

Xử lý hệ phương trình vô tỷ bằng phương pháp dùng định lý Crame (định thức)

Đặt vấn đề : Cách sử dụng định lý Crame là một phương pháp nhanh gọn trong giải các hệ phương trình bậc nhất hai ẩn mà lớp 9 chúng ta đã được tiếp xúc. Ưu điểm của nó cho đến lớp 10 đó là biện luận dạng hệ phương trình có chứa tham số và đây là giải pháp tối ưu nhất thay cho việc tính toán phức tạp. Và nó còn được áp dụng rộng rãi như trong giải hệ phương trình vô tỷ , các bài toán bất đẳng thức ...

Kiến thức cơ sở : Chúng ta sẽ đi nhắc lại một số kiến thức xoay quanh phương pháp dùng định thức :

Bài toán. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ giải và biện luận hệ phương trình đã cho.

Lời giải. Thiết lập các định thức :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 ; \quad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 ; \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Biện luận :

$$\begin{aligned} \text{➤ Nếu } D \neq 0 &\Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \text{ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất } \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D} \end{cases} \\ \text{➤ Nếu } D = 0 &\Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \text{ có hai trường hợp xảy ra :} \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad \text{Với } \begin{cases} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{cases} \text{ suy ra hệ phương trình vô nghiệm.}$$

$$\checkmark \quad \text{Với } D_x = D_y = 0 \text{ suy ra hệ phương trình có vô số nghiệm.}$$

Vận dụng. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} (x+y)\sqrt{x^2+7} + y\sqrt{2y^2+1} = xy + 2y^2 \\ 2x\sqrt{x^2+7} + (x+y)\sqrt{2y^2+1} = 3xy - x^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải. Với điều kiện $x, y \in \mathbb{R}$ ta đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x^2+7} \geq 0 \\ b = \sqrt{2y^2+1} \geq 0 \end{cases}$ khi đó hệ đã cho trở thành : $\begin{cases} (x+y)a + yb = xy + 2y^2 \\ 2xa + (x+y)b = 3xy - x^2 \end{cases}$

Ta coi hệ phương trình trên là hệ bậc nhất hai ẩn a, b khi đó đi thiết lập các định thức ta được :

$$D = \begin{vmatrix} x+y & y \\ 2x & x+y \end{vmatrix} = x^2 + y^2 ; \quad D_x = \begin{vmatrix} xy + 2y^2 & y \\ 3xy - x^2 & x+y \end{vmatrix} = 2y(x^2 + y^2) ; \quad D_y = \begin{vmatrix} x+y & xy + 2y^2 \\ 2x & 3xy - x^2 \end{vmatrix} = -x(x^2 + y^2)$$

Vì $x = y = 0$ là nghiệm của hệ phương trình nên với $D = x^2 + y^2 \neq 0$ ta có : $\begin{cases} a = 2y \\ b = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+7} = 2y \\ \sqrt{2y^2+1} = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$

Do đó hệ phương trình ban đầu có hai nghiệm là $(x; y) = (-3; 2) ; (0; 0)$.

Khi xem xong lời giải trên. Vấn đề được đặt ra ở đây là những dấu hiệu nào để có thể dùng định lý Crame trong việc giải những bài toán hệ phương trình như thế. Qua kinh nghiệm , ta đúc kết được như sau :

- ❖ Đa số hệ đưa về dạng đặt ẩn phụ với hai biến. Và khi đưa về ẩn phụ thì hệ phương trình mới thu được sẽ xuất hiện 4 ẩn đó là a, b, x, y . Vậy thì lại có hai khả năng lớn xảy ra như sau :
 - Các biến a, b mũ bậc nhất mà không cần quan tâm đến bậc mũ của x, y . Thì hệ phương trình đã trở thành hệ hai ẩn bậc nhất với a, b do đó định thức ta dùng sẽ liên quan đến x, y và rõ ràng ta sẽ được các nghiệm a, b biểu diễn qua x và y . Như bài trên ta nói.

○ Tương tự ở trên nhưng ở đây x, y có mũ bậc nhất và rõ ràng ta sẽ tìm được mối liên hệ giữa a, b, x, y .

❖ Hoặc là dùng một ẩn phụ. Vì ẩn phụ này đều xuất hiện ở hai phương trình. Và các biến còn lại cũng liên quan đến ẩn phụ đó bằng cách rút thế. Thường với dạng một ẩn phụ người ta thường cho x, y có mũ bậc nhất.

Nhìn chung là không thể có những phương pháp cụ thể nào hay công cụ đa năng nào để giải quyết được tất cả các bài hệ phương trình. Mà nó là xoay vần xung quanh những kiến thức mà đã được học và khai thác tư duy của học sinh. Dưới đây ta tiếp tục đi phân tích một số ví dụ để hiểu rõ hơn về cách sử dụng ĐỊNH LÝ CRAME.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} (x+y)\sqrt{2xy+5} = 4xy - 3y + 1 \\ (x+2y)\sqrt{2xy+5} = 6xy + x - 7y - 6 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Phân tích. Ở hệ phương trình này có sự xuất hiện của một biến $\sqrt{2xy+5}$ đồng thời liên hệ mật thiết tới hai đại lượng $4xy$ và $6xy$. Và điều nữa đó là các biến x, y có mũ bậc một. Nên ý tưởng đó là đặt ẩn phụ, đưa về hệ phương trình hai ẩn đối với x, y và dùng định thức tìm mối liên hệ giữa ẩn phụ, các biến.

Lời giải. Đặt $a = \sqrt{2xy+5} \geq 0 \Leftrightarrow 2xy = a^2 - 5$ khi đó ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x+y)a = 2(a^2 - 5) - 3y + 1 \\ (x+2y)a = 3(a^2 - 5) + x - 7y - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.x + (a+3).y = 2a^2 - 9 \\ (a-1).x + (2a+7).y = 3a^2 - 21 \end{cases}$$

Ta đi xét các định thức : $D = \begin{vmatrix} a & a+3 \\ a-1 & 2a+7 \end{vmatrix} = a^2 + 5a + 3$ và

$$D_x = \begin{vmatrix} 2a^2 - 9 & a+3 \\ 3a^2 - 21 & 2a+7 \end{vmatrix} = a(a^2 + 5a + 3) \quad ; \quad D_y = \begin{vmatrix} a & 2a^2 - 9 \\ a-1 & 3a^2 - 21 \end{vmatrix} = (a-3)(a^2 + 5a + 3)$$

Do đó ta suy ra :
$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = a \\ y = \frac{D_y}{D} = a-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2xy+5} = x \\ \sqrt{2xy+5} = y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+3 \\ \sqrt{2xy+5} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ x=5 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là : $(x; y) = (1; -2); (5; 3)$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} (z+1)\sqrt{x^2-1} + (z^2+4z)\sqrt{y^2+1} = z^3 + 5z^2 - 1 \\ \sqrt{x^2-1} + (z+3)\sqrt{y^2+1} = z^2 + 4z - 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

Phân tích. Đây là hệ phương trình ba ẩn. Nhìn khá là phức tạp. Nhưng để ý ở hai phương trình đầu của hệ có sự xuất hiện của hai ẩn phụ $\sqrt{x^2-1}$ và $\sqrt{y^2+1}$ khi đó biến z lại xuất hiện độc lập. Thế nên nếu đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn thì khi dùng định thức từ hai ẩn phụ đó cho ta mối liên hệ giữa $x^2; y^2; z$ để rồi thế vào phương trình ba ta được phương trình ẩn z và tìm được nghiệm của hệ ban đầu.

Lời giải. Điều kiện : $x^2 \geq 1$. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2-1} \\ v = \sqrt{y^2+1} \end{cases}$ khi đó ta có :
$$\begin{cases} (z+1)u + (z^2+4z)v = z^3 + 5z^2 - 1 \\ u + (z+3)v = z^2 + 4z - 1 \end{cases} \quad \text{Xét các định thức ta có}$$

$$D = \begin{vmatrix} z+1 & z^2+4z \\ 1 & z+3 \end{vmatrix} = 3 \quad ; \quad D_x = \begin{vmatrix} z^3+5z^2-1 & z^2+4z \\ z^2+4z-1 & z+3 \end{vmatrix} = 3z-3 \quad ; \quad D_y = \begin{vmatrix} z+1 & z^3+5z^2-1 \\ 1 & z^2+4z-1 \end{vmatrix} = 3z$$

Từ đó ta được :
$$\begin{cases} u = z-1 \\ v = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-1} = z-1 \\ \sqrt{y^2+1} = z \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2 + (z-1)^2 \text{ thế vào phương trình ba suy ra :}$$

$$2z^2 + (z-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} z \geq 1 \\ 3z^2 - 2z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} = 1 \\ \sqrt{y^2 + 1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y^2 = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (\sqrt{2}; \sqrt{3}; 2); (-\sqrt{2}; -\sqrt{3}; 2); (\sqrt{2}; -\sqrt{3}; 2); (-\sqrt{2}; \sqrt{3}; 2)$.

Từ một bài toán sai. Ra một số ý tưởng mới

Tại sao tiêu đề của bài viết nhỏ này là như vậy. Bởi thực tế trong kỳ thi HỌC SINH GIỎI Môn Toán năm 2013 – 2014 thì ở câu hệ phương trình đề HSG Nghệ An tồn khá nhiều giấy mực của các mạng xã hội cũng như các diễn đàn TOÁN HỌC nổi tiếng VIỆT NAM. Đã có rất nhiều ý kiến khác nhau được đưa ra và rồi người ta chờ đợi một đáp án từ BỘ GD – ĐT Nghệ An thế nhưng câu trả lời là đề sai do một lỗi nhỏ không đáng có. Nhưng tình cờ nó lại đem lại luồng gió mới trong hơi thở cũ. Tại sao lại là mới trong cũ. Bởi nó vẫn theo mô típ cũ nhưng sáng tạo hơn. Không chỉ là phương pháp hàm số nữa mà là hướng tới cách tư duy cho học sinh.

Cũng bắt nguồn từ gương mặt thân quen : $(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{y^2 + 1} + y) = 1$ hoặc là các biểu thức mạnh nha kiểu này. Quá

thuộc lòng dạng dùng hàm số đặc trưng : $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}$ nhưng đây không phải là cách duy nhất để xử lý phương trình đó mà còn phương pháp liên hợp, bình phương. Và người ta lợi dụng hai phương pháp này để sáng tạo ra một số bài toán hay và khó. Dưới đây ta sẽ đi đến ba ví dụ cụ thể cho bài toán này.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} (\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{y^2 + 1} + y) = 2 \\ (3\sqrt{x^2 + 1} - 4y)(x + 3) = 5\sqrt{13x^3 + 5x} - 2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải. Điều kiện $13x^3 + 5x - 2 > 0$, phương trình một của hệ được viết lại thành :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} + x = 2\sqrt{y^2 + 1} - 2y & (3) \\ 2\sqrt{x^2 + 1} - 2x = \sqrt{y^2 + 1} + y & (4) \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot (4) - (3) = 3\sqrt{x^2 + 1} - 4y = 5x$$

Hoặc là ta sẽ đi xử lý nó như sau :

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 + 1} &= 2\sqrt{y^2 + 1} - 2y \Leftrightarrow x + 2y + \sqrt{x^2 + 1} = 2\sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow (x + 2y + \sqrt{x^2 + 1})^2 = 4(y^2 + 1) \\ \Leftrightarrow 4y^2 + 4y(x + \sqrt{x^2 + 1}) + (x + \sqrt{x^2 + 1})^2 &= 4(y^2 + 1) \Leftrightarrow 4y(x + \sqrt{x^2 + 1}) + (x + \sqrt{x^2 + 1})^2 = 4 \\ \Leftrightarrow x + 4y + \sqrt{x^2 + 1} &= \frac{4}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = 4\sqrt{x^2 + 1} - 4x \Leftrightarrow 5x + 4y = 4\sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Với $3\sqrt{x^2 + 1} - 4y = 5x$ thế xuống phương trình hai chúng ta có :

$$x^2 + 3x = \sqrt{13x^3 + 5x} - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x \geq 0 \\ (x^2 + 3x) = 13x^3 + 5x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x \geq 0 \\ x = 1 \\ x = 2 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} \end{cases}$$

Do đó hệ phương trình đã cho có hai nghiệm.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} (\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{y^2 + 1} + y) = 2 \\ 18x^3 + 16y^2 + 40xy + 34x^2 = 9\sqrt{1 + 2x} \cdot \sqrt[3]{1 - 3x} \end{cases} \quad \left(x \in \left[0; \frac{1}{3} \right]; y \in \mathbb{R} \right)$$

Vẫn cái mô típ ở bài toán trên nhưng xử lý theo phương pháp liên hợp và bình phương.

Lời giải. Điều kiện $x \in \left[0; \frac{1}{3} \right]$, phương trình một của hệ được viết lại thành :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1}+x=2\sqrt{y^2+1}-2y & (3) \\ 2\sqrt{x^2+1}-2x=\sqrt{y^2+1}+y & (4) \end{cases} \Rightarrow 2.(4)-(3)=3\sqrt{x^2+1}-4y=5x$$

Với $3\sqrt{x^2+1}-4y=5x$ ta có : $5x+4y=3\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow (5x+4y)^2=9(x^2+1) \Leftrightarrow 25x^2+40xy+16y^2=9(x^2+1)$ khi

đó phương trình hai của hệ phương trình tương đương với : $2x^3+3x^2+1=\sqrt{1+2x}.\sqrt[3]{1-3x}$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có :

$$2x^3+3x^2+1=\sqrt{1+2x}.\sqrt[3]{1-3x} \leq (1+x)(1-x) \Leftrightarrow 2x^3+4x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2(2x+4) \leq 0 \Leftrightarrow x=0$$

Suy ra hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(0; \frac{3}{4}\right)$.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} (x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+4})=1 \\ 100x^2+56xy+10y^2-39x-3y=18 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải. Bài này có cách thức xử lý bình phương ở phương trình một rất đẹp như sau :

$$\begin{aligned} (x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+4})=1 &\Leftrightarrow y+\sqrt{y^2+4}=\sqrt{x^2+1}-x \Leftrightarrow x+y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+4} \\ \Leftrightarrow (x+y)^2 &= (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+4})^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+1}.\sqrt{y^2+4}=5-2xy \Leftrightarrow 4(x^2+1)(y^2+4)=(5-2xy)^2 \\ \Leftrightarrow 4(x^2y^2+4x^2+y^2+4) &= 4x^2y^2-20xy+25 \Leftrightarrow 16x^2+4y^2+20xy-9=0 \end{aligned}$$

Kết hợp phương trình hai ta được hệ phương trình mới :
$$\begin{cases} 16x^2+4y^2+20xy-9=0 \\ 100x^2+56xy+10y^2-39x-3y=18 \end{cases}$$

Hệ phương trình này đã biết cách giải tổng quát và cho ta nghiệm là : $(x; y) = \left(\frac{5}{12}; -\frac{8}{3}\right); \left(\frac{1}{2}; -\frac{5+3\sqrt{5}}{4}\right)$.

Lưu bút. Hai phương pháp để giải hệ phương trình mà tác giả chia sẻ ở trên hi vọng giúp các bạn phần nào đó bổ sung thêm kiến thức phong phú cho cách giải các bài hệ phương trình. Nó không khó nhưng đòi hỏi tư duy của học sinh cũng như kiến thức vận dụng của cá nhân. Bài viết trên khó tránh được sự sai sót mong bạn đọc bỏ quá. Và đây cũng là món quà nho nhỏ để chào mừng các bạn 97er bước vào năm học mới qua đó chúc các em sức khỏe để hoàn thành nhiệm vụ được đề ra trong năm học mới. Bách chiến , bách thắng. Thân Ái !!!

“ Học như con thuyền ngược nước , không tiến ắt phải lùi “

Facebook : <https://www.facebook.com/starfc.manunited>

Thị Trần Cồn – Hải Hậu – Nam Định – 11/08/2014