{12}{8} \Rightarrow t = 1, 0, -1, -2, \dots$

Do đó để tồn tại x^2 và y, t chỉ có thể là 0 hoặc 1

Nếu $t = 0 \to X = x^2 = 2$ không phải là số chính phương nên x không phải là số nguyên.

Nếu $t = 1 \to X = x^2 = 9 \to x = \pm 3$ và $y = -4$.

Vậy có một cặp số nguyên âm duy nhất

$x = -3$, $y = -4$ thỏa mãn đầu bài.

Bài toán 52. Giải phương trình

$$2x^2 + 3y^2 = 19 - 4x$$

trong tập hợp số nguyên.

GIẢI

Viết lại phương trình đã cho

$$2x^2 + 4x + 3y^2 - 19 = 0$$

và coi đó là phương trình bậc hai với x

Để phương trình có nghiệm $x = \dfrac{-2 \pm k}{2}$ là một số nguyên thì điều kiện cần (và đủ) là biệt số $\Delta' = k^2 = 4 - 2(3y^2 - 19) = 42 - 6y^2$ là số chính phương chẵn k^2 (k là số nguyên chẵn).

Như vậy $6y^2 = 42 - k^2$ nên

$$y^2 = 7 - \frac{k^2}{6} \leqslant 7$$

Từ đó suy ra số chính phương y^2 là 4, 1, 0 mà các giá trị tương ứng $k^2/6$ là 3, 6, 7. Suy ra k^2 là 18, 36, 42.

Chỉ có một giá trị thích hợp $k^2 = 36$, $y^2 = 1$.

Khi đó $x = -1 \pm 3 \rightarrow x = 2; -4$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm (x, y) là (2;1), (2;-1), (-4;1), (-4; -1)

Bài toán 53: Chứng minh rằng phương trình

$$5y^2 - 7y - 32 + 8m^2 = 0$$

không có nghiệm y nguyên âm với mọi m nguyên.

GIẢI

Nghiệm của phương trình phải có dạng

$y = \dfrac{7 \pm k}{10}$ với $k^2 = \Delta = 49 + 160(4 - m^2)$

mà k là số nguyên dương (k = 0 thì y không nguyên). Như vậy

$y = \dfrac{7 + k}{10} > 0$, còn $y = \dfrac{7 - k}{10}$

nhỏ hơn 0 khi và chỉ khi $7 - k < 0 \Leftrightarrow k > 7$.

Lúc đó $\Delta = k^2 > 49$ nên $4 - m^2 > 0 \rightarrow m^2 < 4$

Vì m nguyên nên $m^2 = 0; 1$.

Nếu $m^2 = 0$ thì $\Delta = 689$ không phải là số chính phương nên không có y nguyên.

Nếu $m^2 = 1$ thì $\Delta = 529 = 23^2 \Rightarrow y = \dfrac{7 - 23}{10}$ không nguyên. Từ đó suy ra đpcm.

Có thể dễ dàng tìm được tất cả các nghiệm nguyên là y = 3 khi $m = \pm 1$ và y = 0 khi $m = \pm 2$ bởi vì $\Delta \geqslant 0$ khi và chỉ khi

$m < \dfrac{689}{160}$, tức là $m = 0, \pm 1, \pm 2$.

Bài toán 54.

Tìm các nghiệm nguyên của phương trình

$$6x^2 - 5y^2 = -40x - 3$$

GIẢI

Viết lại: $3(2x^2 + 1) = 5(y^2 - 8x)$

Như vậy $2x^2 + 1$ chia hết cho 5. Vì $2x^2 + 1$ là số lẻ nên phải tận cùng là 5, do đó $2x^2$ tận cùng là 4, suy ra x^2 tận cùng là 2 hoặc 7. Đó là điều không thể xảy ra vì các số chính phương chỉ có thể tận cùng là 0, 1, 4, 9, 6, 5. Vậy bài toán vô nghiệm.

Bài toán 55. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 - 200xy + p = 0$$

với p là các số nguyên tố ≤ 1999.

GIẢI

a) Với p = 1999, phương trình đã cho có nghiệm nguyên $x_{1,2} = 100y \pm k$ khi và chỉ khi $k^2 = \Delta' = (100y)^2 - 1999$ là số chính phương, tức là k nguyên. Vì số mũ của y và k trong phương trình

$1999 = (100y)^2 - k^2 = (100y + k)(100y - k) = x_1x_2$ là chẵn nên trước hết xét nghiệm nguyên dương của phương trình. Do y, k > 0 nên $100y + k > 0$, do đó $100y - k > 0$. 1999 là số nguyên tố nên $100y + k = 1999$, $100y - k = 1$. Suy ra y = 10, k = 990 nên $x_1 = 1999$, $x_2 = 1$.

Phương trình có các nghiệm (x,y) = (1,10), (1999, 10), (-1,-10), (-1999, -10)

b) Với p là số nguyên tố nhỏ hơn 1999, chúng ta chứng minh kết quả tổng quát sau đây:

Phương trình đã cho vô nghiệm (nguyên) với $p = q^m$ trong đó m là số lẻ dương, còn q là số nguyên tố không có dạng 200 n − 1

Thật vậy, ta có $\Delta' = (100y)^2 - q^m = k^2$ nên

$$(100y + k)(100y - k) = q^m$$

Dễ thấy rằng nghiệm x nguyên (nếu có) là $x = 100y \pm k$. Giả sử $x_1 = 100y + k$, $x_2 = 100y - k$.

Do q nguyên tố nên $100y + k = \pm q^a$, $100y - k = \pm q^b$ với $a + b = m$, $a > b$ là các số nguyên dương. Theo định lý Vi − ét

$$x_1 + x_2 = q^a + q^b = \pm 200y$$

hay $\quad q^b(q^{a-b} + 1) = \pm 200y$ (*)

Rõ ràng $a - b = a + b - 2b = m - 2b$ là số lẻ (do m lẻ) nên

$$q^{a-b} + 1 = (q + 1)(q^{a-b-1} - q^{a-b-2} + \ldots - \ldots + 1)$$
$$= (q + 1)t.$$

t là số lẻ vì là tổng của một số lẻ $(a - b)$ các số hạng, mỗi số hạng đều lẻ. Thay vào (*)

$$q^b(q + 1)t = \pm 200y$$

Đẳng thức này không đúng vì q^b và t là các số lẻ, còn $q + 1$ không chia hết cho 200.

Trở lại bài toán của ta các số nguyên tố có dạng 200n − 1 nhỏ hơn 1999 là 199, 599, 1399:

− khi p = 199 thì (x; y) = (1,1), (199;1), (−1,−1), (−199, −1)

− khi p = 599 thì (x, y) = (1,3), (599,3), (−1,−3), (−599,−3)

− khi p = 1399 thì (x,y) = (1,7), (1399,7), (−1, −7), (−1399,−7)

Chương III

NHỮNG PHƯƠNG TRÌNH VÔ ĐỊNH

Các phương trình vô định thật đa dạng, và các cách giải chúng cũng thật là đa dạng.

§ 1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÀ BẬC HAI MỞ RỘNG

Bài toán 56. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = y^2$$

GIẢI

$$y^2 = x(x+3)(x+1)(x+2) = (x^2+3x)(x^2+3x+2)$$
$$= (x^2+3x+1-1)(x^2+3x+1+1) = (x^2+3x+1)^2 - 1$$

Trong dãy số chính phương 0, 1, 4, 9, ... chỉ có một trường hợp hiệu của hai số là 1, đó là $y^2 = 0$ và $(x^2+3x+1)^2 = 1$, tức là $y = 0$ và $x^2 + 3x + 1 = \pm 1$

$\Rightarrow x = 0, -1, -2, -3$. Các nghiệm phải tìm là

$(x,y) = (0;0), (-1;0), (-2,0), (-3,0)$

Bài toán 57. Tìm các cặp số nguyên (x,y) sao cho

$$x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$$

(Đề thi chọn vào đội tuyển thi Toán quốc tế của Việt Nam)

GIẢI

Ta biến đổi như sau:

$$y^2 = (x^2 + 8x)(x^2 + 8x + 7) = (x^2 + 8x + \frac{7}{2} - \frac{7}{2})(x^2 + 8x + \frac{7}{2} + \frac{7}{2}) = (x^2 + 8x + \frac{7}{2})^2 - (\frac{7}{2})^2$$

$$\Rightarrow 4y^2 = (2x^2 + 16x + 7)^2 - 49$$

$$\Rightarrow (2x^2 + 16x + 7 + 2y)(2x^2 + 16x + 7 - 2y) = 49$$

Hai thừa số ở vế trái là hai số nguyên lẻ cùng dấu có tích là 49. Từ đó suy ra các nghiệm $(x,y) = (0,0), (-1,0), (1,12), (1,-12), (-9,12), (-9,-12), (-8,0), (-7,0), (-4,12), (-4,-12)$

Bài toán 58: Giải phương trình

$$x(x + 8)(x + 9)(x + 1) = y^4 + 54y^2 + 713$$

trong hợp số nguyên.

GIẢI

Vế trái có thể viết là:

$$(x^2 + 9x)(x^2 + 9x + 8) = (x^2 + 9x + 4 - 4)(x^2 + 9x + 4 + 4) =$$
$$= (x^2 + 9x + 4)^2 - 16$$

Còn vế phải $y^4 + 54y^2 + 683 = (y^2 + 27)^2 - 16$.

Do đó phương trình đã cho trở thành $|x^2 + 9x + 4| = y^2 + 27$

a) Nếu $x^2 + 9x + 4 \geq 0$ (tức là $x > \frac{1}{2}$ hoặc $x < -\frac{17}{2}$) thì $x^2 + 9x + 4 = y^2 + 27$. Xem như phương trình là bậc hai đối với x còn y là tham số:

$$x^2 + 9x - y^2 - 23 = 0$$

Để có nghiệm $x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ là số nguyên thì điều kiện cần và đủ là $\Delta = 4y^2 + 173 = k^2$ là số chính phương lẻ (tức k lẻ nguyên dương)

Chỉ cần xét y nguyên dương vì phương trình đã cho nếu có nghiệm (x_o, y_o) thì cũng có nghiệm $(x_o, -y_o)$.

Do $173 = k^2 - 4y^2 = (k + 2y)(k - 2y)$ và $k + 2y > 0$ nên $k - 2y > 0$. Vì 173 là số nguyên tố nên $k + 2y = 173$, $k - 2y = 1$. Ta có $k = 87$, $y = 43$,

$$x = \frac{-9 \pm k}{2} = \frac{-9 \pm 87}{2} = -48; 39.$$

Cả hai giá trị này đều nằm trong khoảng đang xét

b) Nếu $x^2 + 9x + 4 \leq 0$ cần tìm nghiệm nguyên của phương trình $-x^2 - 9x - 4 = y^2 + 27$. Phương trình $x^2 + 9x + y^2 + 31 = 0$ vô nghiệm vì

$\Delta = -4y^2 - 43 < 0$ với mọi y.

Tóm lại, phương trình đã cho chỉ có bốn nghiệm (x, y) = (-48, 43), (-48, -43), (39, 43), (39, -43).

Bài toán 59: a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 73y - 83$$

b) Chứng minh phương trình $x(x^2 - 1)(x - 4) = 73x - 83$ không có nghiệm nguyên.

GIẢI

a) Vế trái $P = (x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$ là tích của năm số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 120. Thật vậy, trong năm số nguyên liên tiếp có ít nhất hai số chẵn, và có ít nhất một số chia hết cho 4 nên P chia hết cho 8. Trong P cũng có ít nhất một số chia hết cho 3, ít nhất một số chia hết cho 5, vậy P chia hết cho 3, P chia hết cho 5. Vì 3, 5, 8 nguyên tố cùng nhau nên P chia hết cho 3.5.8 = 120. Vậy, với x nguyên bất kỳ P = 120 t mà t là số nguyên.

Phương trình đã cho có thể viết là

$$73y - 83 = 120t$$

Suy ra $y = \frac{120t + 83}{73} = 2t + 1 + \frac{-26t + 10}{73} =$

$$= 2t + 1 + \frac{2(5 - 13t)}{73} = 2t + 1 + \frac{2(5 + 73 - 13t - 73)}{73}$$

$$= 2t + 1 + \frac{2[13(6 - t) - 73]}{73} = 2t + 1 + \frac{26(6 - t)}{73} - 2$$

$$= 2t - 1 + \frac{26(6 - t)}{73}$$

Vì (26, 73) = 1 nên để y nguyên trong khi t nguyên, phải có $6 - t = 73k$ với k nguyên. Vậy $t = 6 - 73k$ và $y = 2t - 1 + 26k = 11 - 120k$ với k nguyên bất kỳ, còn x được xác định từ đẳng thức.

$$(x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2) = 120t = 120(6 - 73k).$$

Thí dụ với k = 0 thì y = 11 và $(x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2) = 120.6 = 2.3.4.5.6$, vậy x = 4

b/ Nghiệm nguyên của phương trình

$$x(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 73x - 83 \quad (1)$$

là giá trị x = y nguyên của phương trình

$$x(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 73y - 83 \quad (2)$$

Ta đã biết x = 4 thì y = 11. Khi x tăng thì y tăng nhanh hơn nên (1) không có nghiệm nguyên lớn hơn hay bằng 4. Nếu x =

3 thì $y = (120 + 83) : 73 \approx 4,42$. Nếu $x = 2, 1, 0, -1, -2$ thì vế trái của (2) bằng 0, còn $y = 83 : 73 \approx 1,14$. Nếu $x = -3$ thì $y \approx -0,5$, nếu $x = -4$ thì $y \approx -8,7$. Lúc này y giảm nhanh hơn nên (1) không thể có nghiệm nguyên nhỏ hơn hay bằng -4. Tóm lại (1) không có nghiệm nguyên.

Bài toán 60. Chứng minh phương trình

$$x^2 + y^2 = 4m - 1 \quad (1)$$

không có nghiệm nguyên với mọi m nguyên.

GIẢI

Có thể biến đổi như sau:

$$(x + y)^2 = 4m - 1 + 2xy \quad (2)$$

Do $4m - 1$ là số lẻ nên x và y không thể cùng lẻ,

suy ra $xy = 2t$ là số chẵn (t nguyên)

Vậy $(x + y)^2 = 4(m + t) - 1$ (3)

Rõ ràng $(x + y)^2$ là số chính phương, còn $4(m + t) - 1 = 4s - 1$ không thể là số chính phương với mọi s nguyên.

Thật vậy, bình phương một số chẵn 2 k có dạng 4s, bình phương một số lẻ $(2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1$ có dạng $4s + 1$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 61. Chứng minh phương trình

$(1953x - 1988y)^2 = (x + 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 3)^2 + (x + 4)^2 + (x + 5)^2$ không có nghiệm nguyên.

GIẢI

Đặt vế trái là k^2 thì k nguyên. Vế phải rút gọn là $5(t^2 + 2)$ nếu đặt $x + 3 = t$. Đẳng thức $k^2 = 5(t^2 + 2)$ chứng tỏ k chia hết cho 5, suy ra $t^2 + 2$ cũng chia hết cho 5 nên t^2 có tận cùng là 3 hoặc 8.

Điều này không thể xảy ra vì các số chính phương chỉ có thể tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9. Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Bài toán 62: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$\frac{x^2 - 1989}{y^2} = \left(\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y}\right)\left(\frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z}\right)$$

biết $x + y + z = 0$.

GIẢI

Trước hết rút gọn vế phải $B = B_1 . B_2$

trong đó

$$B_1 = \frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} =$$

$$= \frac{x(x-y)(z-x) + y(y-z)(x-y) + z(z-x)(y-z)}{(x-y)(y-z)(z-x)},$$

$$B_2 = \frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z} = \frac{yz(y-z) + zx(z-x) + xy(x-y)}{xyz}$$

Xét B_1: cho $x = 0$, khi ấy từ $x + y + z = 0$ có $y = -z$, tử của B_1 là $T_1 = 0$. Vậy T_1 chia hết cho x. Tương tự T_1 chia hết cho y, T_1 chia hết cho z. Vậy $T_1 = \alpha xyz$. Dễ thấy α là hằng số (bằng -9) vì T_1 là hàm bậc ba.

Xét B_2: khi $x - y = 0$, $y - z = 0$, $z - x = 0$ thì tử T_2 của B_2

đều bằng 0. Ta có

$$T_2 = \beta(x - y)(y - z)(z - x) \quad (*)$$

T_2 là hàm bậc ba nên β là hằng số. Ta xác định được $\beta = -1$ khi cho x, y, z những giá trị bất kỳ đôi một khác nhau (chẳng hạn $x = 1$, $y = 2$, $z = -3$) vào đồng nhất thức (*)

$$\text{Vậy } B = B_1.B_2 = \frac{-9xyz}{(x-y)(y-z)(z-x)} \cdot \frac{-(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz}$$

$B = 9$.

Phương trình đã cho trở thành

$x^2 - 9y^2 = 1989 = 9.13.17 \Rightarrow (x - 3y)(x + 3y) = 9.13.17.$

Nếu phương trình có nghiệm (nguyên) thì phải có nghiệm nguyên dương $x > y > 0$. Khi đó $x + 3y > 0$ nên $x - 3y > 0$. Tất nhiên $x + 3y > x - 3y$. Lại thấy $(x + 3y) - (x - 3y) = 6y$ nên 1989 cần phân tích thành hai thừa số có hiệu chia hết cho 6. Nhưng 1989 chỉ có thể là tích của 1989 và 1, 221 và 9, 153 và 13, 117 và 17 không cặp nào có hiệu là bội của 6. Vậy bài toán vô nghiệm.

Bài toán 63. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương (x, y) của phương trình

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

thỏa mãn điều kiện $80 < x < 120$.

(*Đề tuyển vào lớp bồi dưỡng của Bộ Giáo dục* lập đội tuyển Việt Nam thi toán quốc tế lần thứ 16 (1974))

GIẢI

Nhận thấy phương trình có nghiệm nhỏ nhất $x_1 = 3$, $y_1 = 2$. Vì $1 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = (3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})$ nên $1 = (3 + 2\sqrt{2})^k(3 - 2\sqrt{2})^k$ với k nguyên dương.

Lại thấy rằng $(3 + 2\sqrt{2})^k = x_k + y_k\sqrt{2}$ thì

$(3 - 2\sqrt{2})^k = x_k - y_k\sqrt{2}$ với x_k, y_k nguyên dương nên

$x_2 + y_2\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^2 = 17 + 12\sqrt{2} \Rightarrow x_2 = 17, y_2 = 12$

$x_3 + y_3\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^3 = 99 + 70\sqrt{2} \Rightarrow x_3 = 99, y_3 = 70$

$x_4 + y_4\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^4 = 577 + 408\sqrt{2} \Rightarrow x_4 = 577, y_4 = 408.$

Vậy $x_3 = 99$, $y_3 = 70$ thỏa mãn đầu bài.

Cũng có thể giải theo cách sau đây: viết lại phương trình đã cho $(x - 1)(x + 1) = 2y^2$

Rõ ràng $(x - 1)$ và $(x + 1)$ là hai số chẵn liên tiếp, chỉ có ước số chung là 1 và 2.

Do đó nếu $x - 1$ có ước số nguyên tố lẻ là p thì y^2 chia hết cho $p \Rightarrow y \vdots p$ vì p nguyên tố $\Rightarrow y^2$ chia hết cho $p^2 \Rightarrow (x - 1)(x + 1)$ chia hết cho p^2. Nhưng $(x - 1)(x + 1)$ không cùng có ước số p nên $(x - 1)$ chia hết cho p^2. Tương tự đối với $(x + 1)$.

Vậy $x - 1$ và $x + 1$ là hai số chẵn liên tiếp cùng có tính chất: nếu chia hết cho số nguyên tố lẻ p thì phải chia hết cho p^2.

Trong các số chẵn từ 80 đến 120 chỉ có cặp số 80,100 có tính chất ấy.

Vậy $x - 1 = 98$, $x + 1 = 100 \Rightarrow x = 99$, $y = 70$.

Bài toán 64.

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$4[1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + x(x+1)(x+2)] + 1 = y^2$$

GIẢI

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được

$X = 1.2.3 + 2.3.4 + ... + x(x+1)(x+2) = \frac{1}{4}x(x+1)(x+2)\times$ $\times(x+3)$ (1)

Thật vậy, (1) đúng với $x = 1$.

Giả sử (1) đúng với x, ta phải chứng minh nó cũng đúng với $x + 1$, tức là từ (1) suy ra

$1.2.3 + 2.3.4 + ... + x(x+1)(x+2) + (x+1)(x+2)(x+3)$
$= \frac{1}{4}(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ (2)

Do (1), vế trái của (2) là

$T = \frac{1}{4}x(x+1)(x+2)(x+3) + (x+1)(x+2)(x+3) =$
$= (x+1)(x+2)(x+3)(\frac{1}{4}x + 1) = \frac{1}{4}(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

Vậy (2) đúng, và theo nguyên lý qui nạp (1) đúng.

Do đó $y^2 = x(x+1)(x+2)(x+3) + 1$

$= (x^2 + 3x + 1 - 1)(x^2 + 3x + 1 + 1) + 1$

$= (x^2 + 3x + 1)^2$

Vậy $x = t$ nguyên dương bất kỳ, $y = |t^2 + 3t + 1|$

Bài toán 65. Tìm các số hữu tỉ x sao cho giá trị của biểu thức $x^2 + x + 6$ là một số chính phương

(Thi chung khảo vô địch CHDC Đức – 1978).

GIẢI

Đặt $x = \frac{p}{q}$ với p, q nguyên, (p, q) = 1 và q >0.

Từ $x^2 + x + 6 = (\frac{p}{q})^2 + (\frac{p}{q}) + 6 = y^2$ với y nguyên dương.

Suy ra $p^2 = q(-p - 6q + y^2q)$

Điều đó chứng tỏ p, q có ước số chung. Vì (p,q) = 1 nên q = 1. Vậy x = p. Bài toán trở thành tìm nghiệm nguyên của phương trình $p^2 + p + 6 = y^2$

Để phương trình $p^2 + p + 6 - y^2 = 0$ có nghiệm

$p = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ nguyên thì điều kiện cần và đủ là

$\Delta = 1 - 4(6 - y^2) = k^2$

là số chính phương lẻ (k nguyên dương)

Vì $4y^2 - k^2 = (2y + k)(2y - k) = 23$ là số nguyên tố và $2y + k > 0$ ($\Rightarrow 2y - k > 0$) nên $2y + k = 23$, $2y - k = 1$.

Vậy y = 12, k = 11 nên $x = p = \frac{-1 \pm k}{2} = 5; -6$.

Bài toán 66. Chứng minh phương trình:

$$3x^2 + (1989 - 2y^n)x + 4y^{2n} + 2y^2 = 1989$$

không có nghiệm nguyên với mọi n tự nhiên.

GIẢI

Phương trình bậc hai đối với x này không có nghiệm x nguyên vì biệt số Δ không phải là số chính phương do các hệ số đều lẻ.

Thật vậy, phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ với a,b,c lẻ có nghiệm

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ là số nguyên chỉ khi

$\Delta = b^2 - 4ac = k^2$ là số chính phương lẻ. Đặt $k = b + 2m$ với m nguyên ta có $k^2 = b^2 + 4m^2 + 4bm$

Nhưng $k^2 = b^2 - 4ac$ nên $b^2 - 4ac = b^2 + 4m^2 + 4bm$

$$\Rightarrow -ac = m(m + b)$$

Đẳng thức này không thể xảy ra vì vế trái là số lẻ, vế phải là số chẵn.

Chúng ta có thể chứng minh được điều tổng quát: Phương trình đại số bậc chẵn không có nghiệm hữu tỉ nếu tất cả các hệ số đều lẻ.

Bài toán 67. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$9x^2 + 2y^2 + z^2 - 6xy - 6y + 2z + 10 = 0$$

GIẢI

Biến đổi phương trình đã cho

$$0 = (3x)^2 - 6xy + y^2 + y^2 - 6y + 9 + z^2 + 2z + 1$$
$$= (3x - y)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2$$

Vậy $3x - y = 0$, $y - 3 = 0$, $z + 1 = 0 \Rightarrow z = -1$, $y = 3$, $x = 1$

Bài toán 68. Chứng minh rằng tồn tại vô số bộ ba số tự nhiên x, y, z sao cho

$$4xy - x - y = z^2 - 1$$

(Đề dự bị thi toán Quốc tế – 1984 Ba Lan đề nghị).

GIẢI

Phương trình có vô số nghiệm $x = 1$, $y = 3k^2$, $z = 3k$ với k tự nhiên.

Cũng có thể đưa ra vô số nghiệm sau: $x = \dfrac{m(m-1)}{2}$,

$y = \dfrac{m(m+1)}{2}$, $z = m^2 - 1$ với m tự nhiên.

Bài toán 69. Chứng minh phương trình

$$4xy - x - y = Z^2$$

không có nghiệm nguyên.

GIẢI

Sử dụng định lý nhỏ Ferma với mọi p nguyên tố, a nguyên thì $a^2 - a$ chia hết cho p

(điều đó tương đương với a^{p-1} chia p dư 1, tức là $a^{p-1} \equiv 1$ (modp) với p nguyên tố, a không chia hết cho p, a nguyên)

Từ phương trình đã cho suy ra

$$(4x-1)(4y-1) = 4Z^2 + 1.$$

Gọi p là ước số nguyên tố bất kỳ của $4x - 1$ thì p cũng là ước số của $4Z^2 + 1$, vậy $4Z^2$ chia p dư -1, tức là $4Z^2 \equiv -1 \pmod p$. Theo định lý nhỏ Ferma thì $(2Z)^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ nên

$1 \equiv (2Z)^{p-1} \equiv (4Z^2)^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{(p-1)/2} \pmod p$

Suy ra $\dfrac{p-1}{2} = 2k \Rightarrow p = 4k + 1$, k nguyên dương.

Vậy, tất cả các ước số nguyên tố của $4x - 1$ đều có dạng $4k + 1$. Suy ra $4x - 1$ cũng phải có dạng $4k + 1$, nghĩa là $4x - 1 = 4k + 1 \Rightarrow 4x = 4k + 2$ (vô lý)

Trên đây là bài toán Euler đã chú ý đến trong quá trình nghiên cứu dẫn đến phát minh một định lý cơ bản trong lý thuyết số. Ông đã chứng minh được nhờ định lý nhỏ Fecma, nhưng điều đó làm ông chưa ưng ý. Nhờ gợi ý của nhà toán học Gôn Bách (Gold Bach), Euler đã đưa ra cách giải chỉ dùng kiến thức đơn giản như sau:

Giả sử phương trình có nghiệm là $x = m$, $y = n$, $z = a$ và a là số nhỏ nhất có thể có của Z. Ta viết $(4m - 1)(4n - 1) - 1 = 4a^2$ (1)

Cộng hai vế với $4(4n - 1)^2 - 8a(4n - 1)$ được

$$(4k - 1)(4n - 1) - 1 = 4(a - 4n + 1)^2 \quad (2)$$

trong đó $k = m - 2a + 4n - 1$.

So sánh (1) và (2) thấy phương trình đã cho cũng có nghiệm là $z = |a - 4n + 1|$. Vì a là số nhỏ nhất nên $a < |a - 4n + 1|$ $\Leftrightarrow a^2 < (a - 4n + 1)^2$

Suy ra, vế trái của (1) nhỏ hơn vế trái của (2), từ đó rút ra $4n - 1 > 2a$

Tương tự $4m - 1 > 2a$

Đặt $4m - 1 = 2a + b$, $4n - 1 = 2a + c$ thì b, c là các số tự nhiên. Như vậy:

$(4m - 1)(4n - 1) = 4a^2 + 2a(b + c) + bc$ (3)

So sánh (3) và (1) thấy rằng $2a(b + c) + bc = 1$: vô lí vì a, b, c là các số tự nhiên. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 70. Tìm các số n tự nhiên sao cho $n^2 + 6n + 1989$ là số chính phương.

GIẢI

Đặt $n^2 + 6n + 1989 = k^2$ thì số nguyên dương

$k > 40$ do $k^2 \geq 1 + 6 + 1989 = 1996$.

Ta có $(n^2 + 3)^2 - k^2 = -1980$

hay $\quad (n + 3 + k)(n + 3 - k) = -2^2.3^2.5.11.$

Trong hai thừa số ở vế trái, tất nhiên $n + 3 + k > 0$ còn $n + 3 - k < 0$, hơn nữa $n + 3 + k > 44$ vì $k > 40, n \geq 1$.

Tổng $(n + 3 + k) + (n + 3 - k) = 2(n + 3)$ là số chẵn nên chỉ có thể xảy ra các trường hợp sau:

$(n + 3 + k; n + 3 - k) = (990, -2), (330, -6), (198, -10), (110, -18), (90, -22), (66, -30)$ nên các giá trị n thỏa mãn đầu bài là 491, 159, 91, 43, 31, 15.

Bài toán 71: Tìm các số nguyên x để $N = 8x^2 + 8x + 1$ là số chính phương.

GIẢI

Đặt $N = y^2$ thì y là số nguyên. Cần tìm nghiệm nguyên của phương trình $8x^2 + 8x + 1 - y^2 = 0$.

Điều kiện cần để có x nguyên là $\Delta' = 16 - 8(1 - y^2) = 8 + 8y^2 = k^2$ là số chính phương.

Như vậy k^2 chia hết cho 8 nên k chia hết cho 4, đặt $k = 4t$ với t nguyên suy ra $8 + 8y^2 = 16t^2$. Vậy $y^2 - 2t^2 = -1$. Đây là phương trình đối Pell với $P = -2$ (xem chương II).

Vì $x = \dfrac{-4 \pm k}{8} = \dfrac{-4 \pm 4t}{8} = \dfrac{-1 \pm t}{2}$ nên điều kiện

cần và đủ để x nguyên là t lẻ. Ta biết phương trình đối Pell $y^2 - 2t^2 = -1$ có nghiệm nguyên dương nhỏ nhất $y_1 = t_1 = 1$, vậy $x_1 = \dfrac{-1 \pm 1}{2} = 0; -1$

Các nghiệm nguyên dương khác là x_k, y_k được xác định từ đẳng thức

$$y_k + t_k\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^{2k-1};$$

từ đó suy ra x_k.

Thí dụ:

$k = 2 \Rightarrow y_2 + t_2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^3 = 7 + 5\sqrt{3} \rightarrow t_2 = 5$

$\rightarrow x_2 = 2, -3.$

$k = 3 \rightarrow y_3 + t_3\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^5 = 41 + 29\sqrt{2} \Rightarrow t_3 = 29$

$\Rightarrow x_3 = 14, -15$

$k = 4 \rightarrow y_4 + t_4\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^7 = 239 + 169\sqrt{2} \rightarrow t_4 = 169$

$\Rightarrow x_4 = 84, -85$

Bài toán 72: Chứng minh phương trình sau không có nghiệm nguyên dương:

$$y^2 = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)$$

Giải.

Cách 1: Ở vế phải, nhóm các cặp đầu và cuối được

$$y^2 = (x^2 + 7x)(x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12)$$

$$= m(m + 6)(m + 10)(m + 12)$$

$$= (m^2 + 14m)^2 + 56m^2 + 720m$$

trong đó $m = x^2 + 7x$ là số nguyên ≥ 8.

Đặt $T_k = (m^2 + 14m + k)^2$ và xét hiệu

$$y^2 - T_k = 2m^2(28 - k) + 4m(180 - 7k) - k^2$$

Ta sẽ chứng minh rằng, với mọi x nguyên dương, y^2 luôn nằm giữa hai số chính phương liên tiếp.

– Trường hợp 1 : $x = 1 \Rightarrow m = x^2 + 7x = 8 \Rightarrow$

$$y^2 - T_k = -k^2 - 352k + 9344.$$

Vì $y^2 - T_{24} = 20 > 0$ nên $y^2 > T_{24} = (m^2 + 14m + 24)^2$

$y^2 - T_{25} = -81 < 0$ nên $y^2 < T_{25} = (m^2 + 14m + 25)^2$

Như vậy $T_{24} < y < T_{25}$ nên y^2 không phải là số chính phương.

- Trường hợp 2: $x = 2; 3 \rightarrow 18 \leqslant m \leqslant 30$. Ta có $(m^2 + 14m + 26)^2 = T_{26} < y^2 < T_{27} = (m^2 + 14m + 27)^2$, do đó y^2 không chính phương.

- Trường hợp 3: $x \geqslant 4 \Rightarrow m \geqslant 44$. $T_{27} < y^2 < T_{28}$. Vậy y^2 không chính phương.

Từ đó có điều phải chứng minh.

Cách 2: $y^2 = (x^2 + 7x)(x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 10) \times$
$\times (x^2 + 7x + 12)$
$= (M - 6) M (M + 4)(M + 6)$

trong đó $M = x^2 + 7x + 6 > 0$.

Nhận thấy y^2 là số chẵn và nó nằm giữa bình phương của hai số chẵn liên tiếp :

$(M^2 + 2M - 22)^2 < y^2 < (M^2 + 2M - 20)^2$

$(\Leftrightarrow -4M^2 + 56M + 484 < 0 < 64M + 400)$

Điều vô lí đã chứng minh bài toán.

Bài toán 73: Chứng minh rằng nếu các số nguyên dương a,b,c thỏa mãn đẳng thức

$$24 + (a + b - c)^2 =$$

$$a^2 . \frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 . \frac{(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 . \frac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}$$

thì chúng tạo thành một cấp số nhân.

GIẢI

a, b, c phải đôi một khác nhau. Vế phải P có mẫu số chung B $= (a-b)(b-c)(c-a)$ thì tử số

$A = a^2(a+b)(a+c)(c-b) + b^2(b+c)(b+a)(a-c) + c^2(c+a)(c+b)(b-a)$

Khi $a = b$ thì $A = 0$ nên A chia hết cho $(a-b)$. Vì trong A, vai trò của a, b, c như nhau nên

$A = (a-b)(b-c)(c-a)\, f(a,b,c)$

Lại thấy $A = 0$ khi $a+b+c = 0$ nên

$f(a,b,c) = (a+b+c)\, g(a,b,c)$

Vì A là hàm bậc năm nên $g(a,b,c)$ là hàm bậc nhất và a,b,c bình đẳng nên $g(a,b,c) = k(a+b+c)$.

Vậy $A = k(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)^2$

Hằng số k được xác định bằng cách cho a, b, c những giá trị tùy ý. Ta tính được $k = 1$.

Từ đó suy ra

$$P = \frac{A}{B} = (a+b+c)^2$$

Phương trình đã cho trở thành

$24 = (a+b+c)^2 - (a+b-c)^2 = 2(a+b).\,2c$

hay $(a+b)c = 6\ (= 6.1 = 3.2)$

Do a,b nguyên dương khác nhau nên $a+b \geqslant 3 \Rightarrow a+b = 6; 3$.

Nếu $a+b = 3$ thì $c = 2$. Một trong hai giá trị a hoặc b bằng 2, trùng với c, không thỏa mãn bài toán.

Nếu a + b = 6 thì c = 1, a và b chỉ có thể một số là 2, số kia là 4. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 74. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 - 38y = 23$$

GIẢI

Ta có $x^2 - 4 = 38y + 19 = 19(2y + 1)$

hay $(x + 2)(x - 2) = 19(2y + 1)$

Suy ra x lẻ. Vì 19 là số nguyên tố nên hoặc x + 2, hoặc x - 2 phải chia hết cho 19.

Nếu x + 2 = 19t (với t nguyên dương lẻ) thì

$$x = 19t - 2 \text{ và } y = \frac{x^2 - 23}{38} = \frac{(19t - 2)^2 - 23}{38} =$$

$$= \frac{19^2t^2 - 4.19t + 4 - 23}{38} = \frac{19t^2 - 4t - 1}{2}$$

Nếu x - 2 = 19t (với t nguyên dương lẻ) thì

$$x = 19t + 2 \text{ và } y = \frac{19t^2 + 4t - 1}{2}$$

Bài toán 75. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình

$$7x^2 + 13y^2 = 1820$$

(Đề thi quốc gia chọn học sinh giỏi toán lớp 9 năm học 1993 - 1994)

GIẢI

Nhận thấy 7 và 13 là các ước số của 1820 nên x^2 chia hết cho

$13 \rightarrow x$ chia hết cho 13, y^2 chia hết cho $7 \rightarrow y$ chia hết cho 7. Vậy $x = 13u$, $y = 7v$ với u, v là các số nguyên.

Từ phương trình đã cho suy ra

$$13u^2 + 7v^2 = 20$$

Không thể có $u = 0$ hoặc $v = 0$, do đó $13u^2 \geqslant 13$, $7v^2 \geqslant 7$, vì vậy $13u^2 + 7v^2 \geqslant 20$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $u^2 = v^2 = 1$. Từ đó suy ra bốn cặp nghiệm $(x, y) = (13, 7), (13, -7), (-13, 7), (-13, -7)$.

Bài toán 76: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$\left(4x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{5}{2}\right)^2$$

GIẢI

Ta có $\frac{y^2}{x^2} = \left(x^2 + \frac{5}{2} + 4x - \frac{3}{2}\right)\left(x^2 + \frac{5}{2} - 4x + \frac{3}{2}\right)$

nên $\quad y^2 = x^2(x^2 + 4x + 1)(x^2 - 4x + 4)$

$\quad y^2 = x^2[(x + 2)^2 - 3]\,(x - 2)^2$

Điều kiện cần và đủ để y nguyên là $x = 0$ hoặc $x = 2$, hoặc $(x + 2)^2 - 3 = k^2$ là một số chính phương (k nguyên dương).

Nhận thấy $3 = (x + 2 + k)(x + 2 - k)$

Vế phải là tích của hai số nguyên cùng dấu.

Xét các trường hợp có thể xảy ra, chúng ta có thêm nghiệm $x = -4$.

Do đó các nghiệm phải tìm là $(x, y) = (0, 0), (2, 0), (-4, 24), (-4, -24)$.

Bài toán 77: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$y = \frac{2x^3 - x^2 + 3x + 7}{x^2 + 1}$$

GIẢI

$$y = 2x - 1 + \frac{x + 8}{x^2 + 1}$$

Để y nguyên, với x nguyên thì điều kiện cần và đủ là $x + 8$ chia hết cho $x^2 + 1$.

Nếu $x + 8 = 0$ thì $x = -8$, $y = -17$ là một nghiệm của bài toán.

Nếu $x + 8 \neq 0$ thì điều kiện cần để $x + 8$ là bội của $x^2 + 1$ là $|x + 8| \geqslant x^2 + 1$.

$\Rightarrow (x + 8)^2 \geqslant (x^2 + 1)^2 \rightarrow (x^2 + x + 9)(-x^2 + x + 7) \geqslant 0$

$\Rightarrow -x^2 + x + 7 \geqslant 0 \rightarrow -\frac{5}{2} < \frac{1-\sqrt{29}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{29}}{2} < \frac{7}{2}$

Trong các số nguyên $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ chỉ có $x = 0$ và $x = 2$ thỏa mãn bài toán. Vậy các nghiệm phải tìm là $(x, y) = (-8, -17), (0, 7), (2, 5)$.

Bài toán 78: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$xy^2 + 2y(x - 14045) + x = 0$$

GIẢI

Nếu $y = 0$ thì $x = 0$.

Xét $y \neq 0$, phương trình có thể đưa về dạng

$$\frac{x}{y}(y + 1)^2 = 28090.$$

Điều kiện cần để $y + 1$ là số nguyên là x/y là một số nguyên.

Khi đó $(y + 1)^2$ là ước số chính phương của $28090 = 53^2.2.5$.

Vậy $(y + 1)^2$ chỉ có thể là 1 hoặc 53^2.

Nếu $(y + 1)^2 = 1$ thì $y + 1 = \pm 1 \Rightarrow y = -2$ (ta đang xét $y \neq 0$), suy ra $x = -56180$.

Nếu $(y + 1)^2 = 53^2$ thì $y + 1 = \pm 53 \Rightarrow y = 52, -54$,

suy ra $x = \dfrac{53^2.10y}{53^2} = 10y = 520, -540$.

Các nghiệm nguyên của phương trình đã cho là

$(x, y) = (0, 0), (-56180, -2), (520, 52), (-540, -54)$

Bài toán 79: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$y = \frac{13}{6}x^3 + \frac{51}{2}x^2 - \frac{5}{3}x$$

GIẢI

$$\text{Vế phải } P = 2x^3 + \frac{x^3}{6} + 25x^2 + \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{x}{3}$$

$$= 2x^3 + 25x^2 - 2x + \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{6}$$

$$= 2x^3 + 25x^2 - 2x + \frac{x(x + 1)(x + 2)}{6}$$

Dễ dàng chứng minh được tích ba số nguyên liên tiếp $x(x + 1)(x + 2)$ chia hết cho 6. Vậy bài toán có nghiệm x nguyên bất kỳ,

$$y = 2x^3 + 25x^2 - 2x + \frac{x(x + 1)(x + 2)}{6}$$

Chúng ta có thể chứng minh được rằng:

– Điều kiện cần và đủ để $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nguyên với mọi x nguyên là 6a, 2b, a + b + c, và d là các số nguyên.

– Điều kiện cần và đủ để $g(x) = ax^2 + bx + c$ nguyên với mọi x nguyên là 2a, a + b và c là những số nguyên.

§ 2. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Bài toán 80: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$z = \frac{x^2 - x + 2}{xy + 1}$$

GIẢI

Nhân hai vế với y được

$$yz = \frac{x^2y - xy + 2y}{xy + 1} = x - 1 + \frac{1 + 2y - x}{xy + 1}$$

Để yz nguyên. khi x nguyên thì điều kiện cần là hoặc $1 + 2y - x = 0$, hoặc $1 + 2y - x \geqslant xy + 1$

a) Nếu $1 + 2y - x = 0$ thì $yz = x - 1$. Suy ra $yz = 2y$ nên $z = 2$. Lúc này $y = t$ nguyên dương bất kỳ, $x = 1 + 2t$

b) Nếu $1 + 2y - x \geqslant xy + 1$ thì $2y \geqslant x(y + 1)$

hay $\quad x \leqslant \dfrac{2y}{y+1} = \dfrac{2y + 2 - 2}{y + 1} = 2 - \dfrac{2}{y+1} < 2$

Vậy x chỉ có thể là 1, khi đó $\dfrac{2}{y+1} = 1$

nên $\quad y = 1$, suy ra $z = 2$

Bài toán 81. Trên đồ thị của hàm số

$$y = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}}$$

tìm những điểm có tọa độ là các số nguyên.

GIẢI

Vì $x - 2\sqrt{x-1} = x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1} - 1)^2$ và x +

$8 - 6\sqrt{x-1} = x - 1 - 6\sqrt{x-1} + 9 = (\sqrt{x-1} - 3)^2$

nên

$$y = |\sqrt{x-1} - 1| + |\sqrt{x-1} - 3|$$
$$= |X - 1| + |X - 3| \text{ với } X = \sqrt{x-1} \geqslant 0$$

– Khi $0 \leqslant X \leqslant 1$ thì $y = 4 - 2X$. Để y nguyên thì X = 0; 1. Lúc đó y = 4; 2 và các giá trị tương ứng x = 1; 2.

– Khi $1 \leqslant X \leqslant 3$ thì $y \equiv 2$. Lúc đó $1 \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant 3$

$\Leftrightarrow 1 \leqslant x - 1 \leqslant 9 \Leftrightarrow 2 \leqslant x \leqslant 10 \Leftrightarrow x = 2, 3, 4, ..., 10.$

– Khi $X \geqslant 3$ thì $y = 2X - 4$. Để y nguyên thì điều kiện cần và đủ là X = t nguyên $\geqslant 3$. Lúc đó $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow t^2 = x - 1 \rightarrow x = 1 - t^2$, còn $y = 2t - 4$.

Tóm lại, phương trình đã cho có nghiệm

(x, y) = (1, 4), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (7, 2), (8, 2), (9, 2), (10, 2), $(1 + t^2, 2t - 4)$ với t nguyên lớn hơn 2.

Bài toán 82. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x = \sqrt{x + y\sqrt{x + y\sqrt{x + ... + y\sqrt{x + y\sqrt{(y+1)x}}}}} \quad (1)$$

GIẢI

Phương trình có nghiệm x = 0, y là số nguyên bất kỳ.

Nếu x > 0, thì $y + 1 \geqslant 0$, tức là $y \geqslant -1$. Ta xét ba trường hợp: x bằng, nhỏ hơn hoặc lớn hơn y + 1.

a) $x = y + 1 \rightarrow y = x - 1$

Khi đó $\sqrt{(y+1)x} = x \rightarrow \sqrt{x + y\sqrt{(y+1)x}} = \sqrt{x + (x-1)x} = x$, ..

(1) được nghiệm đúng. Vậy (1) có nghiệm là y = t với t nguyên $\geqslant -1$, x = t + 1.

b) $0 < x < y + 1$.

Khi đó $x^2 < (y + 1)x$ nên $x < \sqrt{(y + 1)x}$, suy ra

$yx < y\sqrt{(y + 1)x}$, và $(y + 1)x < x + y\sqrt{(y + 1)x}$, do đó:

$\sqrt{(y + 1)x} < \sqrt{x + y\sqrt{(y + 1)x}}$.

Tóm lại là từ $x < y + 1$ ta có

Vế trái $= x < \sqrt{(y + 1)x} < \sqrt{x + y\sqrt{(y + 1)x}}$

và liên tiếp suy ra

$\sqrt{x + y\sqrt{(y + 1)x}} < \sqrt{x + y\sqrt{x + y\sqrt{(y + 1)x}}} < \ldots <$ vế phải

c) Nếu $x > y + 1$ thì tương tự ta lại có :

Vế trái lớn hơn vế phải.

Vậy phương trình chỉ có nghiệm $y = t$, $x = t + 1$, với t nguyên ≥ -1

Bài toán 83. Chứng minh rằng phương trình

$$\frac{z^2}{\sqrt{7 + x}} + \frac{1}{\sqrt{y - 3}} = 2 + 2|z| - \sqrt{7 + x} - \sqrt{y - 3}$$

có vô số nghiệm nguyên.

GIẢI

Điều kiện để biểu thức có nghĩa: $x > -7$, $y > 3$.

Phương trình có thể viết lại là

$$\frac{z^2}{\sqrt{7 + x}} + \sqrt{7 + x} + \frac{1}{\sqrt{y - 3}} + \sqrt{y - 3} = 2 + 2|z| \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi thì

$$\frac{z^2}{\sqrt{7 + x}} + \sqrt{7 + x} \geq 2\sqrt{z^2} = 2|z| \quad (2)$$

và $$\frac{1}{\sqrt{y-3}} + \sqrt{y-3} \geqslant 2 \ (3)$$

Đẳng thức (1) xảy ra khi và chỉ khi đồng thời xảy ra dấu bằng ở (2) và (3), tức là

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{\sqrt{7+x}} = \sqrt{7+x} \\ \dfrac{1}{\sqrt{y-3}} = \sqrt{y-3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7+x = z^2 \\ y-3 = 1 \end{cases}$$

tức là khi $y = 4$, $z = t$ nguyên khác 0 và $x = t^2 - 7$.

Vì có vô số t nên bài toán đã cho có vô số nghiệm.

Bài toán 84. Tìm các số nguyên dương $1 \leqslant x, y, z \leqslant 9$ nghiệm đúng đẳng thức

$$\sqrt{\underbrace{\overline{x\ldots x}}_{2n} - \underbrace{\overline{y\ldots y}}_{n}} = \underbrace{\overline{z\ldots z}}_{n}$$

với mọi số n tự nhiên.

GIẢI

Đẳng thức đã cho có thể viết như sau:

$$x.\frac{10^{2n}-1}{9} - y.\frac{10^n-1}{9} = z^2 . \frac{(10^n-1)^2}{9^2}$$

hay $$9x(10^n+1) - 9y = z^2(10^n-1)$$

hay $$10^n(9x - z^2) - (9y - 9x - z^2) = 0 \ (1)$$

Xem (1) là phương trình có ẩn là n, còn x, y, z là các tham số. Nó nghiệm đúng với mọi n tự nhiên khi và chỉ khi có các hệ số $9x - z^2 = 0$ và $9y - 9x - z^2 = 0$. Ta có $z^2 = 9x$, do đó z^2 chia hết cho 9 nên z chia hết cho 3 suy ra z = 3; 6; 9 và các giá trị tương ứng x = 1; 4; 9, y = 2; 8; 16. Bài toán chỉ có hai nghiệm (x, y, z) = (1, 2, 3), (4, 8, 6).

Bài toán 85. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x + \sqrt{20y - 18} = 2y + \sqrt{12x - 22}$$

GIẢI

Ta có $x - 2y = \sqrt{12x - 22} - \sqrt{20y - 18}$. (1)

Với mọi x nguyên thì $12x - 22$ không phải là số chính phương vì nó là số chẵn nhưng không chỉ hết cho 4. Vậy $\sqrt{12x - 22}$ là số vô tỉ.

Do $x - 2y$ là số hữu tỉ (hơn nữa: là số nguyên) nên (1) xảy ra khi và chỉ khi hai vế của (1) cùng bằng 0. Tức là $x - 2y = 0$,

$$\sqrt{12x - 22} - \sqrt{20y - 18} = 0$$

Hệ phương trình $x = 2y$, $12x - 22 = 20y - 18$ cho ta nghiệm $x = 2$, $y = 1$ thỏa mãn đầu bài.

§ 3. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Bài toán 86. Tìm các bộ ba x, y nguyên, p nguyên tố thỏa mãn đẳng thức $p^x + 1 = y^2$

GIẢI

$p^x = y^2 - 1 = (y+1)(y-1)$ là số nguyên nên $x \geq 0$. Với mỗi x, ta có hai giá trị y trái dấu nên chỉ cần xét y nguyên dương. Vì p là số nguyên tố nên $(y + 1)$ và $(y - 1)$ là các lũy thừa của p.

Đặt $y - 1 = p^k$, $y + 1 = p^{k+s}$ với k, s là các số nguyên không âm.

Nhận thấy $2 = (y + 1) - (y - 1) = p^{k+s} - p^k = p^k(p^s - 1)$ ta suy ra $p = 2$, $k = 1$, $s = 1$.

Như vậy $y = 1 + p^k = 1 + 2 = 3$ và $2^x = 3^2 - 1 = 8 \rightarrow x = 3$.

Bài toán 87. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$2^x = 7y + z \quad (1)$$

GIẢI

Vế phải là số nguyên nên $x \geqslant 0$. x chỉ có thể là 3k, 3k + 1, 3k + 2 với k nguyên không âm.

a/ Xét $x = 3k$

Lúc này

$2^x = 8^k$ mà $8^k - 1 = (8 - 1)(8^{k-1} + 8^{k-2} + ... + 8 + 1) = 7m$ (2)

với m nguyên dương nên $2^x = 7m + 1$.

So sánh với (1) rút ra $7y + z = 7m + 1$.

Phương trình này nghiệm đúng với y = t nguyên bất kỳ,

$$z = 7m + 1 - 7y = 8^k - 7t.$$

Vậy (1) có nghiệm là $x = 3k$, $y = t$, $z = 8^k - 7t$ (*).

b/ Xét $x = 3k + 1$.

Từ (2) suy ra $14m = 2(8^k - 1) = 2.2^{3k} - 2 =$

$$= 2^{3k+1} - 2 = 2^x - 2.$$

Ta có $14m + 2 = 2^x$. So sánh với (1) rút ra

$7y + z = 14m + 2$. Phương trình này có nghiệm y = t nguyên bất kỳ, $z = 14m + 2 - 7y = 2^x - 7y$

$$= 2^{3k+1} - 7t = 2.8^k - 7t$$

Vậy (1) có nghiệm $x = 3k + 1$, $y = t$, $z = 2.8^k - 7t$ (**)

c) Xét $x = 3k + 2$

Từ (2) suy ra $28m = 4(8^k - 1) = 2^{3k+2} - 4 = 2^x - 4$.

Như vậy $2^x = 28m + 4$. Nhưng $2^x = 7y + z$ nên $7y + z = 28m + 4$. Phương trình nghiệm đúng với $y = t$ nguyên bất kỳ và $z = 28m + 4 - 7y = 2^{3k+2} - 7t$.

Vậy (1) có nghiệm $x = 3k + 2$, $y = t$, $z = 4.8^k - 7t$ (***)

Tóm lại, phương trình đã cho có các nghiệm (*),(**),(***) với k nguyên không âm, t nguyên.

Bài toán 88. Tìm các bộ nghiệm (x,y,z) nguyên của phương trình

$$x^2 + y^2 = 11^z.$$

GIẢI

Vì vế trái là số nguyên nên $z \geq 0$.

Nhận thấy các số $(11t + a)^2$ với t nguyên, $a = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm 5$ khi chia cho 11 có các số dư a^2 là:

0,1,4,9,16,25

Trong dãy số đó, tổng của hai số bất kỳ không chia hết cho 11. Như vậy, điều kiện cần để bài toán có nghiệm là $x = 11x_1$, $y = 11y_1$ với x_1, y_1 là các số nguyên. Khi đó $(11x_1)^2 + (11y_1)^2 = 11^z$, nên

$$x_1^2 + y_1^2 = 11^{z-2}$$

Lại thấy x_1 và y_1 là bội của 11 nên cuối cùng ta có:

$$x_m^2 + y_m^2 = 11^{z-2m}$$

mà $z - 2m$ bằng 0 hoặc 1, (m là số nguyên) còn

$$x = 11^m . x_m, \ y = 11^m . y_m$$

– Nếu $z - 2m = 1$, tức z lẻ thì $x_m^2 + y_m^2 = 11$ vô nghiệm.

– Nếu $z - 2m = 0$ tức z chẵn ($z = 2m$) thì phương trình $x_m^2 + y_m^2 = 1$. Do đó, trong hai số x_m, y_m thì một số bằng 0, số kia có trị tuyệt đối bằng 1. Vậy các bộ nghiệm $(x, y, z) = (0, \pm 11^m, 2m)$, $(\pm 11^m, 0, 2m)$ với m nguyên không âm.

Ta có thể mở rộng bài toán bằng cách thay số 11 bằng số nguyên tố lẻ p có tính chất là: Trong dãy

$$0, 1, 4, 9, 16, ..., \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

tổng hai số bất kỳ không chia hết cho p.

Bài toán 89. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$3^x + 171 = y^2$$

GIẢI

Phương trình có thể viết là

$9(3^{x-2} + 19) = y^2$, nên để y nguyên thì điều kiện cần và đủ là $3^{x-2} + 19 = z^2$ là số chính phương (z là số nguyên dương).

– Nếu $x - 2 = 2k$ là số chẵn thì

$19 = (z + 3^k)(z - 3^k)$

Do 19 là số nguyên tố nên $z + 3^k = 19$, $z - 3^k = 1$.

Ta suy ra $z = 10$, $3^k = 9$, vậy $k = 2$.

Nghiệm của phương trình đã cho là

$$x = 2k + 2 = 6, \ y = 3, \ z = 30.$$

– Nếu $x - 2$ là số lẻ thì $x = 1$ không nghiệm đúng. Thật vậy, đặt x = 2k + 1 với k nguyên dương, ta có

$$z^2 = 3^{x-2} + 19 = 3^{2k-1} - 1 + 20$$

$$= 20 + (3-1)(\underbrace{3^{2k-2} + 3^{2k-3} + ... + 3 + 1}_{2k-2})$$

$$= 20 + 2(2m + 1)$$

Nhận thấy với mọi k thì z không phải là số chính phương vì nó là số chẵn nhưng không chia hết cho 4.

Tóm lại, bài toán có một nghiệm x = 6, y = 30

Bài toán 90: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$10^x - 1 = 7y.$$

GIẢI

Vì $10^x = 1 + 7y$ là số nguyên nên $x \geqslant 0$. Nhận thấy $x = 0$, $y = 0$ thỏa mãn đầu bài.

Xét x >0. Ta có $10^x - 1 = \underbrace{\overline{9...9}}_{x}$

nên bằng cách lấy $\underbrace{\overline{9 ... 9}}_{x}$ chia cho 7 ta thấy :

số dương x nhỏ nhất thỏa mãn đầu bài là

x = 6 (khi đó y = 142857). Tức là A = 999999 : 7

Như vậy các số $\overline{A...A}$ chia hết cho 7 (và chỉ có các số đó).

Bài toán có nghiệm $y = \underbrace{\overline{BB...B}}_{n}$, trong đó B = 142857, x = 6n với n nguyên, không âm.

Cũng có thể giải theo cách sau đây:

Ta có x = 0, y = 0 là một nghiệm. Nhận thấy số x = 6 là số dương nhỏ nhất nghiệm đúng bài toán

(khi đó $y = \frac{10^6 - 1}{7} = \frac{999999}{7} = 142857$), tức là $(10^6 - 1) \vdots 7$.

Như vậy $(10^{6n} - 1) \vdots 7$ vì $10^{6n} - 1 = (10^6)^n - 1 = (10^6 - 1).M$ với M nguyên dương. Số nguyên dương x có thể viết dưới dạng $x = 6n + a$.

Ta cần tìm a nghiệm đúng bài toán.

Tất nhiên a = 0,1,2,3,4,5,6.

Có thể viết $7y = 10^x - 1 = 10^{6n+a} - 1 =$

$$= 10^a(10^{6n} - 1) + (10^a - 1)$$

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $(10^a - 1)$ chia hết cho 7.

Nhưng chúng ta đã biết, trong các giá trị a = 0,1,2,..., 6 chỉ có a = 0 thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm x = 6n,

$$y = \frac{10^{6n} - 1}{7}$$

với n nguyên không âm.

Bài toán 91. Tìm các số a_i thỏa mãn đẳng thức

$$T = a_1a_2a_3 \ldots a_n = 8.\ a_2a_3 \ldots a_na_1$$

GIẢI

Tất nhiên a_i là các số nguyên (có thể giống nhau) từ 0 tới 9. Dễ thấy rằng $a_2 = 1$ còn $a_1 = 8$ hoặc 9.

a) Xét $a_1 = 8$, ta có phép nhân

$$\begin{array}{r} 1a_3a_4 \ldots a_{n-1}a_n8 \\ \times \qquad\qquad 8 \\ \hline 8\ 1a_3 \ldots a_{n-1}a_n \end{array}$$

Thực hiện phép tính trên, đầu tiên tìm ra $a_n = 4$. Thay 4 vào a_n ở số bị nhân, tìm ra $a_{n-1} = 8$....

Cứ tiếp tục làm phép tính cho đến khi con số ở số bị nhân là số 1, và số ở kết quả là số 8. Khi đó ta được kết quả của phép tính nhân là: A = 8101265822784.

Cũng có thể thực hiện phép tính chia

$$\begin{array}{l|c} 8a_2a_3 \ldots a_{n-1}a_n & 8 \\ \hline & (a_2a_3a_4\ldots a_n\ 8) \end{array}$$

$8 : 8 = 1$, vậy $a_2 = 1$. Thay 1 vào a_2 ở số bị chia, ... cho tới khi ở thương xuất hiện số 8, và đồng thời số dư bằng 0 thì được.

b) Xét $a_1 = 9$. Thực hiện phép tính tương tự như trên, chẳng hạn phép nhân

$$\begin{array}{r} 1a_3\ a_4 \ldots a_n9 \\ \times \qquad\quad 8 \\ \hline 91a_3\ldots\ a_n \end{array}$$

sẽ được kết quả

B = 9113924050632.

Nếu các phép tính trên được tiếp tục thực hiện thì ở kết quả ta lại thu được các con số lặp lại đúng các con số ở chu kỳ A hoặc B. Do đó, các số T thỏa mãn đầu bài là

$T_1 = \underbrace{\overline{A\ldots A}}_{t}$ và $T_2 = \underbrace{\overline{B\ldots B}}_{t}$ với $t = 1,2,3,\ldots$

Bài toán 92. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$3x^{2y^2+1} + 2x^{2(y^2+1)} + x^{2y^2+3} - 4x^{2(y^2+2)} + x^{2y^2+5} + 10 = 0$$

GIẢI

Viết lại dưới dạng:

$x^{2y^2}(3x + 2x^2 + x^3 - 4x^4 + x^5) = -10$ (1) và gọi biểu thức trong ngoặc là f(x).

Vì $x^{2y^2} = (x^{y^2})^2 = (x^Y)^2$ là bình phương của số nguyên x^Y, nên nó là số nguyên và đồng thời do (1), nó là ước số chính phương của 10. Vì các ước số nguyên của ± 10 là ±10, ±5, ± 2, ± 1 nên $(x^Y)^2 = 1 \rightarrow x^Y = \pm 1$

$-$Nếu $x^Y = -1$ thì $x = -1$, Y lẻ tùy ý. Lúc đó $f(-1) = -7$ nên vế trái của (1) bằng $7 \neq -10$.

$-$Nếu $x^Y = 1$ thì: hoặc $x = 1, Y = y^2$ nguyên không âm bất kỳ, hoặc x nguyên tùy ý, còn $Y = y^2 = 0$.

Trường hợp $x = 1$ không xảy ra vì $f(1) = 3$, vế trái của (1) là $3 \neq -10$.

Trường hợp $y = 0$, lúc đó $f(x) = -10$. Rõ ràng là $x \neq 0$.

a) Xét x nguyên âm. Ta đã biết $f(-1) = -7$.

Khi $x \leq -2$ thì $f(x) = 3x + x^3 + x^5 - 2x^2(2x^2 - 1) < -10$

vì $2x^2(2x^2 - 1) \geq 8 . 7 = 56$ và $3x + x^3 + x^5 < 0$

Vậy phương trình không có nghiệm x nguyên âm.

b) Xét x nguyên dương. Ta đã biết $f(1) = 3$.

Nhận thấy $f(2) = -10$ thỏa mãn đầu bài.

Đó là giá trị duy nhất vì $f(3) = -27$ và khi $x \geq 4$ thì

$f(x) = 3x + 2x^2 + x^3 + x^4(x - 4) > 0 > -10$.

Tóm lại phương trình đã cho có một nghiệm $x = 2$, $y = 0$.

(Chúng ta cũng có thể tìm được nghiệm nguyên của phương trình $f(x) = -10$ bằng các cách khác).

Bài toán 93. Tồn tại hay không nghiệm nguyên của phương trình $31^{2x} + 12^{2x} + 1979^{2x} = y^2$

GIẢI

Nhận thấy 31, 12 và 1979 đôi một nguyên tố cùng nhau nên không thể có nghiệm $x < 0$.

Nếu $x = 0$ thì $y^2 = 3$ nên y không nguyên.

Xét $x > 0$. Khi đó vế trái là tổng của các số nguyên chính phương. Từ đẳng thức

$$(3t + a)^2 = 9t^2 + 6at + a^2$$

với t nguyên, $a = 0, \pm 1$, nhận thấy:

- Bình phương của một số chia hết cho 3 thì chia hết cho 3.
- Bình phương của một số không chia hết cho 3 thì khi chia cho 3 sẽ dư 1. Suy ra số chính phương không có dạng $3k + 2$.

Ta có 12^{2x} chia hết cho 3, 31^{2x} chia 3 dư 1, 1979^{2x} chia 3 dư 1. Vế trái của phương trình đã cho có dạng $3k + 2$ với mọi x nguyên dương nên không thể là số chính phương y^2. Vậy bài toán vô nghiệm.

Bài toán 94. Kí hiệu $n! = 1.2....n$

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$10 + 11^x + 6^x = (\sqrt{3})^{y!}$$

GIẢI

Vì $x \geq 1$ nên 11^x tận cùng là 1 và 6^x tận cùng là 6, do đó vế trái tận cùng là 7.

Vế phải $(\sqrt{3})^{y!} = 3^{1.2.3.4.5...y/2} = 3^{3.4.5...y}$

sẽ tận cùng là 1 nếu $y \geqslant 4$, vì khi đó

$$(3^4)^{3.5...y} = (81)^{3.5...y}$$

Như vậy, điều kiện cần để bài toán có nghiệm là $y \leqslant 3$.

- Xét $y = 1$: $10 + 11^x + 6^x = \sqrt{3}$

Không có x nguyên dương thỏa mãn đẳng thức này vì vế phải là số vô tỉ, vế trái là số hữu tỉ.

- Xét $y = 2$: $10 + 11^x + 6^x = (\sqrt{3})^2 = 9$

Không có x nguyên dương vì vế phải không có tận cùng là 7 (cũng có thể thấy rằng $10 + 11^x + 6^x > 9 > \sqrt{3}$ với mọi x).

- Xét $y = 3$: $10 + 11^x + 6^x = (\sqrt{3})^{2.3} = 27$

$$11^x + 6^x = 17 \rightarrow x = 1.$$

Bài toán có nghiệm duy nhất $x = 1$, $y = 3$.

Bài toán 95. Chứng minh rằng không tồn tại một số tự nhiên m sao cho $1978^m - 1$ chia hết cho $1000^m - 1$.

(Thi vô địch Liên Xô lần thứ 12 - năm 1978)

GIẢI

Xét phân thức

$$x = \frac{1978^m - 1}{1000^m - 1}$$

Ta suy ra $x - 1 = \dfrac{1978^m - 1000^m}{1000^m - 1} = \dfrac{2^m(989^m - 500^m)}{1000^m - 1}$

Nhận thấy $1000^m - 1$ là số lẻ, 2^m là số chẵn, $989^m - 500^m <$

$1000^m - 1$ với mọi m tự nhiên, nên $x - 1$ không thể là số nguyên.
Vậy x không phải là số nguyên, bài toán được chứng minh.

§ 4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

Bài toán 96.

1) Phân tích ra thừa số:

$$A = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz. (1)$$

GIẢI

1) Nhận thấy khi $x + y + z = 0$, tức là khi $x + y = -z$

thì $A = x^3 + y^3 - [x^3 + y^3 + 3xy(x + y)] + 3xy(x + y) = 0$

Vậy $A \vdots (x + y + z)$. Thực hiện phép chia A cho

$(x + y + z)$ được $A = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$$= \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$$

2) Phương trình (1) tương đương với

$$A = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{hoặc } x = y = z \\ \text{hoặc } x + y + z = 0. \end{array}\right.$$

Do đó (1) có nghiệm là:

$$\left[\begin{array}{l} x = y = z = t \\ \text{hoặc } x = u,\ y = v,\ z = -(u + v) \end{array}\right.$$

với t, u, v nguyên bất kỳ.

Bài toán 97. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^3 - y^3 = 6xy + 8.$$

GIẢI

Đây là bài toán 96 phần 2) mà x, y, z lần lượt được thay bằng x, $-y$, -2 nên có nghiệm là $x = -y = -2 \rightarrow x = -2, y = 2$ hoặc $x - y - 2 = 0 \rightarrow x = y + 2 \rightarrow y = t$ nguyên, $x = t + 2$.

Bài toán 98: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình

$$x^3 + y^3 + z^3 - xyz = x(y - z)^2 + z(x - y)^2 + y(z - x)^2$$

thỏa mãn điều kiện

$$\max(x, y, z) < x + y + z - \max(x, y, z) \quad (*)$$

GIẢI

Áp dụng hằng đẳng thức ở câu 1) bài toán 96 ta có

$$x^3 + y^3 + z^3 - xyz =$$

$$= \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] \quad (1)$$

Nhưng tù điều kiện (*) ta có:

$$\frac{1}{2}(x + y + z) > x, y, z$$

suy ra

$$\frac{1}{2}(x + y + z)(x - y)^2 \geqslant z(x - y)^2 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}(x + y + z)(y - z)^2 \geqslant x(y - z)^2 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}(x + y + z)(z - x)^2 \geqslant y(z - x)^2 \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) ta có

$$x^3 + y^3 + z^3 - xyz \geqslant z(x - y)^2 + x(y - z)^2 + y(z - x)^2 \quad (5)$$

Dấu bằng ở (5) xảy ra khi và chỉ khi đồng thời có dấu bằng ở (2), (3), (4). Vậy phương trình đã cho nghiệm đúng với $x = y = z = t$ nguyên bất kỳ.

Bài toán 99. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$8x^3 + 12x^2 + 6x + 2 = y^2$$

GIẢI

$$y^2 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 + 1 = (2x + 1)^3 + 1$$

$$\Rightarrow (2x + 1)^3 = (1 + y)(y - 1)$$

Do vế trái là số lẻ nên $1 + y$ và $y - 1$ là các số lẻ. Hơn nữa chúng là các số lẻ liên tiếp nên nguyên tố cùng nhau. Bởi vậy có thể viết $1 + y = a^3$ và $y - 1 = b^3$ với a, b là hai số lẻ liên tiếp. Lúc đó $2 = (1 + y) - (y - 1) = a^3 - b^3$. Trong dãy lập phương của các số nguyên:

$$\ldots -27, -8, -1, 0, 1, 8, 27, \ldots$$

Hiệu lập phương của hai số lẻ liên tiếp bằng 2 khi và chỉ khi $a^3 = 1$, $b^3 = -1$. Ta suy ra $y = 1 + b^3 = 0$, $(2x + 1)^3 = -1$ nên $x = -1$. Vậy $x = -1$, $y = 0$ là nghiệm duy nhất của bài toán.

Bài toán 100. Chứng minh phương trình

$$x^3 - 6x^2y + 8xy^2 - 2xy + 7x + 3 = 0$$

không có nghiệm nguyên.

GIẢI

Đặt vế trái là f(x), xem đó là hàm số của x, còn y là tham số nguyên. Giả sử phương trình có nghiệm nguyên là $x = t$. Thế thì $f(x) = (x - t)g(x)$ với g(x) là số nguyên vì có các hệ số nguyên.

Nhận thấy $f(0) = 3$ là số lẻ. Mà $f(0) = -t.g(0)$ nên t là số lẻ.

Mặt khác $f(1) = 1 - 6y^2 + 8y^2 - 2y + 7 + 3$ là số lẻ mà f(1)

$= (1 - t)g(1)$ nên $1 - t$ lẻ, suy ra t là số chẵn.

Số t không thể tồn tại. Bài toán được chứng minh.

Bài toán 101: Phương trình

$$x^3 + 3x^2 - 4x + 12 = 2(3xy + 1000)$$

có nghiệm nguyên hay không.

GIẢI

Vế trái của phương trình có thể viết lại là:

$$x^3 + 3x^2 + 2x - 6x + 12 = 12 - 6x + x(x^2 + 3x + 2) =$$

$$= 12 - 6x + x(x + 1)(x + 2).$$

Vì $x(x + 1)(x + 2)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6 (trong ba số nguyên liên tiếp ít nhất một số chẵn và một số chia hết cho 3 mà 2 và 3 nguyên tố cùng nhau).

Phương trình đã cho vô nghiệm vì với mọi x, y nguyên vế trái chia hết cho 6 còn vế phải không chia hết cho 6.

Bài toán 102: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$4x + 1 = y^3 + 8y$$

GIẢI

Ta có $4(x - 2y) = y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1)$

Nhận thấy $y^2 + y + 1 = y(y + 1) + 1$ là số lẻ nên để $x - 2y$ là số nguyên, điều kiện cần và đủ là $y - 1 = 4t$ với t nguyên. Vậy $y = 4t + 1$.

Lúc đó $4x = y^3 + 8y - 1 = (4t + 1)^3 + 8(4t + 1) - 1$

$$= 16t^3 + 12t^2 + 11t + 2.$$

Bài toán 103. Giải phương trình sau với nghiệm nguyên:

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1)$$

(Thi vô địch Ba Lan - 1981)

GIẢI

Nhận thấy x và y phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Nếu $x = y$ thì phương trình trở thành

$$x^3 - 6x^2 - 2 = 0$$

Nghiệm nguyên của nó (nếu có) phải là ± 1, ± 2 (ước số nguyên của -2). Nhưng không giá trị nào nghiệm đúng.

Vậy $x \neq y$.

Do x, y cùng tính chẵn, lẻ nên $|x - y| \geq 2$ suy ra

$$(x - y)^2 \geq 4, \text{ vậy } x^2 + y^2 \geq 4 + 2xy.$$

Ta có $x^2 + y^2 \geq |2 + 2xy|$ (1), bởi vì

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 + 2xy > |2 + 2xy| \text{ nếu } 2 + 2xy \geq 0 \\ x^2 + y^2 > |2 + 2xy| = -2 - 2xy \ (x - y)^2 \Leftrightarrow (x + y)^2 > -2 \\ \qquad \text{nếu } |2 + 2xy| \leq 2. \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$(x^2 + y^2)(x + y) = 8(x^2 + y^2) + 8(xy + 1) \Leftrightarrow$

$(x^2 + y^2)(x + y - 8) = 8xy + 8$ (2)

Ta có phương trình hệ quả:

$$|x^2 + y^2| \,.\, |x + y - 8| = 4|2xy + 2|$$

Do (1) nên $|x + y - 8| < 4$

$$\Rightarrow 4 < x + y < 12$$

Vì $x + y$ là số chẵn nên nó chỉ có thể là 6, 8 hoặc 10. Với $x + y$ bằng 6 hay 8 thì (2) không có nghiệm nguyên.

Khi $x + y = 10$: thay vào (2) được $xy = 14$. Vậy x và y là hai nghiệm của phương trình

$$z^2 - 10z + 16 = 0$$

Giải được $z_{1,2} = 2; 8$ suy ra $(x, y) = (2, 8); (8, 2)$.

§ 5. PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4

Bài toán 104. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$xyz = 10(x + y + z) \quad (1)$$

GIẢI

Xét nghiệm nguyên dương của phương trình

$$xyz = t(x + y + z) \quad (1')$$

Vì x, y, z bình đẳng nên có thể giải thiết

$$x \geqslant y \geqslant z > 0 \quad (2)$$

(1') suy ra $xyz = tx + t(y + z)$ hay

$$x(yz - t) = t(y + z) \quad (3)$$

Vì vế phải của (3) là số dương và $x > 0$ nên $yz - t > 0$ hay $y > t/z$ (4).

Như vậy $x = \dfrac{t(y + z)}{yz - t} \geqslant z$ (5)

suy ra $t(y + z) \geqslant yz^2 - tz$ nên $y(z^2 - t) \leqslant 2tz$ (6)

– Nếu $z^2 - t \leqslant 0$, tức $z^2 < t$ thì (6) đúng

– Nếu $z^2 - t > 0$ thì (6) $\Leftrightarrow y \leqslant \dfrac{2tz}{z^2 - t}$ (7)

suy ra $z \leqslant \dfrac{2tz}{z^2 - t}$ hay $1 \leqslant \dfrac{2t}{z^2 - t}$ hay $z \leqslant \sqrt{3t}$ (8)

Từ (5) và do $x \geqslant y$ ta có $zy^2 - 2ty - tz \leqslant 0$

nên suy ra $y \leqslant \dfrac{t + \sqrt{t^2 + tz^2}}{z}$ hay $yz \leqslant t + \sqrt{t^2 + tz^2}$

Do (8) nên $yz \leqslant t + 2t = 3t$ (9)

Lần lượt dựa vào (8), (9), (4), (2), (5) ta tìm được nghiệm của (1')

Chẳng hạn, với $t = 10$ ta có phương trình đầu bài.

Khi đó $z \leqslant \sqrt{30} \Rightarrow z \leqslant 5$

- Với $z = 5 \Rightarrow 5 = z \leqslant y \leqslant \dfrac{3t}{z} = \dfrac{30}{5} = 6 \Rightarrow y = 5; 6$ nhưng x không nguyên

- Với $z = 4 \Rightarrow 4 = z \leqslant y \leqslant \dfrac{30}{4} \Rightarrow y = 4,5,6,7$. Chỉ có x nguyên (bằng 9) khi $y = 5$.

- Với $z = 3 \rightarrow \dfrac{10}{3} = \dfrac{t}{z} < y \leqslant \dfrac{30}{3} = 10 \Rightarrow y = 4,5,\dots, 10$. Có nghiệm $(x, y) = (35, 4), (16, 5)$

- Với $z = 2 \Rightarrow \dfrac{10}{2} = \dfrac{t}{z} < y \leqslant \dfrac{30}{2} = 15 \Rightarrow y = 6, 7, 8,\dots,15$

Có nghiệm $(x, y) = (40,6), (12,10)$.

- Với $z = 1 \Rightarrow 10 = \dfrac{t}{z} < y \leqslant 30 \Rightarrow y = 11,12,\dots,30$

Lúc này $x = \dfrac{10(y + 1)}{y - 10} = \dfrac{10y + 10 - 100 + 100}{y - 10} = 10 + \dfrac{110}{y - 10}$

$\Rightarrow y - 10 = 110, 11, 10, 2, 5, 1, 22, 55 \Rightarrow$

$y = 120, 21, 20, 12, 15, 11, 32, 65$. Chỉ xét các giá trị y trong khoảng 11 tới 30, chúng ta có bốn nghiệm $(x, y) = (21,20), (65, 12), (32,15), (120,11)$

Tất cả các nghiệm của (1) là những nghiệm đã tìm được mà trong mỗi bộ nghiệm thì x, y, z lấy những giá trị tùy ý.

Bài toán 105: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyzt \quad (1)$$

GIẢI

Nếu một trong các thừa số ở vế phải bằng 0 thì vế trái bằng 0, nên $x = y = z = 0$, t nguyên bất kỳ là nghiệm của (1).

Xét $x, y, z, t \neq 0$. Điều kiện cần để có (1) là số giá trị âm trong mỗi bộ nghiệm phải là 4, 2 hoặc 0. Nếu (1) có nghiệm âm $-x_o, -y_o, -z_o, -t_o$ thì nó cũng có nghiệm x_0, y_o, z_o, t_o. Hoặc nếu có nghiệm $x_o, y_o, -z_o, -t_o$ hay $x_o, -y_o, -z_o, t_o, \ldots$ thì nó cũng có nghiệm x_o, y_o, z_o, t_o. Vì vậy chúng ta chỉ cần tìm nghiệm của (1) trong tập hợp số nguyên dương rồi suy ra tất cả (bằng cách cho hai hoặc cả bốn giá trị trong mỗi bộ nghiệm đổi dấu).

Giả sử x, y, z, t nguyên dương nghiệm đúng (1), ta có thể xem x như nghiệm của phương trình bậc hai

$$X^2 - yztX + y^2 + z^2 = 0 \quad (2)$$

Như vậy $X = \dfrac{yzt \pm k}{2}$ với $k^2 = \Delta = (yzt)^2 - 4(y^2 + z^2) \geqslant 0$

(k nguyên không âm).

Thành thử, ứng với mỗi bộ y, z, t cố định ta có hai giá trị x thỏa mãn đầu bài là x và x' mà

$$x = \frac{yzt - k}{2} \leqslant x' = \frac{yzt + k}{2} \quad (3)$$

Điều đó cũng xảy ra tương tự đối với y hay z.

Tuy nhiên, không thể đồng thời có $x^2, y^2, z^2 \geqslant xyzt/2$, vì lúc đó vế trái của (1) không nhỏ hơn $\frac{3}{2}xyzt$.

Nhưng tồn tại $x^2, y^2, z^2 \leqslant \frac{xyzt}{2}$, chẳng hạn như $x = y = z = 1$, $t = 3$.

Xét một bộ x, y, z như vậy ($x \leqslant \frac{yzt}{2}$, $y \leqslant \frac{xzt}{2}$, $z \leqslant \frac{xyt}{2}$).

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geqslant y \geqslant z > 0$.

(1) có thể viết lại là

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x.\frac{yzt}{2} + \left(\frac{yzt}{2}\right)^2 = \left(\frac{yzt}{2}\right)^2$$

hay $\quad y^2 + z^2 + \left(\frac{yzt}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{yzt}{2}\right)^2$ (4)

Từ (4) suy ra $y^2 + z^2 + \left(\frac{yzt}{2} - y\right)^2 \geqslant \left(\frac{yzt}{2}\right)^2$ (5)

bởi vì $\frac{yzt}{2} - y \geqslant \frac{yzt}{2} - x \geqslant 0 \Leftrightarrow (y \leqslant x)$.

Khi đó $y^2 + z^2 + \left(\frac{yzt}{2}\right)^2 + y^2 - y^2zt \geqslant \left(\frac{yzt}{2}\right)^2$ nên

$2y^2 + z^2 \geqslant y^2zt$, suy ra $3y^2 \geqslant y^2zt$ (vì $y \geqslant z > 0$).

Vậy $3 \geqslant zt \rightarrow t = 1, 2, 3$.

a) Khi $t = 2$ thì $zt = 2$ nên (1) trở thành

$x^2 + y^2 + 1 = 2xy \rightarrow (x - y)^2 = -1$, vô lí. Trường hợp này không xảy ra.

b) Xét $t = 3$:

Do vai trò x, y, z là như nhau, chúng ta sẽ đi tìm toàn bộ các nghiệm nguyên dương mà không cần phân biệt giá trị nào là x, y, z.

Từ nhận xét (3), nếu x, y, z (không cần theo thứ tự) là a, b, c thì ta sẽ có nghiệm khác (a', b, c) mà $a' = 3bc - a$. Sơ đồ tìm nghiệm như sau:

$$(1,1,1) \rightarrow (1,1,3.1.1.-1 = 2) \rightarrow$$

$\rightarrow (2,1,3.2.1 - 1 = 5) \rightarrow$

- $5,2,3.5.2 - 1 = 29 \rightarrow$
  - $29,2,3.29.\ 2 - 5 = 169 \rightarrow$
  - $29,5,3.2.9.5 - 2 = 433 \rightarrow ..$
- $5,1,3.5.1 - 2 = 13 \rightarrow$
  - $13,5,3.13.5 - 1 = 194 \rightarrow ...$
  - $13,1,3.13.1 - 5 = 34 \rightarrow ...$

c/ Xét $t = 1$:

Nhận thấy có một song ánh giữa nghiệm có $t = 3$ và $t = 1$. Nếu $(x, y, z, 3)$ là một nghiệm, tức là $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ thì $(3x)^2 + (3y)^2 + (3z)^2 = 1(3x)(3y)(3z)$ nên $(3x,3y,3z,1)$ cũng là nghiệm.

Mặt khác, với $t = 1$ thì nghiệm nguyên dương nhỏ nhất là $x = y = z = 3$. Lại cố định hai số, số còn lại được thay bằng $a' = bc - a' = 3.3 - 3 = 6$ thì dễ thấy rằng x, y, z là bội của 3. Suy ra nếu $(3x, 3y, 3z, 1)$ là nghiệm, tức là $(3x)^2 + (3y)^2 + (3z)^2 = 1(3x)(3y)(3z)$ hay $3^2(x^2 + y^2 + z^2) = 27xyz$ hay $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ thì $(x, y, z, 3)$ cũng là nghiệm.

Tóm lại, từ các nghiệm $(x,y,z, t) = (x_o, y_o, z_o, 3)$ ta có nghiệm $(3x_o, 3y_o, 3z_o, 1)$ cùng với các hoán vị và đổi dấu hai hoặc cả bốn giá trị x, y, z, t ta được mọi nghiệm không tầm thường của (1) trong tập hợp số nguyên.

Bài toán 106. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$(x^2 + y^2)^2 = 8x^2y^2 + 4xy + 1$$

GIẢI

Nếu $x = 0$ thì $y = \pm 1$. Nếu $y = 0$ thì $x = \pm 1$

Đó là các nghiệm của bài toán.

Xét x, y $\neq 0$. Nếu phương trình có nghiệm (x_o, y_o) thì cũng có nghiệm $(-x_o, -y_o)$. Viết lại phương trình đã cho: $(x^2 - y^2)^2 = (2xy + 1)^2$

Khi đó $x^2 - y^2 = \pm 2xy \pm 1$.

Coi là phương trình bậc hai đối với x. Để có nghiệm $x = y \pm \sqrt{\Delta'}$ thì điều kiện cần (và đủ) là $\Delta' = 2y^2 \pm 1 = m^2$ là số chính phương (m nguyên). Phương trình $m^2 - 2y^2 = 1$ là phương trình Pell có nghiệm nguyên dương nhỏ nhất $m_1 = 3$, $y_1 = 2$; các nghiệm nguyên dương khác (m_k, y_k) được xác định từ đẳng thức

$$m_k + y_k\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^k$$

Còn phương trình $m^2 - 2y^2 = -1$ là phương trình đối Pell có nghiệm nguyên dương nhỏ nhất $m_o = 1$, $y_o = 1$ và các nghiệm nguyên dương khác (m_s, y_s) được xác định từ đẳng thức

$$m_s + y_s\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^{2s-1}$$

Từ đó ta được (x_k, y_k) hoặc (x_s, y_s) và suy ra các nghiệm nguyên của phương trình đã cho.

Bài toán 107.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$y^4 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

GIẢI

Xét ba trường hợp

+ $x = 0$ thì $y = \pm 1$

+ $x \geqslant 1$, nguyên : $x^4 < y^4 < (x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$, suy ra y không thể là số nguyên .

+ $x \leqslant -1$, nguyên: đặt $x = -1 - t$ thì $t \geqslant 0$.

Phương trình đã cho trở thành

$$y^4 = (1+t)^4 - 2(1+t)^3 + 3(1+t)^2 - 3(1+t) + 1$$

Nhận thấy $t^4 \leqslant y^4 = t^4 + 2t^3 + 3t^2 + t < (t+1)^4$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$2t^3 + 3t^2 + t = 0$$

Suy ra $t = 0, -1, -\dfrac{1}{2}$; chỉ có $t = 0$ thuộc khoảng đang xét, lúc đó $x = -1$, $y = 0$

Bài toán 108. Tìm các bộ ba: x , y nguyên, Z nguyên tố thỏa mãn đẳng thức

$$x^4 + 4y^4 = Z.$$

GIẢI

Không thể có $x = 0$ hoặc $y = 0$ vì lúc đó z không phải là số nguyên tố. Vì chỉ có lũy thừa bậc chẵn của x và y trong đẳng thức nên trước hết ta xét x, y nguyên dương.

$$\begin{aligned}\text{Khi đó } Z &= x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy) \\ &= [(x-y)^2 + y^2]\,[(x+y)^2 + y^2]\end{aligned}$$

Để Z là số nguyên tố, điều kiện cần là $(x-y)^2 + y^2 = 1$ vì thừa số còn lại luôn lớn hơn 1 (do $y \geqslant 1$). Suy ra $x = y = 1$, $Z = 5$. Đổi dấu một hoặc cả hai giá trị x, y ta được mọi nghiệm phải tìm.

Bài toán 109. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$(2x+1)^2 - 1 = \frac{384\,y}{(2x-1)^2 - 1}$$

GIẢI

Suy ra $384y = (4x^2 + 4x)(4x^2 - 4x)$

hay $24y = x^2 (x - 1)(x + 1)$

–Nếu x lẻ thì $(x - 1)(x + 1)$ là hai số chẵn liên tiếp, nên có một số chia hết cho 4, nên $(x + 1)(x - 1) \vdots 8$.

Trong ba số x, $(x - 1)$, $(x + 1)$ có một số chia hết cho 3. Vậy $x^2 (x - 1)(x + 1) = 24 t$ với t nguyên vì $(8,3) = 1$. Phương trình đã cho có nghiệm $x = 2k + 1$, $y = (1/6) k (k + 1)(2k + 1)^2$, k nguyên.

–Nếu x chẵn thì $(x - 1)$, $(x + 1)$ là các số lẻ.

Trong ba số x, $(x - 1)$, $(x + 1)$ có một số chia hết cho 3. Điều kiện để phương trình có nghiệm là $x^2 \vdots 8$, suy ra $x \vdots 4$. Do đó bài toán có nghiệm $x = 4k$, $y = (1/6)k (4k - 1) 4k (4k + 1)$.

Bài toán 110. Có hay không các số nguyên tố x, y, z thỏa mãn phương trình

$$x^2 + y^3 = z^4$$

(Thi vô địch Liên Xô lần thứ 14 – 1980)

GIẢI

Không thể có ba số cùng lẻ, tức là ít nhất một số bằng 2.

–Giả sử $z = 2$: khi đó $x^2 + y^3 = 16 \rightarrow$ y chỉ có thể là 2, nên $x^2 = 8$; vô lí (x không nguyên)

–Giả sử $y = 2$: ta có $8 = (z^2 + x)(z^2 - x)$. Vì $z^2 + x > 0$ nên $z^2 - 8 > 0$. Tổng $(z^2 + x) + (z^2 - x) = 2z^2$ phải là số chẵn nên phân tích $8 = 4.2$, nhưng $4 + 2 = 2z^2$; vô lí (z không nguyên)

– Giả sử $x = 2$: khi đó $y^3 = (z^2 + 2)(z^2 - 2)$

Do $(z^2 + 2) - (z^2 - 2) = 4$ nên $z^2 + 2$ và $z^2 - 2$ chỉ có ước số nguyên tố là 2 (tức là $y = 2$)

hoặc $z^2 - 2 = 1$. Trường hợp sau không xảy ra còn nếu $y = 2$, khi đã có $x = 2$ thì z phải chẵn.

Vì z nguyên tố nên $z = 2$. Trường hợp này không nghiệm đúng dẳng thức đã cho.

Bài toán vô nghiệm.

Bài toán 111: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$8x^4 - 4y^4 + 2z^4 = t^4 \quad (1)$$

GIẢI

Giả sử phương trình có nghiệm nguyên (x, y, z, t) thì $t = 2t_o$ phải chẵn, tức là t_o nguyên.

Thay vào (1) được $4x^4 - 2y^4 + z^4 = 8t_o^4$

Tương tự như trên, lại phải có $z = 2z_o$ chẵn nên

$$2x^4 - y^4 + 8z_o^4 = 4t_o^4$$

Lại phải có $y = 2y_o$ chẵn nên

$$x^4 - 8y_o^4 + 4z_o^4 = 2t_o^4$$

Lại phải có $x = 2x_o$ chẵn nên $8x_o^4 - 4y_o^4 + 2z_o^4 = t_o^4$

So sánh với (1) ta thấy (x_o, y_o, z_o, t_o) cũng là nghiệm,

mà $x_o = \dfrac{x}{2}$, $y_o = \dfrac{y}{2}$, $z_o = \dfrac{z}{2}$, $t_o = \dfrac{t}{2}$.

Cứ tiếp tục như vậy ta thấy x, y, z, t chia hết cho 2^n với n là số tự nhiên tùy ý. Số đó, hoặc phải lớn vô cùng, hoặc bằng 0. Nhưng không có số lớn vô cùng nên phương trình có nghiệm nguyên duy nhất là $x = y = z = t = 0$

§ 6. PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

Bài toán 112. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^{53} + y^{53} = 53Z.$$

GIẢI

Vì Z là số nguyên nên $x^{53} + y^{53}$ chia hết cho 53.

Nhận thấy 53 là số nguyên tố nên theo định lý nhỏ Ferma thì

$x^{53} - x$ chia hết cho 53, $y^{53} - y$ chia hết cho 53.

Phương trình đã cho có thể viết lại là

$$53Z = (x^{53} - x) + (y^{53} - y) + (x + y)$$

Nó có nghiệm khi và chỉ khi $x + y = 53t$ với t là số nguyên.

Vậy bài toán có nghiệm là $x = u$ nguyên bất kỳ, $y = 53t - u$ và

$$Z = \frac{u^{53} + (53t - u)^{53}}{53} = t\,[u^{52} - u^{51}(53t - u) + u^{50}(53t - u)^2 -$$

$$- u^{49}(53t - u)^3 + \ldots - \ldots + (53t - u)^{52}$$

Bài toán 113. Tồn tại hay không nghiệm nguyên của phương trình

$$x^{12} + y^{12} + Z^{12} = 2(19^{1953} + 88^{1953})$$

GIẢI

Ta có

$19^{1953} = (9.2 + 1)^{1953} = 9a + 1$

$88^{1953} = (9.9 + 7)^{1953} = 9b + 7^{1953}$

$7^{1953} = 7^{3.651} = (38.9 + 1)^{651} = 9c + 1$

Vậy vế phải phương trình đã cho có dạng

$$2(9a + 1 + 9b + 9c + 1) = 9M + 4$$

Xét số nguyên bất kỳ n. Ta có thể viết $n = 9k + a$ với $a = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$.

Nhận thấy $n^3 = (9k + a)^3$ mà $a^3 = 0, \pm 1, \pm 8, \pm 27, \pm 64$ nên a^3 chia cho 9 có số dư là $0, \pm 1$.

Suy ra, vế trái của phương trình đã cho là tổng của $(x^4)^3$, $(y^4)^3$, $(z^4)^3$ chỉ có thể nhận một trong các dạng $9s$, $9s \pm 1$, $9s \pm 2$, $9s \pm 3$ mà không thể có dạng $9s + 4$. Vậy bài toán vô nghiệm.

Bài toán 114. Tìm nghiệm nguyên (x, y, z, t) của phương trình

$$(x-y)^{1995} + (y-z)^{1995} + (z-x)^{1995} = t(x-y)(y-z)(z-x)$$

GIẢI

Ta xét phương trình tổng quát

$$(x-y)^k + (y-z)^k + (z-x)^k = t(x-y)(y-z)(z-x) \quad (1)$$

mà k là số nguyên dương. Đặt vế trái của (1) là A. (1) chứng tỏ $A \vdots (x-y)$. Có nghĩa là khi $x - y = 0$ thì $A = 0$.

Thay $x = y$ vào A được $0 = A = (y-z)^k + (z-y)^k$ (2)

– Nếu k chẵn thì $y = z$. Đem $x = y = z$ vào (1) thì ta nhận thấy (1) có nghiệm là $x = y = z$ nguyên tùy ý, t nguyên tùy ý, k nguyên dương dù chẵn hay lẻ.

– Nếu k lẻ: $A = (y-z)^k - (y-z)^k \equiv 0$. Điều đó có nghĩa là $A \vdots (x-y)$ khi k lẻ. Vì trong A, vai trò của x, y, z như nhau nên suy ra A chia hết cho $B = (x-y)(y-z)(z-x)$. Vậy (1) còn có nghiệm là k lẻ, x, y, z là những số nguyên bất kỳ, $t = A/B$.

Trở lại bài toán đã cho: với $k = 1995$, nghiệm của phương trình là

$x = u$, $y = u$, $z = u$ nguyên, t nguyên tùy ý.

hoặc x, y, z là các số nguyên bất kỳ, $t = \frac{A}{B}$.

Bài toán 115. Chứng minh rằng phương trình

$$(x-y)^k + (y-z)^k + (z-x)^k = ku$$

có vô số nghiệm nguyên x, y, z, u khi k là số nguyên tố.

GIẢI

Đặt vế trái của phương trình đã cho là A thì

$$A = [(x-y)^k - (x-y)] + [(y-z)^k - (y-z)] + [(z-x)^k - (z-x)]$$

Theo định lý nhỏ Ferma: mỗi số hạng trong móc vuông đều chia hết cho k. Từ đó suy ra điều phải chứng minh (nghiệm là x, y, z nguyên bất kỳ và suy ra u nguyên tương ứng).

Từ bài toán 114 và 115 chúng ta thấy rằng: Phương trình.

$$(x-y)^k + (y-x)^k + (z-x)^k = kt(x-y)(y-z)(z-x)$$

nghiệm đúng với x, y, z, t nguyên bất kỳ, k nguyên tố lẻ.

§ 7. PHƯƠNG TRÌNH CĂN ĐỒNG DẠNG

Trong một kỳ thi chọn học sinh giỏi ở Liên Xô có bài toán sau đây:

Bài toán 116. Phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}$

có bao nhiêu nghiệm trong các số nguyên?

GIẢI

Trước hết ta đưa ra lời giải của đáp án:

Từ phương trình đã cho ta có $x = 1960 + y - 28\sqrt{10y}$.

Với x, y nguyên suy ra $28\sqrt{10y}$ nguyên(vì bình phương của một phân số tối giản không thể nguyên). Vậy $10y = k^2$, từ đó y $= 10t^2$. Tương tự chứng minh được $x = 10s^2$. Khi đó từ phương trình đã cho có $|t| + |s| = 14$. Vậy với số nguyên $|t|$ ta có 15 giá trị có thể có t = 0, 1,2,..., 14. Phương trình đã cho có 15 nghiệm.

Nếu để ý rằng $\sqrt{1960} = 14\sqrt{10}$ là một số vô tỉ chúng ta sẽ có lời giải đẹp hơn nhiều. Vế trái cần phải là căn thức đồng dạng với $\sqrt{10}$, tức là $\sqrt{x} = a\sqrt{10}$, $\sqrt{y} = \sqrt{10}$ với a, b nguyên không âm thỏa mãn đẳng thức a + b = 14.

Có 15 giá trị a = 0, 1,..., 14 nên bài toán có 15 nghiệm.

Như vậy không nên "tránh" số vô tỉ và chỉ thích "làm việc" với các số nguyên ngay cả trong những bài toán tìm nghiệm nguyên.

Ta gặp lại dạng toán đó ở một kỳ thi chọn học sinh giỏi để lập đội tuyển Việt Nam đi thi toán quốc tế.

Bài toán 117. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho với $x < y$:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980}$$

GIẢI

Chúng ta sẽ không thực hiện phép bình phương, cũng như sẽ không tiến hành một phép thế nào vì nhận thấy $\sqrt{1980} = 6\sqrt{55}$ là số vô tỉ.

Khi đó vế trái là số vô tỉ. Nó là tổng của hai căn thức (khác 0) nên hai căn thức ấy phải đồng dạng với $\sqrt{55}$, tức là $\sqrt{x} = a\sqrt{55}$, $\sqrt{y} = b\sqrt{55}$ với a, b nguyên dương thỏa mãn đẳng thức a + b = 6.

Vì $0 < a < b < 6$ nên $a = 1$ hoặc $a = 2$. Suy ra bài toán có hai nghiệm $(x, y) = (55, 1375), (220, 880)$.

Bài toán 118. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$13\sqrt{x} - 7\sqrt{y} = \sqrt{2000}$$

GIẢI

Vế phải $\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$. Vế trái là hiệu của hai số nên: hoặc một trong hai số bằng 0, hoặc cả hai số là những căn thức đồng dạng với $\sqrt{5}$, tức là $\sqrt{x} = a\sqrt{5}$, $\sqrt{y} = b\sqrt{5}$ với a, b là các số nguyên không âm nghiệm đúng phương trình $13a - 7b = 20$.

$$a = \frac{20 + 7b}{13} = 1 + \frac{7(1 + b)}{13}$$

Vì $(13,7) = 1$ nên để a nguyên thì $1 + b = 13t$ với t nguyên. Suy ra $b = 13t - 1$, $a = 1 + 7t$. Để $a, b \geq 0$

thì t phải nguyên dương. Cuối cùng:

$x = 5a^2 = 5(1 + 7t)^2$, $y = 5b^2 = 5(13t - 1)^2$ với t là số nguyên dương.

Tới đây, ta xét bài toán tổng quát: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$a\sqrt{x} + b\sqrt{y} = \sqrt{c}$$

với a,b nguyêm, c nguyên dương không chính phương. Mà chúng ta có thể gọi là phương trình vô định căn đồng dạng.

Để giải phương trình, ta viết c dưới dạng $c = km^2$, trong đó k, m là các số nguyên dương, k không chia hết cho bất cứ số chính phương nào khác 1. Dễ thấy rằng với mỗi c thì cách viết đó là tồn tại và duy nhất. Vế phải $\sqrt{c} = m\sqrt{k}$ là số vô tỉ. Vế trái là tổng của hai số nên hoặc một số bằng 0, hoặc cả hai là những số vô tỉ đồng dạng với $\sqrt{k}$. Trường hợp $a = 0$ hoặc $b = 0$ đơn giản. Xét trường hợp $a, b \neq 0$. Lúc này $\sqrt{x} = u\sqrt{k}$, $\sqrt{y} = v\sqrt{k}$ với u, v là các số nguyên không âm. Thành thử:

$$au + bv = m(*)$$

Đây là phương trình vô định mà chúng ta đã có cách giải hết sức ngắn gọn (chương I). Nếu m không chia hết cho ước số chung khác 1 của a, b thì (*) không có nghiệm nguyên. Ngược lại, nếu (*) có nghiệm nguyên u_o, v_o thì

$$au + bv = au_o + bv_o \ (= m)$$

Vì vậy $u = \dfrac{au_o + bv_o - bv}{a} = u_o + \dfrac{b(v_o - v)}{a} = u_o + \dfrac{b'(v_o - v)}{a'}$

với a', b' nguyên và $(a', b') = 1$.

Để u nguyên thì $v_o - v = a't$ với t nguyên, nên

$$v = v_o - a't, u = u_o + b't,$$

Do $u, v \geq 0$ nên $v_o - a't \geq 0 \Rightarrow a't \leq v_o$

$u_o + b't \geq 0 \rightarrow b't \geq -u_o$

Vì trong hai số a,b có ít nhất một số dương nên trong a',b' có ít nhất một số dương. Không mất tính tổng quát, giả sử $b' > 0$,

thế thì $t \geq -\dfrac{u_o}{b'}$

- Nếu $a' < 0$ thì $t \geq \dfrac{v_o}{a'}$, do đó $t \geq \max\left(-\dfrac{u_o}{b'}, \dfrac{v_o}{a'}\right)$

với $u_o, v_o, b' > 0, a' < 0$

- Nếu $a' > 0$ thì $t \leq \dfrac{v_o}{a'}$, do đó $-\dfrac{u_o}{b'} \leq t \leq \dfrac{v_o}{a'}$

với $u_o, v_o, b', a' > 0$

Cuối cùng ta được $x = ku^2 = k(u_0 + b't)^2$

$$y = kv^2 = k(v_0 - a't)^2$$

Phương trình vô định căn đồng dạng không chỉ bó hẹp ở dạng đã nêu. Nhiều phương trình sẽ được giải một cách đơn giản nếu nó được nhìn dưới con mắt như vậy. Chẳng hạn như:

Bài toán 119: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình

$$\frac{3x}{5} - \sqrt{2x+1} = \frac{7y}{3} - \sqrt{4y-1} - 4$$

GIẢI

Nhận thấy $\sqrt{4y-1}$ là số vô tỉ với mọi y nguyên (vì bình phương của một số lẻ có dạng 4m + 1). Viết lại phương trình đã cho

$$\frac{3x}{5} + 4 - \frac{7y}{3} = \sqrt{2x+1} - \sqrt{4y-1} \quad (1)$$

Vế trái của (1) là số hữu tỉ nên điều kiện cần (và đủ) để (1) có nghiệm nguyên là cả hai vế của (1) cùng bằng 0. Dễ dàng tìm được nghiệm (duy nhất) của bài toán là x = 5, y = 3.

Bài toán 120: Tìm tất cả các số tự nhiên x và y thỏa mãn phương trình

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^4 = 3361 - \sqrt{11296320}$$

(Bài dự tuyển thi vô địch toán quốc tế)

GIẢI

Nhận thấy x và y là các số nguyên không âm, và

$\sqrt{11296320} = 2^3 . 41\sqrt{105}$ là số vô tỉ. Phương trình đã cho có thể viết lại:

$$(x + y)^2 + 4xy - 4(x + y)\sqrt{xy} = 3361 - 8 . 41\sqrt{105}$$

hay $$(x + y)^2 + 4xy - 3361 = 4(x + y)\sqrt{xy} - 328\sqrt{105}. \quad (1)$$

Vế trái của (1) là số hữu tỉ nên điều kiện cần và đủ để phương trình có nghiệm nguyên là cả hai vế của (1) cùng bằng 0. Tới đây có hai cách giải

Cách 1: Ta có hệ

$$\begin{cases} (x + y)^2 + 4xy - 3361 = 0 \\ 4(x + y)\sqrt{xy} - 328\sqrt{105} = 0 \end{cases}$$

hay $$\begin{cases} S^2 + 4P - 3361 = 0 \quad (2) \\ S\sqrt{P} = 82\sqrt{105} \quad (3) \end{cases}$$

trong đó $S = x + y$, $P = xy$. Từ (3) rút ra $P = \dfrac{82^2.105}{S^2}$

Thay vào (2) được

$$S^2 + \frac{4.82^2.105}{S^2} - 3361 = 0$$

hay $S^4 - 3361S^2 + 4.82^2 . 105 = 0$

Biệt số $\Delta = 3361^2 - 4.4.82^2 . 105 = 1$ suy ra

$S^2 = (3361 \pm 1) : 2 = 1681; 1680$

1680 không phải số chính phương, còn $1681 = 41^2$ nên $S = 41$, suy ra $P = 420$. Lúc này x, y là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 41z + 420 = 0$.

Phương trình này có nghiệm $Z_1 = 29$, $Z_2 = 21$.

Vậy x và y, một số là 20, số kia là 21.

Cách 2: từ (3) suy ra $(x + y)\sqrt{xy} = 82.\sqrt{105}$ (4)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai căn thức $\sqrt{xy}$ và $\sqrt{105}$ đồng dạng. Như vậy $x+y = 82/k$ và $xy = 105k^2$. Như vậy, hai số x, y là hai nghiệm của phương trình:

$$t^2 - \frac{82}{k} t + 105 k^2 = 0$$

Phương trình này chỉ có nghiệm nếu

$$\Delta = (\frac{82}{k})^2 - 4.105 k^2 \geqslant 0 \rightarrow (\frac{82}{k})^2 \geqslant 4.105 k^2$$

$$\rightarrow 82^2 \geqslant 4 . 105k^2 \rightarrow k \leqslant 2$$

Nếu $k = 1$, phương trình $t^2 - 82t + 105 = 0$ không có nghiệm nguyên

Nếu $k = 2$, phương trình $t^2 - 41t + 4.105 = 0$ có nghiệm $t_{1,2} = 20; 21$. Vậy x,y: một số là 20, một số là 21 nghiệm đúng phương trình đã cho.

Tôi đã mở đầu cuốn sách bằng định lý lớn Fecma, và tới khi viết những dòng cuối cùng này, tôi muốn trở lại với nó. Bởi vì sự đơn giản bề ngoài, vẻ đẹp cân đối và độ khó cao của phương trình Fecma đặc trưng cho vẻ đẹp và độ khó của những phương trình Điôphăng - những phương trình vô định.

Hơn bất cứ một thông tin toán học nào khác của mọi thời đại, bài toán Fecma đã gây nên ấn tượng sâu sắc và dai dẳng. Tôi đã từng nằm mơ giải được phương trình Phecma, sau nhiều ngày vật lộn với nó, để sáng hôm sau thức giấc lòng đầy thất vọng. Nhưng rồi tôi lớn dần lên để hiểu: định lý lớn Fecma thật là.... lớn!

Bạn có biết không, Fecma, niềm vinh quang của nền khoa học Pháp, một trong những người sáng lập lý thuyết số, người đã cùng Đề các (R.Descartes , 1596 - 1650) đặt nền móng cho hình học giải tích, cùng Pascan (B. Pascal, 1623 - 1662) đặt nền móng cho lý thuyết xác suất, không phải là một nhà toán học chuyên nghiệp. Ông là một luật gia và chỉ nghiên cứu toán học trong thời gian rảnh rỗi. Trong lĩnh vực toán, Fecma là một người tự học thiên tài, những thành tựu của "nhà nghiệp dư" ấy đến những nhà toán học chuyên nghiệp cũng phải ghen tị. Vậy mà, ông chỉ thực sự chứng minh định lý của mình cho trường hợp $n = 4$, tức là phương trình $x^4 + y^4 = z^4$ không có nghiệm tự nhiên. Lời giải với n tổng quát của ông không được ghi lại, phải chăng vì ông đã nghi ngờ sự đúng đắn của nó.

Lêôna Ole, nhà toán học vĩ đại của Viện Hàn lâm Pêtecbua, người Thụy Sĩ, người đã viết 866 công trình nghiên cứu đầy giá trị, người mà Di dơ rô, một triết gia Pháp, "sẵn sàng đánh đổi tất cả những điều mà tôi xây dựng được chỉ để lấy một trang trong tác phẩm của ngài Ole", người mà Gauxơ - nhà toán học Đức, được người đương thời tôn sùng như ông vua toán học - đã phải công nhận : "Việc học tập những tác phẩm của Ole bao giờ cũng là cách tốt nhất để hiểu toán học", người mà năm 13 tuổi đã trở thành sinh viên trường Đại học Baden, 16 tuổi được nhận học vị tiến sĩ, người mà sau khi mất đi, Viện hàn lâm Pêtecbua phải mất 80 năm mới đăng hết trên tạp chí của mình những công trình ông viết cuối đời chưa kịp công bố, người say mê những phương trình vô định, cũng chỉ chứng minh được định lý lớn Fecma cho trường hợp n = 3 (năm 1770).

Nửa thế kỷ sau, vào năm 1825, Đirichlê (P. Dilichlet 1805 - 1859) và Lơ găng đrơ (Alegendre 1752 - 1833) mới chứng minh được định lý lớn Fecma với n = 5, sau một loạt phát minh về lý thuyết số. Kumme nhà toán học Đức, để chứng minh được cho trường hợp $n \leqslant 100$, đã phải sáng tạo ra cả một phương pháp nghiên cứu mới được gọi là lý thuyết đại số của các số.

Ngày nay, với sự giúp đỡ đầy hiệu quả của máy tính điện tử, của các phương pháp tính toán hiện đại, các nhà toán học trên thế giới mới chứng minh được định lý lớn Fecma đúng với $n \leqslant 125\,000$ (năm 1978)

Gần đây, Fanting (Gerd Faltings , sinh năm 1954), người CHLB Đức, giáo sư trường Đại học tổng hợp Prinxêtôn (Mỹ), giải thưởng Fin* (Fields) 1986, bằng hình học đại số đã chứng minh dự đoán Moocđen (Louis Joel Mordell), đem lại hy vọng tiếp tục đi tìm lời giải cho bài toán Fecma.

Vậy mà cái đích ấy còn bị kéo ra xa xăm hơn nữa bởi giả thuyết Ole: Với mọi số tự nhiên k và n sao cho $2 \leqslant k \lessgtr n$, phương trình Fecma tổng quát

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = x_{k+1}^n$$

không có nghiệm trong tập hợp số tự nhiên.

Có phải chăng những phương trình vô định vẫn luôn luôn ở phía trước...

T.T

---

* *Giải thưởng quốc tế cao nhất dành cho các nhà toán học dưới 40 tuổi đã có những cống hiến rất cơ bản góp phần thúc đẩy sự phát triển toán học.Giải thưởng này có thể xem như tương đương với giải Nôbel dành cho các nhà vật lý, hóa học...*

MỤC LỤC