ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

LÊ VĂN TÀI

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ SỐ HỌC VÀ DÃY SỐ

Chuyên ngành : Phương pháp toán sơ cấp
Mã số : 60. 46. 40

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS. Phan Huy Khải

Hà Nội - 2006

Mục lục

MỞ ĐẦU

Các vấn đề liên quan đến dãy số là một phần quan trọng của đại số và giải tích toán học. Dãy số có một vị trí đặc biệt quan trọng trong toán học, không chỉ như là một đối tượng để nghiên cứu mà còn đóng một vai trò như một công cụ đắc lực của các mô hình rời rạc của giải tích trong lý thuyết phương trình, lý thuyết xấp xỉ, lý thuyết biểu diễn...Các vấn đề liên quan đến dãy số rất phong phú. Hiện nay có nhiều tài liệu đề cập tới các bài toán về dãy số. Tuy nhiên, các tài liệu này chủ yếu quan tâm đến các tính chất của dãy số như: Giới hạn của dãy số, số hạng tổng quát của dãy số, dãy số tăng, giảm, tính bị chặn ...

Tính chất số học của các phần tử của một dãy số là một vấn đề khá thú vị. Những bài toán liên quan tới vấn đề này đều là các bài toán hay và khó. Tác giả luận văn đã sưu tầm, chọn lọc các bài toán này và phân loại chúng theo từng chủ đề nhỏ.

Mục đích của luận văn là trình bày một cách hệ thống, chi tiết một số bài toán về tính chất số học của các phần tử trong một dãy số. Luận văn được chia thành 4 chương:

Chương1: *Một số kiến thức chuẩn bị*. Luận văn trình bày lại một cách có hệ thống các kiến thức cơ bản về dãy số và số học làm cơ sở cho việc giải các bài toán về dãy số trong các chương sau. Nội dung chính của luận văn được trình bày trong chương 2, chương 3 và chương 4.

Chương 2: *Dãy số và tính chính phương*. Trong chương này tác giả đã hệ thống một số vấn đề nêu ra về tính chính phương đối với các phần tử của dãy số, qua đó ta thấy có những dãy số gồm toàn số chính phương hoặc một số phần tử nào đó trong dãy số là số chính phương.

Chương 3: *Dãy số và tính chia hết*. Trong chương này đề cập đến tính chia hết của các phần tử trong dãy số. Trên cơ sở lí thuyết số học về tính chia hết. Tác giả chia nội dung chương thành 2 phần: phần thứ nhất đã đề cập tới một số bài toán về dãy số nguyên tố, qua các bài toán chúng ta phần nào thấy được bức tranh về sự phân bố, khoảng cách giữa hai số nguyên tố liên tiếp, dãy số lấy vô số giá trị nguyên tố...; phần thứ hai đề cập đến một số bài toán về tính chia hết của các phần tử trong một dãy số cho cùng một số hoặc cho chính số thứ tự của phần tử đó trong dãy số hoặc giữa hai phần tử trong cùng một dãy số ...

Chương 4: *Số học với các dãy đặc biệt*. Trong chương này tác giả đã đề cập tới tính chia hết, tính chính phương và một số tính chất số học khác với dãy số là cấp số cộng, cấp số nhân. Trong dãy Fibonacci đã xét các bài toán với nội dung nêu nên mối liên hệ giữa tính chia hết, tính nguyên tố cùng nhau và số thứ tự của các phần tử trong cùng dãy số, cùng một số tính chất số học khác.

Luận văn được hoàn thành với sự hướng dẫn khoa học tận tình, chu đáo của **PGS. TS . PHAN HUY KHẢI.** Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy.

Tác giả xin chân thành cám ơn các quý cơ quan đã tạo điều kiện giúp đỡ về mọi mặt để luận văn hoàn thành đúng hạn.

Tác giả xin chân thành cám ơn các thầy giáo, cô giáo đã nhiệt tình giảng dạy cung cấp cho chúng em có thêm kiến thức.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn đến những người thân, bạn bè và các bạn đồng nghiệp đã tận tình giúp đỡ để tôi hoàn thành luận văn này.

Hà Nội, tháng 9 năm 2006

Tác giả

Lê Văn Tài

Chương 1.

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1. Dãy số

1.1.1. Các khái niệm cơ bản về dãy số

Định nghĩa 1. *Dãy* u_n *là dãy các số* $u_1, u_2, u_3, ...$ *tuân theo một quy luật nào đó.*

- Các số $u_1, u_2, u_3, ...$ *gọi là phần tử của dãy.*

- Dãy được gọi là vô hạn nếu chúng có vô hạn phần tử.

- Dãy được gọi là hữu hạn nếu số phần tử của dãy là hữu hạn. Phần tử u_i *được gọi là số hạng thứ* i *của dãy.*

Định nghĩa 2. *Dãy* $u_1, u_2, u_3, ..$ *được gọi là:*

- Dãy đơn điệu tăng nếu $u_{n+1} > u_n$ *với mọi* $n = 1, 2, ...$

- Dãy đơn điệu không giảm nếu $u_{n+1} \geq u_n$ *với mọi* $n = 1, 2...$

- Dãy đơn điệu giảm nếu $u_{n+1} < u_n$ *với mọi* $n = 1, 2, ...$

- Dãy đơn điệu không tăng nếu $u_{n+1} \leqslant u_n$ *với mọi* $n = 1, 2, ...$

Định nghĩa 3. *Dãy* $u_1, u_2, u_3, ...$ *được gọi là:*

- Bị chặn trên nếu tồn tại số K *sao cho* $u_n < K$ *với mọi* $n = 1, 2, ...$

- Bị chặn dưới nếu tồn tại số m *sao cho* $u_n > m$ *với mọi* $n = 1, 2, ...$

- Dãy bị chặn là dãy vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.

Định nghĩa 4. *Dãy* $u_1, u_2, u_3, ...$ *được gọi là dãy dừng nếu tồn tại số nguyên dương* N_o *sao cho* $u_n = C$ *với mọi* $n \geq N_o$, *ở đây* C *là một hằng số nào đó (và gọi là hằng số dừng).*

Định nghĩa 5. *Dãy* $u_1, u_2, u_3, ...$ *gọi là tuần hoàn nếu tồn tại số nguyên dương* n *và số nguyên dương* k *sao cho với mọi* $p = 1, 2, ...$ *ta có*

$$\begin{cases} u_n = u_{n+kp} \\ u_{n+1} = u_{n+1+kp} \\ ... \\ u_{n+k-1} = u_{n+k-1+kp}. \end{cases}$$

Số k *được gọi là chu kỳ của dãy tuần hoàn.*

Với dãy số ta định nghĩa các phép toán như sau:
Cho hai dãy $\{u_n\} : u_1, u_2, u_3, \cdots$ và $\{v_n\} : v_1, v_2, v_3, \cdots$ Ta định nghĩa:

Định nghĩa 6. *Phép cộng hai dãy nói trên là dãy*

$$\{u_n + v_n\} : u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \cdots$$

Định nghĩa 7. *Phép nhân hai dãy nói trên là dãy*

$$\{u_n v_n\} : u_1 v_1, u_2 v_2, u_3 v_3, \cdots$$

(chú ý nếu $v_k \neq 0$ *với mọi* $k = 1, 2, \cdots$ *thì ta có thể nói đến thương của hai dãy nói trên là dãy*

$$\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\} : \frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}, \frac{u_3}{v_3} \cdots).$$

1.1.2. Cách xác định một dãy số

Để xác định một dãy số người ta có thể tiến hành theo các cách sau đây:

a) Cho công thức số hạng tổng quát .

Thí dụ: Dãy số $\{u_n\}$ xác định nhờ công thức $u_n = 2n + 1$ với mọi $n = 0, 1, 2, \cdots$ chính là dãy số tự nhiên lẻ $1, 3, 5, 7, \cdots$

(chú ý trong nhiều trường hợp dãy có thể bắt đầu từ u_0 tức là ta xét dãy $u_0, u_1, u_2, \cdots$).

b) Dãy số được xác định theo công thức truy hồi.

Thí dụ: Cho dãy số $\{u_n\}, n = 0, 1, 2, \cdots$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_{n-1}u_{n+1}, \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

c) Dãy số được xác định theo cách miêu tả.

Thí dụ: Cho các số tự nhiên k và n. Lập hai dãy số $\{u_j\}, \{v_j\}(j = 1, 2, \cdots, n)$ như sau:

Bước1: Chia k cho n được thương là u_1 và phần dư là v_1.

Bước thứ $j : (j = 2, 3, \cdots, n)$ xác định u_j và v_j như sau:

Chia $k + v_{j-1}$ cho n được thương là u_j và phần dư là v_j.

Với dãy này ta có

$$\begin{aligned} & k = nu_1 + v_1; \\ & k + v_1 = nu_2 + v_2; \\ & k + v_2 = nu_3 + v_3; \\ & \cdots \\ & k + v_{n-1} = nu_n + v_n. \end{aligned}$$

Trong các phương pháp để xác định dãy, người ta hay sử dụng phương pháp phương trình đặc trưng của dãy. Phương pháp này dựa vào phương pháp sai phân sau đây.

Sơ lược về phương pháp sai phân:

Định nghĩa 8. *Cho hàm số $y = f(x)$. Giả sử giá trị $f(x)$ tại các điểm $x_0, x_0 + h$, $x_0 + 2h, \cdots, x_0 + nh, \cdots$ (h là một hằng số) tương ứng là: $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$. Khi đó ta gọi hiệu*

$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ *là sai phân cấp* 1 *của hàm* f *với mọi* $i = 1, 2, \cdots$

$\Delta^2 y_i = \Delta y_i - \Delta y_{i-1} = (y_i - y_{i-1}) - (y_{i-1} - y_{i-2}) = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$ *là sai phân cấp* 2 *của hàm* f *với mọi* $i = 1, 2, \cdots$

Cứ như vậy ta có thể định nghĩa sai phân cấp cao hơn.

- Một số tính chất của sai phân:
  - Sai phân mọi cấp đều có tính chất tuyến tính, tức là
  $\Delta^k(f \pm g) = \Delta^k(f) \pm \Delta^k(g)$
  - Sai phân cấp k của một đa thức bậc n sẽ bằng 0 khi $k > n$; bằng hằng số khi $k = n$ (và ngược lại nếu sai phân cấp k của một hàm mà bằng hằng số thì đó là một đa thức bậc k)
  $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta y_i = (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) = y_n - y_0.$

- Phương trình sai phân:
  Cho hàm số $y = f(x)$.
  Các giá trị tương ứng của hàm số tại $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, ..., x_0 + nh, ...$ tương ứng là $y_o, y_1, y_2, ..., y_n, ...$ Một biểu thức có dạng
  $$a_n y_{n+i} + a_{n-1} y_{n-1+i} + a_{n-2} y_{n-2+i} + \cdots + a_1 y_{1+i} + a_0 y_i = 0 \qquad (*)$$
  gọi là phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất cấp n, trong đó $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ là các hằng số.

  Để giải được phương trình trên cần cho trước n giá trị ban đầu $y_0, y_1, ..., y_n$ rồi bằng phương pháp truy toán, ta tính các giá trị của $y_n, y_{n+1}, ...$
  Phương trình sai phân (*) có các tính chất sau đây:
  - Nếu $\overline{y_i}, \overline{y_{i+1}}, ..., \overline{y_{i+n}}$ và $y'_i, y'_{i+1}, ..., y'_{i+n}$ là hai nghiệm của (*), thì tổng hoặc hiệu của chúng $\overline{y_i} \pm y'_i, \overline{y_{i+1}} \pm y'_{i+1}, \cdots, \overline{y_{i+n}} \pm y'_{i+n}$ cũng là nghiệm của (*)
  Nghiệm tổng quát của (*) có dạng $y_i = c_1\lambda_1^i + c_2\lambda_2^i + \cdots + c_n\lambda_n^i$, trong đó $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ là các hằng số tuỳ ý còn $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ là n nghiệm phân biệt của phương trình $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$. Phương trình này gọi là *phương trình đặc trưng* của (*)

  Chú ý: Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm bội, chẳng hạn λ_1 có bội s, thì $y_i = c_1\lambda_1^i + c_2 i\lambda_1^i + c_3 i^2\lambda_1^i + \cdots + c_s i^{s-1}\lambda_1^i + c_{s+1}\lambda_{s+1}^i + \cdots + c_n\lambda_n^i.$

Ta áp dụng phương pháp sai phân trình bày ở trên vào việc xác định dãy trong thí dụ sau.

Thí dụ1: Cho dãy số hữu hạn được xác định như sau:

$u_0 = 1; \quad u_1 = -1; \quad u_2 = -1; \quad u_3 = 1; \quad u_4 = 5;$

$u_5 = 11; \quad u_6 = 19; \quad u_7 = 29; \quad u_8 = 41; \quad u_9 = 55.$

Hãy tìm công thức cho số hạng với $n = \overline{0,9}$. Lập bảng sai phân sau đây:

$y = f(x)$	1		-1		-1		1		5		11		19		29		41		55
Δy		-2		0		2		4		6		8		10		12		14	
$\Delta^2 y$			2		2		2		2		2		2		2		2		

Ta nhận thấy sai phân cấp 2 không đổi (bằng 2). Vậy dãy đã cho là dãy giá trị của tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$, trong đó x là số thứ tự của các số trong dãy. Để tìm a, b, c ta lần lượt cho $x = 0, 1, 2$ và có

$$u_0 = y_0 = 1 = c;$$

$$u_1 = y_1 = -1 = a + b + c;$$

$$u_2 = y_2 = -1 = 4a + 2b + c.$$

Từ hệ phương trình:

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases}$$

suy ra $a = 1; b = -3; c = 1$.

Vậy dãy số đã cho tuân theo quy luật $x^2 - 3x + 1$, tức là:

$$u_n = n^2 - 3n + 1, n = \overline{0,9}.$$

Thí dụ 2: Dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ ... \\ u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} \text{ với } n = 2, 3, ... \end{cases}$$

Hãy tìm công thức cho số hạng tổng quát u_n.

Từ công thức truy hồi, ta có $u_n - 3u_{n-1} + 2u_{n-2} = 0$. Vậy phương trình đặc trưng của dãy là: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, do đó số hạng tổng quát u_n của dãy có dạng:
$u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ hay $u_n = c_1 + c_2 2^n$.
Để xác định c_1, c_2 ta có
$u_0 = 1 = c_1 + c_2$; $u_1 = 2 = c_1 + 2c_2$.
Từ hệ phương trình

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + 2c_2 = 2, \end{cases}$$

suy ra $c_1 = 0$; $c_2 = 1$.
Vậy số hạng tổng quát của dãy đã cho có dạng $u_n = 2^n$.

1.1.3. Một vài dãy số đặc biệt

a) Cấp số cộng

Định nghĩa 9. *Dãy số $u_1, u_2, u_3, ...$ được gọi là cấp số cộng với công sai d $(d \neq 0)$, nếu như $u_n = u_{n-1} + d$ với mọi $n = 2, 3, ...$*

- Vài tính chất của cấp số cộng:
  i) $u_n = u_1 + (n-1)d$, với mọi $n = 1, 2, 3, ...$
  ii)
  $$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, \text{ với mọi } k = 2, 3, ...$$
  iii) Cho một cấp số cộng hữu hạn $u_1, u_2, ..., u_{n-1}, u_n$. Khi đó ta có
  $$u_1 + u_n = u_2 + u_{n-1} = u_3 + u_{n-2} = \cdots .$$
  Một cách tổng quát: $u_1 + u_n = u_k + u_{n-k}$ với mọi $k = 2, 3, ..., n-1$.

- Tổng của một cấp số cộng:

  - Cho cấp số cộng $u_1, u_2, ...$ với công sai d. Đặt

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n.$$

Khi đó ta có

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2} = \frac{[2u_1 + (n-1)d]n}{2}.$$

  - Vài tổng đặc biệt:

Đặt

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + n;$$
$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2;$$
$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

Khi đó ta có

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2};$$
$$S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

b) Cấp số nhân.

Định nghĩa 10. *Dãy $u_1, u_2, u_3, ...$ được gọi là cấp số nhân với công bội q, $(q \neq 0, q \neq 1)$ nếu như ta có $u_n = u_{n-1}q$ với mọi $n = 2, 3, ...$*

- Vài tính chất của cấp số nhân:

  i) $u_n = u_1 q^{n-1}$ với mọi $n = 1, 2, 3, ...$

  ii) $u_k^2 = u_{k-1}u_{k+1}$ với mọi $k = 2, 3, ...$

- Tổng của một cấp số nhân:

  - Cho cấp số nhân $u_1, u_2, u_3, ...$ với công bội q. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

  Khi đó ta có

$$S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

c) Dãy Fibonacci.

Định nghĩa 11. *Dãy* $u_1, u_2, ...$ *xác định như sau:*

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1 \\ \dots \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2},\ \textit{với mọi}\ \ n = 3, 4, ... \end{cases}$$

được gọi là dãy Fibonacci.

- Công thức tổng quát của dãy Fibonacci:

  Viết lại công thức truy hồi dưới dạng: $u_n - u_{n-1} - u_{n-2} = 0$. Vậy phương trình đặc trưng của dãy là: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm:

  $$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ \text{ và } \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

  Do đó theo phương pháp sai phân ta có

  $$u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

  Bây giờ ta xác định c_1, c_2 như sau:

  $$\begin{cases} u_1 = 1 = c_1\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ u_2 = 1 = c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

  $$\begin{cases} c_1\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \\ c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ c_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

  Từ đó suy ra

  $$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

- Vài tính chất của dãy Fibonacci:

  Cho dãy Fibonacci $u_1, u_2, \cdots$. Ta có các tính chất sau:

  i) $u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n}$;

  ii) $u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$;

  iii) $u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$;

  iv) $u_{2n}^2 = u_1u_2 + u_2u_3 + \cdots + u_{2n-1}u_{2n}$;

  v) $u_{n+1}u_{n+2} - u_nu_{n+3} = (-1)^n$;

  vi) $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^{n+1}$.

1.2. Số học

1.2.1. Tính chất chia hết trong tập hợp số nguyên

Định nghĩa 1. *Với hai số nguyên a và b, ta nói rằng a chia hết cho b (hay a là bội của b, hay b là ước của a), nếu tồn tại số nguyên k sao cho $a = k.b$. Lúc ấy ký hiệu là $a \vdots b$. Trường hợp ngược lại ký hiệu là $a \not\vdots\, b$ và ta nói rằng a không chia hết cho b.*

Định nghĩa 2. *Một số nguyên dương $p > 1$ được gọi là số nguyên tố nếu nó chỉ có hai ước số là 1 và p.*

Các tính chất cơ bản của tính chia hết.

i) Nếu a, b nguyên dương mà $a \vdots b$, thì $a \geq b$.

ii) Nếu $a_i \vdots b$ với mọi $i = \overline{1, n}$ thì $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \vdots b$.

iii) Với hai số nguyên không âm bất kỳ a và b, trong đó $b \neq 0$, luôn luôn tồn tại duy nhất một cặp số nguyên q và r sao cho $a = bq + r$ trong đó $0 \leqslant r < b$.

1.2.2. Ước số chung lớn nhất và bội số chung nhỏ nhất

Cho a và b là hai số nguyên dương.

Định nghĩa 3. *Ước số chung lớn nhất của a và b (và ký hiệu là ƯCLN (a, b), hay đơn giản là (a, b)) là số nguyên dương lớn nhất mà cả a và b đều chia hết cho nó.*

Định nghĩa 4. *Bội số chung nhỏ nhất của a và b (và ký hiệu là BCNN (a, b) hay đơn giản là $[a, b]$) là số nguyên dương nhỏ nhất chia hết cho cả a và b.*

Định nghĩa 5. *Cho n số nguyên $a_1, a_2, ..., a_n$.*

i) Số nguyên dương d gọi là ƯCLN của $a_1, a_2, ..., a_n$ nếu như thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- $a_i \,\vdots\, d$ *với mọi* $i = \overline{1, n}$.
- *Nếu* d' *là số nguyên dương mà* $a_i \,\vdots\, d'$, $\forall i = \overline{1, n}$ *thì* $d \,\vdots\, d'$, *khi đó ta thường dùng kí hiệu sau:* $d = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

ii) Số nguyên dương b *gọi là BCNN của* $a_1, a_2, ..., a_n$ *nếu như thoả mãn đồng thời hai điều kiện:*

- $b \,\vdots\, a_i$, $\forall i = \overline{1, n}$.
- *Nếu* b' *là số nguyên dương mà* $b \,\vdots\, a_i$, $\forall i = \overline{1, n}$ *thì* $b' \,\vdots\, b$.

Khi đó ta thường dùng kí hiệu sau: $b = [a_1, a_2, ..., a_n]$.

Các tính chất cơ bản của ƯCLN và BCNN :

i) Cho a và b là các số nguyên dương, khi đó ta có $(a, b) = (a, a + b)$.

ii) Cho m là một số nguyên dương, khi đó ta có

$$(ma, mb) = m(a, b);$$
$$[ma, mb] = m[a, b].$$

iv) Nếu $(a, b) \vdots d$ thì $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{1}{d}(a, b)$.

v) Hai số a và b được gọi là nguyên tố cùng nhau nếu $(a, b) = 1$. Cho a, b, c là 3 số nguyên dương sao cho $ab \,\vdots\, c$. Nếu $(a, c) = 1$, thì $b \,\vdots\, c$.

vi) Hai số nguyên liên tiếp thì nguyên tố cùng nhau.

vii) Với mọi số nguyên dương a, b luôn tồn tại các số nguyên x, y sao cho $ax + by = (a, b)$.

viii) Hai số nguyên dương a, b là số nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi tồn tại các số nguyên x và y sao cho $ax + by = 1$.

1.2.3. Số nguyên tố

Cho n là số nguyên dương $(n > 1)$. Khi đó n luôn có thể biểu diễn một cách duy nhất (không tính đến việc sắp xếp thứ tự các nhân tử) dưới dạng sau.

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

trong đó k, α_i $(i = \overline{1, k})$ là các số tự nhiên p_i $(i = \overline{1, k})$ là các số nguyên tố thoả mãn $1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k$. Khi đó dạng phân tích trên gọi là dạng khai triển chính tắc của số nguyên dương n.

Định lí Euclid

Tồn tại vô hạn số nguyên tố

Định lí cơ bản về mối liên hệ giữa tính chia hết và số nguyên tố

Giả sử a, b là hai số nguyên dương còn p là số nguyên tố sao cho $ab \vdots p$. Khi đó ta phải có hoặc là $a \vdots p$, hoặc là $b \vdots p$.

1.2.4. Đồng dư

Định nghĩa 6. *Nếu hai số nguyên a và b chia cho số tự nhiên m $(m \neq 0)$ có cùng số dư thì ta nói a đồng dư với b theo modulo m và viết $a \equiv b \pmod{m}$.*

Các tính chất cơ bản của đồng dư

a) Hai số nguyên a và b đồng dư với nhau theo modulo m (m là số nguyên dương) khi và chỉ khi $(a - b) \vdots m$.

b) Quan hệ đồng dư là một quan hệ tương đương trên tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$.

c) Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và $c \equiv d \pmod{m}$ thì

$$a + c \equiv b + d \pmod{m},$$

$$a - c \equiv b - d \pmod{m},$$

$$ac \equiv bd \pmod{m}.$$

d) Nếu p là một số nguyên tố và $ab \equiv 0 \pmod{p}$ thì $a \equiv 0 \pmod{p}$ hoặc $b \equiv 0 \pmod{p}$.

1.2.5. Vài định lí cơ bản của số học

Định lí Femat nhỏ: Nếu p là số nguyên tố và a là một số nguyên tuỳ ý, thì $(a^p - a) \equiv p$. Nói riêng khi $(a, p) = 1$, thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

Định lí Euler: Nếu m là số nguyên dương và $(a, m) = 1$, thì $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod m$, ở đây $\phi(m)$ là các số nguyên dương nhỏ hơn m nguyên tố cùng nhau với m ($\phi(m)$ gọi là Phi- hàm Euler).

Định lí Wilson: p là số nguyên tố khi và chỉ khi $(p-1)! + 1$ chia hết cho p.

Định lí Fermat- Euler: Nếu $p = 4k + 1$ thì tồn tại các số nguyên dương a, b sao cho $p = a^2 + b^2$.

Định lí phần dư Trung Hoa : Giả sử r và s là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, a và b là hai số nguyên tuỳ ý. Khi đó tồn tại một số nguyên N sao cho $N \equiv a \pmod r$ và $N \equiv b \pmod s$. Ngoài ra N được xác định một cách duy nhất (hiểu theo nghĩa modulo rs).

1.2.6. Hàm phần nguyên

Định nghĩa 7. *Cho x là số thực, ta gọi phần nguyên của x (kí hiệu $[x]$) là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.*

Một số tính chất cơ bản của hàm phần nguyên

i) $[x] = a \Leftrightarrow x = a + d$, trong đó a là số nguyên và $0 \leqslant d < 1$.

ii) $[x + y] = x$, thì x là số nguyên và $0 \leqslant y < 1$.

iii) Nếu n là số nguyên thì $[n + x] = n + [x]$.

iv) $[x + y] \geq [x] + [y]$.

v) Nếu n là số nguyên dương thì $\left[\dfrac{[x]}{n}\right] = \left[\dfrac{x}{n}\right]$.

vi) Nếu n là số tự nhiên thì $n[x] \leqslant [nx]$.

vii) Với mọi số tự nhiên n và q ($q \neq 0$) thì $q\left[\dfrac{n}{q}\right] \leqslant n$.

Chương 2.

Dãy số và tính chính phương

Trong chương này đề cập tới một số bài toán về tính chính phương của các phần tử trong một dãy số. Nội dung chính của các bài toán này như sau: Cho một dãy số với công thức tổng quát cho dưới dạng truy hồi, bài toán yêu cầu chứng minh phần tử nào đó của dãy là số chính phương hoặc phải tìm số chính phương trong dãy đã cho. Trong các dãy số nguyên, có nhiều dãy số mà tất cả các phần tử của nó đều là số chính phương, nhưng việc xác định số hạng tổng quát của dãy số đó lại là một vấn đề rất khó khăn. Trong việc xác định công thức tổng quát, nhiều bài toán ta phải mò mẫm, dự đoán công thức rồi dùng phương pháp quy nạp để chứng minh. Chúng ta xét một số thí dụ sau.

Bài toán 1. Dãy số không âm $\{u_n\}$, $n = 0, 1, 2, ...$ thoả mãn các điều kiện sau:
i) $u_1 = 1$;
ii) $u_{m+n} + u_{m-n} = \dfrac{1}{2}(u_{2m} + u_{2n}), \quad \forall m \geq n; \quad m, n \in \mathbb{N}$.
Chứng minh mọi phần tử của dãy là số chính phương.

Lời giải

Lấy m = n = 0, thì từ tính chất ii) của dãy ta có

$$u_0 + u_0 = \frac{1}{2}(u_0 + u_0) \Rightarrow 2u_0 = u_0 \Rightarrow u_0 = 0.$$

Lấy $m = 1, n = 0$, thì từ tính chất ii) lại có

$$u_1 + u_1 = \frac{1}{2}(u_2 + u_0) \Rightarrow 2(u_1 + u_1) = u_2 \text{ (do } u_0 = 0).$$

Vì $u_1 = 1$ nên từ đó suy ra $u_2 = 4$. Như thế $u_0 = 0^2, u_1 = 1^2, u_2 = 2^2$.

Ta sẽ chứng minh $u_n = n^2$ bằng quy nạp.

Giả sử điều khẳng định đã đúng đến $n = k$.

Lấy $m = k, n = 0$ thì từ tính chất ii) ta có

$$u_k + u_k = \frac{1}{2}(u_{2k} + u_0) \Rightarrow u_{2k} = 4u_k.$$

Vì thế theo giả thiết quy nạp có

$$u_{2k} = 4k^2. \tag{1}$$

Lấy $m = k, n = 1$, và vẫn theo tính chất ii) ta có

$$u_{k+1} + u_{k-1} = \frac{1}{2}(u_{2k} + u_2).$$

Từ đó suy ra

$$u_{k+1} = \frac{1}{2}u_{2k} + \frac{1}{2}u_2 - u_{k-1} \tag{2}$$

Theo (1) thì $u_{2k} = 4k^2$, còn theo giả thiết quy nạp thì $u_2 = 2^2, u_{k-1} = (k-1)^2$. Thay lại vào (2) ta được:

$$u_{k+1} = \frac{1}{2}4k^2 + \frac{1}{2}.4 - (k-1)^2 = 2k^2 + 2 - k^2 + 2k - 1 = (k+1)^2.$$

Vậy điều khẳng định cũng đúng khi $n = k + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp suy ra $u_n = n^2, \quad \forall n = 0, 1, 2, ...$ Như vậy mọi số hạng của dãy số đã cho đều là số chính phương (đpcm).

Bài toán 2. Dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = -1 \\ u_n = -u_{n-1} - 2u_{n-2};\ n \geq 3. \end{cases}$$

Chứng minh rằng số $a = 2^{2006} - 7u_{2004}^2$ là số chính phương.

Lời giải

Đặt $v_n = 2^{n+1} - 7u_{n-1}$ thì $a = v_{2005} = 2^{2006} - 7u_{2004}^2$.

Ta sẽ chứng minh rằng:

$$v_n = (2u_n + u_{n-1})^2, \forall\ n = 2, 3, ... \qquad (3)$$

Ta chứng minh bằng quy nạp như sau:

Khi $n = 2$, theo cách xác định thì $v_2 = 2^3 - 7u_1^2 = 8 - 7 = 1$.

Mặt khác $(2u_2 + u_1) = (-2 + 1)^2 = 1$. Vì thế $v_2 = (2u_2 + u_1)^2$. Công thức (3) đúng khi $n = 2$. Giả sử (3) đã đúng đến $n = k$ $(k \geq 2)$, tức là:

$$v_k = (2u_k + u_{k-1})^2.$$

Xét khi $n = k + 1$. Theo cách xác định dãy, thì

$$v_{k+1} = 2^{k+2} - 7u_k^2.$$

Theo cách xác định dãy $\{u_n\}$, ta có

$$\begin{aligned}(2u_{k+1} + u_k)^2 &= [2(-u_k - 2u_{k-1}) + u_k]^2 = (-u_k - 4u_{k-1})^2 = u_k^2 + 8u_ku_{k-1} + 16u_{k-1}^2 = \\ &= 2(4u_k^2 + 4u_ku_{k-1} + u_{k-1}^2) + 14u_{k-1}^2 - 7u_k^2 = 2(2u_k + u_{k-1})^2 + 14u_{k-1}^2 - 7u_k^2 = \\ &= 2v_k + 14u_{k-1}^2 - 7u_k^2 = 2(2^{k+1} - 7u_{k-1}^2) + 14u_{k-1}^2 - 7u_k^2 = 2^{k+2} - 7u_k^2 = \\ &= v_{k+1}.\end{aligned}$$

Vậy: $v_{k+1} = (2u_{k+1} + u_k)^2$.

Như vậy công thức (3) cũng đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp toán học thì (3) đúng $\forall n = 2, 3, ...$

Từ (3) trực tiếp suy ra mọi số hạng của dãy $\{v_n\}$ đều là số chính phương.

Từ đó suy ra $a = 2^{2006} - 7u_{2004}^2$ là số chính phương. Đó chính là (đpcm).

Bài toán 3. Dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1;\ u_2 = 2 \\ u_{n+1} = u_n(u_n - 1) + 2;\ n = 2, 3, ... \end{cases}$$

Lập dãy số mới $\{s_n\}$ như sau:

$$s_n = (u_1^2 + 1)(u_2^2 + 1)...(u_n^2 + 1) - 1,\ \forall n = 1, 2, ...$$

Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy $\{s_n\}$ đều là số chính phương.

Lời giải

Ta sẽ chứng minh rằng:

$$s_k = (u_{k+1} + 1)^2. \tag{4}$$

Thật vậy với $k = 1$ thì $s_1 = (u_1^2 + 1) - 1 = u_1^2 = 1^2 = (2-1)^2 = (u_2 - 1)^2$.

Vậy (4) đúng khi $k = 1$.

Giả sử (4) đúng đến $k = n$, tức là $s_n = (u_{n+1} - 1)^2$.

Xét với $k = n + 1$, ta có

$$\begin{aligned}
s_{n+1} &= (u_1^2 + 1)(u_2^2 + 1)...(u_n^2 + 1)(u_{n+1}^2 + 1) - 1 = (s_n + 1)(u_{n+1}^2 + 1) - 1 = \\
&= [(u_{n+1} - 1)^2 + 1](u_{n+1}^2 + 1) - 1 = [(u_{n+1}^2 + 1) - 2u_{n+1} + 1](u_{n+1}^2 + 1) - 1 = \\
&= (u_{n+1} + 1)^2 - 2u_{n+1}(u_{n+1}^2 + 1) + (u_{n+1} + 1) - 1 = \\
&= (u_{n+1}^2 + 1)^2 - 2u_{n+1}(u_{n+1}^2 + 1) + u_{n+1}^2 = \\
&= (u_{n+1}^2 + 1 - u_{n+1})^2.
\end{aligned}$$

Theo cách xác định dãy thì

$$u_{n+1}^2 + 1 - u_{n+1} = u_{n+1}(u_{n+1} - 1) + 1 = [u_{n+1}(u_{n+1} - 1) + 2] - 1 = u_{n+2} - 1.$$

Suy ra $s_{n+1} = (u_{n+1}^2 + 1 - u_{n+1})^2 = (u_{n+2} - 1)^2$.

Vậy (4) đúng khi $k = n + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp suy ra (4) đúng với mọi $k = 1, 2, ...$ Vì u_1, u_2 nguyên nên theo công thức truy hồi xác định dãy suy ra u_n nguyên với mọi n. Vì lẽ đó ta có s_k nguyên với mọi $k = 1, 2, ...$ Vậy mọi số hạng của dãy $\{s_n\}$ đều là số chính phương.

Trong các bài toán về tính chính phương của các phần tử trong dãy số, việc xác định được công thức số hạng tổng quát của dãy số được cho bởi công thức truy hồi giúp ta giải quyết được bài toán đã cho. Trong một số trường hợp ta có thể sử dụng phương pháp sai phân để tìm số hạng tổng quát.

Bài toán 4. Dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_0 = 3, u_1 = 17 \\ u_n = 6u_{n-1} - u_{n-2};\ n = 2, 3, ... \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mọi $n = 0, 1, 2, ...$ thì $v_n = \dfrac{u_n^2 - 1}{2}$ là số chính phương.

Lời giải

Xét phương trình đặc trưng:

$$x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $x_1 = 3 + \sqrt{8}$ và $x_2 = 3 - \sqrt{8}$. Vì thế số hạng tổng quát u_n có dạng:

$$u_n = a(3 + \sqrt{8})^n + b(3 - \sqrt{8})^n.$$

Từ $u_0 = 3, u_1 = 17$ suy ra hệ phương trình sau để xác định a, b

$$\begin{cases} a(3 + \sqrt{8})^0 + b(3 - \sqrt{8})^0 = 3 \\ (3 + \sqrt{8})^1 + b(3 - \sqrt{8})^1 = 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ a(3 + \sqrt{8}) + b(3 - \sqrt{8}) = 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2}(3 + \sqrt{8}) \\ b = \dfrac{1}{2}(3 - \sqrt{8}). \end{cases}$$

Vì vậy:

$$u_n = \frac{1}{2}\big[(3 + \sqrt{8})^{n+1} + (3 - \sqrt{8})^{n+1}\big].$$

Do đó ta có

$$v_n = \frac{1}{2}(u_n^2 - 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\Big\{\big[(3 + \sqrt{8})^{n+1} + (3 - \sqrt{8})^{n+1}\big]^2 - 4\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(3+\sqrt{8})^{n+1}-(3-\sqrt{8})^{n+1}}{2}\right]^2.$$

Áp dụng công thức nhị thức Newton ta có $(3 \pm \sqrt{8})^{n+1} = M \pm N\sqrt{2}$, ở đây M, N là các số nguyên dương.

Từ đó suy ra $\frac{1}{2}(u_n^2 - 1) = N^2$ (đpcm).

Bài toán 5. Cho dãy số $\{a_n\}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 2 \\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Tìm tất cả các giá trị của n để $a_n - 1$ là số chính phương.

Lời giải

Xét phương trình đặc trưng: $t^2 = 4t - 1$.

Phương trình này có hai nghiệm $t_1 = 2 + \sqrt{3},\ t_2 = 2 - \sqrt{3}$. Vì thế số hạng a_n của dãy có dạng:

$$a_n = \alpha(2+\sqrt{3})^n + \beta(2-\sqrt{3})^n \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Từ $a_0 = 1, a_1 = 2$ suy ra hệ phương trình sau để xác định α, β:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2(\alpha+\beta) + \sqrt{3}(\alpha - \beta) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{2}.$$

Vì vậy

$$a_n = \frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n].$$

Do

$$(2+\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)^2 = \Big(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\Big)^2.$$

$$(2-\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2 = \Big(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\Big)^2.$$

Nên suy ra

$$a_n - 1 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}\right] - 1 = \left[\frac{(\sqrt{3}+1)^n - (\sqrt{3}-1)^n}{(\sqrt{2})^{n+1}}\right]^2.$$

Để $a_n - 1$ là số chính phương thì

$$A_n := \frac{(\sqrt{3}+1)^n - (\sqrt{3}-1)^n}{(\sqrt{2})^{n+1}} \in \mathbb{Z}.$$

Ta lần lượt xét các trường hợp sau:

Nếu $n = 0 \Rightarrow A_1 = 0 \in \mathbb{Z}$.

Nếu $n = 1 \Rightarrow A_2 = 1 \in \mathbb{Z}$.

Nếu $n = 2k, k \in \mathbb{N}^*$, xét:

$$\frac{(\sqrt{3}+1)^n - (\sqrt{3}-1)^n}{(\sqrt{2})^{n+1}} = \frac{(2+\sqrt{3})^k - (2-\sqrt{3})^k}{\sqrt{2}} := b_k.$$

Ta có $2+\sqrt{3};\ 2-\sqrt{3}$ là các nghiệm của phương trình đặc trưng $t^2 = 4t - 1$ nên $\{b_k\}$ thoả:

$$b_{k+2} = 4b_{k+1} - b_k$$

mà $b_1 = \sqrt{6} \Rightarrow b_k \notin \mathbb{Q}, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Từ đó suy ra $a_n - 1$ không phải là số chính phương với $n = 2k, k \in \mathbb{N}^*$.

Nếu $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}^*$.

Ta có

$$\frac{(\sqrt{3}+1)^n - (\sqrt{3}-1)^n}{(\sqrt{2})^{n+1}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\left[\frac{(\sqrt{3}+1)^n - (\sqrt{3}-1)^n}{(\sqrt{2})^{n+1}}\right]^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2}[(2+\sqrt{3})^k - (2-\sqrt{3})^k].$$

Đặt: $c_k = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}[(2+\sqrt{3})^k - (2-\sqrt{3})^k], k \in \mathbb{N}^*$ thì dãy $\{c_k\}$ thoả mãn $c_{k+2} = 4c_{k+1} - c_k$.

Mà $c_1 = 5 \Rightarrow c_k \in \mathbb{Z}, \forall\ k \in \mathbb{N}^*$.

Vậy với $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ thì $a_n - 1$ là số chính phương.

Trong nhiều bài toán về số chính phương trong dãy số chúng ta không sử dụng được phương pháp sai phân để xác định số hạng tổng quát của dãy số. Chúng ta có thể sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ, cụ thể ta biến đổi công thức truy hồi của dãy số đã cho, tìm cách đặt ẩn phụ một cách thích hợp để đưa dãy số đã cho thành dãy số là cấp số cộng hoặc cấp số nhân hoặc thành một dãy số đơn giản hơn để khảo sát dãy số đã cho.

Bài toán 6. Cho dãy số xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1, \quad n = 1, 2, 3, ... \end{cases}$$

Chứng minh rằng, $\forall n$ nguyên dương, số $A_n = 4u_nu_{n+2} + 1$ là số chính phương.

Lời giải

Từ công thức truy hồi $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1$ ta suy ra $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 1$. Đặt $u_{n+2} - u_{n+1} = v_{n+2}$ Ta được $v_{n+2} = v_{n+1} + 1$ là một cấp số cộng với công bội $d = 1$.

Ta có $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \cdots + (u_2 - u_1) + u_1 = v_n + v_{n-1} + \cdots + v_2 + u_1$. Do đó theo tính chất của cấp số cộng ta có

$$u_n = \frac{[2v_2 + (n-2)d](n-1)}{2} + 1 = \frac{[2.2 + (n-2).1](n-1)}{2} + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vậy $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ với $n = 1, 2, ...$ Từ đó ta có

$$A_n = 4\frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{(n+2)(n+3)}{2} + 1 = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2.$$

Điều đó chứng tỏ rằng A_n là số chính phương với mọi n nguyên dương (đpcm).

Bài toán 7. Dãy số nguyên $\{u_n\}$ có tính chất sau:

$$u_{n+2} + u_{n-1} = 2(u_{n+1} + u_n), \quad \forall n = 1, 2, ...$$

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên M không phụ thuộc vào n sao cho với mọi $n = 1, 2, ...$, số $M + 4u_nu_{n+1}$ là số chính phương.

Lời giải

Từ điều kiện đã cho $u_{n+2} + u_{n-1} = 2(u_{n+1} + u_n)$ có thể viết lại dưới dạng dưới đây:

$$u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = u_{n+1} - u_n - u_{n-1} + 2u_n.$$

Đặt $v_n = u_{n+2} - u_{n+1} - u_n, \quad n = 1, 2, ..$ Ta có $v_n = v_{n-1} + 2u_n, \forall n = 2, 3, ...$

Từ đó $\forall n = 2, 3, ...$, thì

$v_n^2 = (v_{n-1} + 2u_n)^2 = v_{n-1}^2 + 4v_{n-1}u_n + 4u_n^2 = v_{n-1}^2 + 4(u_{n+1} - u_n - u_{n-1})u_n + 4u_n^2 =$
$= v_{n-1}^2 + 4u_{n+1}u_n - 4u_{n-1}u_n.$

Như vậy $\forall n = 2, 3, ...$, thì

$$v_n^2 - 4u_{n+1}u_n = v_{n-1}^2 - 4u_{n-1}u_n.$$

Đẳng thức chứng tỏ rằng đại lượng $v_n^2 - 4u_{n-1}u_n$ là hằng số không phụ thuộc n.

Gọi M là hằng số đó, tức là

$$M = v_n^2 - 4u_nu_{n+1}.$$

Khi đó rõ ràng $M + 4u_nu_{n+1}$ là số chính phương với $\forall n = 1, 2, ...$(đpcm).

Bài toán 8. Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 3 \\ u_{n+1} = (n+2)u_n - (n+1)u_{n-1}, \quad n = 2, 3, ... \end{cases}$$

Tìm tất cả các giá trị của n để u_n là số chính phương.

Lời giải

Với mỗi $n \geq 2$, ta đặt

$$v_n = u_n - u_{n-1}.$$

Khi đó nếu $n \geq 3$ thì

$$v_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2}.$$

Theo cách xác định dãy số $\{u_n\}$, thì $\forall n \geq 3$, ta có

$$u_n = (n+1)u_{n-1} - nu_{n-2} \Leftrightarrow u_n - u_{n-1} = n(u_{n-1} - u_{n-2}).$$

Từ đó ta có

$$v_n = nv_{n-1}.$$

Vì $v_2 = u_2 - u_1 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow v_3 = 3v_2 = 3.2 = 6 = 3!$.

Nên bằng quy nạp suy ra $v_n = n!, \ \forall\ n \geq 2$.

Với mọi $n \geq 2$ ta có

$u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} + u_{n-2}) + \cdots + (u_2 - u_1) + u_1 = v_n + v_{n-1} + v_{n-2} + \cdots + v_2 + u_1 =$

$$= n! + (n-1)! + \cdots + 2! + 1 = \sum_{k=1}^{n} k!, \ \forall\ n = 1, 2, ...$$

Suy ra

$$u_n = 1! + 2! + 3! + 4! + \sum_{k=5}^{n} k!,\ \forall\ k \geq 5.$$

Vì $\forall n \geq 5$ thì $k! = 1.2.3.4.5...k$ nên $k! \vdots 10$.

Do vậy

$$\sum_{k=5}^{n} k! \vdots 10,\ \forall\ k \geq 5.$$

Ta có $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33 \equiv 3 \pmod{10}$.

Vậy ta có $u_n \equiv 3 \pmod{10}$, $\forall\ n \geq 5$.

Vì số chính phương chỉ có thể tận cùng bằng $0, 1, 4, 5, 6, 9$. Nên u_n không thể là số chính phương với $n \geq 5$.

Ta có

$u_1 = 1! = 1 = 1^2$.

$u_2 = 1! + 2! = 1 + 2 = 3$ không phải là số chính phương.

$u_3 = 1! + 2! + 3! = 1 + 2 + 6 = 9 = 3^2$.

$u_4 = 1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$ không phải là số chính phương.

Tóm lại: Trong dãy số $\{u_n\}$ nói trên, chỉ có hai số hạng u_1 và u_3 là số chính phương.

Với những dãy số được cho dưới dạng số hạng tổng quát thì việc cần làm là phải biến đổi số hạng tổng quát theo nội dung yêu cầu của bài toán đặt ra và chứng minh chúng là các số nguyên. Ta xét bài toán sau.

Bài toán 9. Dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau:

$$u_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2, \quad n = 1, 2, ...$$

Chứng minh rằng mọi số hạng lẻ của dãy là số chính phương.

Lời giải

Ta có

$$u_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2 = \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right]^2.$$

Đặt
$$v_n=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n,\quad n=1,2,...$$
Rõ ràng $v_n>0$ với mọi $n=1,2,...$ và ta có
$$v_{n+2}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+2}=$$
$$=\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\right]\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)-$$
$$-\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n}-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n}\right].\frac{\sqrt{5}+1}{2}.\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\sqrt{5}\,v_{n+1}-v_n. \tag{5}$$
Từ (5) suy ra
$$v_n=\begin{cases}\in\mathbb{N} & \text{nếu } n \text{ là số lẻ}\\ m\sqrt{5}, m\in\mathbb{Z} & \text{nếu } n \text{ là số chẵn.}\end{cases} \tag{6}$$
Thật vậy, ta có $v_1=1, v_2=\sqrt{5}$, vậy khẳng định đã đúng với $n=1,2.$

Giả sử khẳng định đã đúng đến $n=2k$, khi đó theo (5) ta có
$$v_{2k+1}=\sqrt{5}v_{2k}-v_{2k-1}=5m-v_{2k-1}\in\mathbb{Z}.$$
(Vì theo giả thiết quy nạp thì $v_{2k}=m\sqrt{5}$ với $m\in\mathbb{Z}$, và $v_{2k-1}\in\mathbb{Z}$).

Ta lại có $v_{2k+2}=\sqrt{5}v_{2k+1}-v_{2k}$.

Do $v_{2k+1}\in\mathbb{Z}, v_{2k}=\sqrt{5}m$ với $m\in\mathbb{Z}$ nên $v_{2k+2}=\sqrt{5}h$ với $h\in\mathbb{Z}$. Như vậy điều khẳng định cũng đúng với $n=2k+1,2k+2$. Theo nguyên lí quy nạp suy ra (6) đúng $\forall n$.

Từ (6) suy ra nếu n lẻ thì do $v_n\in\mathbb{Z}$, nên $u_n=m^2$ là số chính phương.

Như vậy mọi số hạng lẻ của dãy $\{u_n\}$ đều là số chính phương (đpcm).

Bài toán 10. Dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau:
$$u_n=2^8+2^{11}+2^n, n=1,2,...$$
Tìm tất cả các số hạng của dãy mà là số chính phương.

Lời giải

Giả sử số hạng u_k của dãy là số chính phương, điều đó có nghĩa là:

$$2^8 + 2^{11} + 2^k = a^2,\ a \in \mathbb{Z}.$$

Từ đó suy ra

$$2^k = a^2 - (2^8 + 2^{11}) = a^2 - (256 + 2048) =$$

$$= a^2 - 2304 = a^2 - 48^2 = (a + 48)(a - 48). \tag{7}$$

Từ (7) suy ra

$$\begin{cases} a + 48 = 2^p \\ a - 48 = 2^q, \end{cases}$$

trong đó p, q là các số tự nhiên, với $p + q = k, p > q$.
Từ đó ta có $2^p - 2^q = 96$ hay $2^q(2^{p-q} - 1) = 2^5.3 \Rightarrow q = 5$ và $2^{p-q} - 1 = 3$

$$\Rightarrow p - q = 2 \Rightarrow p = 7 \Rightarrow k = 5 + 7 = 12.$$

Thử lại ta có

$$2^8 + 2^{11} + 2^{12} = 6400 = 80^2.$$

Vậy số hạng u_{12} là số hạng duy nhất của dãy đã cho là số chính phương.

Trong bài toán sau, trong cách giải đã biến đổi khéo léo điều kiện đã cho để dẫn đến một phương trình bậc hai có nghiệm nguyên mà biệt số Δ chính là biểu thức cần chứng minh là số chính phương.

Bài toán 11. Cho dãy số nguyên dương $\{u_n\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 45 \\ u_{n+2} = 45u_{n+1} - 7u_n; \quad n = 0, 1, 2... \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mọi $n = 0, 1, 2, ...$ thì

$$A_n = 1997u_n^2 + 4.7^{n+1}$$

là số chính phương.

Lời giải

Ta sẽ chứng minh rằng với mọi $n = 0, 1, 2, ...$

$$u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = 7^{n+1}. \tag{8}$$

Nếu $n = 0$, thì

$$u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = u_1^2 - u_0 u_2 = 45^2 - (45u_1 - 7u_0) = 45^2 - (45^2 - 7) = 7 = 7^{0+1}.$$

Vậy (8) đúng khi $n = 0$.

Nếu $n = 1$ thì

$$\begin{aligned}u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = u_2^2 - u_1 u_3 &= (45u_1 - 7u_0)^2 - 45(45u_2 - 7u_1) = \\ &= (45u_1 - 7)^2 - 45[45(45u_1 - 7u_0) - 7u_1] = \\ &= 45^2 u_1^2 - 45.14u_1 + 7^2 - 45(45^2 u_1 - 7.45 - 7u_1) = \\ &= 45^4 + 7^2 - 14.45^2 - 45^4 + 14.45^2 = 7^2 = 7^{1+1}.\end{aligned}$$

Vậy (8) đúng khi $n = 1$.

Giả sử (8) đúng đến k tức là:

$$u_{k+1}^2 - u_k u_{k+2} = 7^{k+1}. \tag{9}$$

Xét khi $n = k + 1$. Ta có

$$u_{k+2}^2 - u_{k+1} u_{k+3} = u_{k+2}^2 - u_{k+1}(45u_{k+2} - 7u_{k+1}) = u_{k+2}^2 - 45u_{k+1}u_{k+2} + 7u_{k+1}^2.$$

Áp dụng giả thiết quy nạp (9), ta có

$$\begin{aligned}u_{k+2}^2 - u_{k+1} u_{k+3} &= u_{k+2}^2 - 45u_{k+1}u_{k+2} + 7(7^{k+1} + u_k u_{k+2}) = \\ &= 7^{k+2} - 45u_{k+1}u_{k+2} + 7u_k u_{k+2} + u_{k+2}^2 = \\ &= 7^{k+2} + u_{k+2}(u_{k+2} - 45u_{k+1} + 7u_k = \\ &= 7^{k+2} + u_{k+1}[u_{k+2} - (45u_{k+1} - 7u_k)].\end{aligned}$$

Do $u_{k+2} = 45u_{k+1} - 7u_k$, nên suy ra $u_{k+2}^2 - u_{k+1}u_{k+3} = 7^{k+2}$.

Vậy (8) cũng đúng khi $n = k + 1$. Theo nguyên lí quy nạp toán học thì (8) đúng với mọi $n = 0, 1, 2, ...$

Từ (8) và áp dụng công thức truy hồi xác định dãy, ta có

$$u_{n+1}^2 - u_n(45u_{n+1} - 7u_n) - 7^{n+1} = 0 \Rightarrow u_{n+1}^2 - 45u_n u_{n+1} + 7u_n^2 - 7^{n+1} = 0.$$

Đẳng thức đó chứng tỏ rằng phương trình bậc hai

$$x^2 - 45u_n x + 7u_n^2 - 7^{n+1} = 0.$$

có ngiệm nguyên u_{n+1}. Vì lẽ đó biệt thức
$\triangle = 45^2u_n^2 - 4.7u_n^2 + 4.7^{n+1} = 1997u_n^2 + 4.7^{n+1} = A_n$ phải là số chính phương.
Vậy A_n là số chính phương với mọi $n = 0, 1, 2, ...$ (đpcm).

Vận dụng phương pháp phản chứng cùng những suy luận lôgic cũng là những công cụ đắc lực trong việc giải các bài toán về tính chính phương trong dãy số. Ta xét bài toán sau.

Bài toán 12. Cho dãy số $\{p_n\}$, trong đó $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots$ là dãy tất cả các số nguyên tố. Chứng minh rằng giữa hai số $p_1 + p_2 + \cdots + p_k$ và $p_1 + p_2 + \cdots + p_k + p_{k+1}$ luôn tìm được một số bình phương đúng.

Lời giải

Ta chứng minh một điều khẳng định tổng quát hơn:
Mệnh đề: Giả sử $p_1, p_2, p_3, \cdots$ là dãy số nguyên tố sao cho $p_1 = 2, p_2 \geq 3$, $p_{n+1} - p_n \geq 2, \forall n = 2, 3, ...$ Khi đó trong số các số tự nhiên giữa số $s_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ và $s_{n+1} = p_1 + p_2 + \cdots + p_n + p_{n+1}$ luôn tìm được một số bình phương đúng.
Chứng minh mệnh đề:
Giả thiết phản chứng tồn tại một số tự nhiên n sao cho giữa hai số s_n và s_{n+1} không có số bình phương đúng nào, tức là tồn tại số tự nhiên k sao cho:

$$k^2 \leqslant s_n < s_{n+1} \leqslant (k+1)^2 \tag{10}$$

Suy ra

$$p_{n+1} = s_{n+1} - s_n \leqslant (k+1)^2 - k^2 = 2k + 1 \Rightarrow p_n \leqslant p_{n+1} - 2 \leqslant 2k - 1.$$

Quá trình ấy cứ tiếp tục và ta có

$$p_{n-1} \leqslant 2k - 3;$$

$$p_{n-2} \leqslant 2k - 5;$$

$$\ldots$$

$$p_2 = 3 \leqslant x;$$

$$p_1 = 2 \leqslant x - 2.$$

Chỉ có hai khả năng xảy ra với số x:

i) Nếu $x = 3$, thì do $p_2 \geq 3 \Rightarrow p_2 = 3$ và từ đó suy ra tất cả các bất đẳng thức trên đều trở thành đẳng thức ($p_{n+1} = 2k + 1, p_{n-1} = 2k - 3, ..., p_2 = 3$). Từ đó suy ra

$$s_{n+1} = 2 + p_2 + \cdots + p_{n+1} > 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k + 1) = (k + 1)^2. \tag{11}$$

Rõ ràng (11) mâu thuẫn với vế trái của (10)

ii) Nếu $x \geq 5$ thì do $x - 2 \geq 3$ ta suy ra

$$s_n = 2 + p_2 + \cdots + p_n < 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2.$$

Rõ ràng điều này mâu thuẫn với vế trái của (10).

Tóm lại trong mọi khả năng ta luôn đi đến mâu thuẫn, vậy giả thiết chứng minh là sai, suy ra mệnh đề được chứng minh và bài toán đã được giải.

Chương 3.

Dãy số và tính chia hết

3.1. Dãy số và số nguyên tố

Số nguyên tố là là số tự nhiên lớn hơn 1 không có ước nào khác ngoài 1 và chính nó. Định lí Euclide đã chỉ ra tập hợp các số nguyên tố là vô hạn. Nếu chúng ta đánh số các số nguyên tố theo thứ tự tăng dần $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, ...p_n < p_{n+1}, ...$thì cho đến nay người ta cũng chưa tìm được một biểu thức tổng quát nào cho số nguyên tố p_n thứ n theo chỉ số n của nó, nếu xét khoảng cách giữa hai số nguyên tố liên tiếp, tức là xét hiệu $d_n = p_{n+1} - p_n$. Ta thấy ngay rằng $p_1 = 2$ và $p_2 = 3$ là cặp số nguyên tố liên tiếp có khoảng cách $d_1 = 1$ còn lại với $n > 1$ thì $d_n \geq 2$, với $n > 1$ thì d_n là một số chẵn vì mọi cặp số nguyên tố liên tiếp đều là 2 số lẻ. Nếu $d_n = 2$ thì ta nói p_n và p_{n+1} là cặp số nguyên tố sinh đôi. Có bao nhiêu cặp số nguyên tố sinh đôi là một vấn đề cho đến nay chưa được giải quyết, với $d_n > 2$ ta có bài toán sau.

Bài toán 1. Tìm 9 số nguyên tố nhỏ hơn 2002 lập thành một cấp số cộng.

Lời giải

1) Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. Nếu ba số nguyên tố lớn hơn 3 lập thành một cấp số cộng thì công sai d chia hết cho 6.

Chứng minh bổ đề. Rõ ràng mọi số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng $6n + 1$

hoặc $6n+5$.

Vì ba số nguyên tố lớn hơn 3 lập thành cấp số cộng, nên theo nguyên lí Dirichlet phải có ít nhất hai số cùng dạng tức là hiệu số của hai số đó chia hết cho 6. Gọi d là công sai của cấp số cộng, thì hiệu của hai số hoặc là d hoặc là $2d$. Như thế hoặc là $d \vdots 6$ hoặc là $2d \vdots 6$ vì công sai d là hiệu của hai số nguyên tố lớn hơn 3 nên nó là số chẵn. Vì $d \vdots 3$ và $d \vdots 2$ nên $d \vdots 6$. Đó chính là (đpcm).

2) Giả sử ta có 9 số nguyên tố lập thành một cấp số cộng với công sai d. Rõ ràng trong 9 số đó bao giờ cũng tồn tại 3 số nguyên tố lớn hơn 3 lập thành một cấp số cộng. Theo bổ đề ta phải có $d \vdots 6$.

Ta sẽ chứng minh $d \vdots 5$. Thật vậy gọi số hạng đầu tiên của cấp số cộng là a_1.

Xét 5 số sau đây:

$$a_1+4d, a_1+5d, a_1+6d, a_1+7d, a_1+8d.$$

Nếu $d \not\vdots\, 5$ thì $(d,5)=1$ nên $a_1+id, i=4,5,6,7,8$ là hệ thặng dư đầy đủ $\pmod 5$. Vậy trong 5 số đó phải có một số chia hết cho 5. Điều này vô lí vì 5 số đó đều là số nguyên tố lớn hơn 5.

Bằng lập luận hoàn toàn tương tự, thì $d \vdots 7$. Do 5, 6, 7 nguyên tố cùng nhau.

Vậy $d \vdots 210 \Rightarrow d=210k$, với k là nguyên dương.

Ta có $a_9=a_1+8d<2002 \Rightarrow d<250$, mà $d=210k \Rightarrow d=210$.

Do $d=210 \Rightarrow a_1<322$.

- Nếu $a_1=11$, thì $a_2=11+d=221 \Rightarrow a_2 \vdots 13$. Vậy loại trường hợp này.
- Nếu $a_1=13$, thì $a_4=13+3d=1272 \Rightarrow a_4 \vdots 19$. Vậy loại trường hợp này.

Gọi τ_{11}, τ_{13} tương ứng là số dư của a_1, khi chia cho 11 và 13. Theo công thức của cấp số cộng, ta có

$a_n=a_1+(n-1)d=a_1+(n-1)210=a_1+(n-1)(11.19+1)=k.11+\tau_{11}+(n-1)$, k nguyên dương.

Do $1 \leqslant n-1 \leqslant 8$ nên $\tau_{11} \notin \{3,4,5,...,10\}$.

Thật vậy, nếu $\tau 11=s$ với $3 \leqslant s \leqslant 10$), thì $a_{12-s} \vdots 11$, với chú ý rằng $3 \leqslant s \leqslant 10$ $\Rightarrow 2 \leqslant 12-s \leqslant 9$ vì thế τ_{11} chỉ có thể là 1 hoặc 2. Mặt khác, ta lại có biểu diễn: $a_n=a_1+(n-1)d=a_1+(n-1)210=a_1+(n-1)(13.16+2)=m.11+\tau_{13}+2(n-1)$, m nguyên dương.

Do $1 \leqslant n-1 \leqslant 8 \Rightarrow 2 \leqslant 2(n-1) \leqslant 16$ nên:

$$\tau_{13} \notin \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12\}.$$

(Chứng minh tương tự như trên), vì thế τ_{13} chỉ có thể là 2,4,6,8.

Vậy a_1 phải là số nguyên tố nhỏ hơn 322 và khi chia cho 11 chỉ có thể dư 1 hoặc 2 và khi chia cho 13 chỉ có thể dư 2,4,6,8. Bằng phép thử trực tiếp ta thấy a_1 chỉ có thể là 67,199, 277.

Nếu $a_1 = 67$ thì $a_4 = 697 \vdots 17$. Vậy $a_1 = 67$ bị loại.

Nếu $a_1 = 277$ thì $a_3 = 697 \vdots 17$. Vậy $a_1 = 277$ bị loại.

Nếu $a_1 = 199$ bằng phép thử trực tiếp ta thu được dãy số sau:

$$199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879.$$

9 số ấy là 9 số nguyên tố và lập thành cấp số cộng. Đó là nghiệm duy nhất cần tìm của bài toán.

Bài toán 2. Biết rằng 10 số nguyên tố sau đây lập thành cấp số cộng với công sai $d = 210$:

$$\div 199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089.$$

Chứng minh rằng không tồn tại một cấp số cộng gồm 11 số nguyên tố với công sai d thoả mãn: $1 < d < 2310$.

Lời giải

Giả sử phản chứng tồn tại cấp số cộng gồm 11 số nguyên tố $x_i = a+id$ $(i = 0, 1, ..., 10)$ với công sai d thoả mãn $1 < d < 2310$.

Ta nhận xét rằng nếu p là số nguyên tố và $(d, p) = 1$ thì dãy số $\{a+id\}(i = 0, 1, ..., p)$ là hệ thặng dư đầy đủ $\pmod p$ do đó phải có một số chia hết cho p. Từ nhận xét đó ta có $d \vdots 5$. Thật vậy gọi số hạng đầu tiên của cấp số cộng là a. Xét 5 số sau đây:

$$a+6d, a+7d, a+8d, a+9d, a+10d.$$

Nếu $d \not\vdots 5$ thì $(d, 5) = 1$ nên $a+id, i = 0, 1, 2, 3, 4$ là hệ thặng dư đầy đủ $\pmod 5$. Vậy trong 5 số đó phải có một số chia hết cho 5 điều này vô lí vì 5 số đó đều là số nguyên tố lớn hơn 5.

Bằng lập luận hoàn toàn tương tự, thì $d \vdots 2, 3, 7 \Rightarrow d \vdots 2.3.5.7 = 210$.

Nếu $d \vdots 11$ thì $d \vdots 2.3.5.7.11 = 2310$. Vậy $d \geq 2310$. Trái với giả thiết. Vậy $(d, 11) = 1$.

Theo nhận xét trên trong dãy số nguyên tố $\{x_i\}$ $(i = 0, 1, ..., 10)$ phải có một số chia hết cho 11. Suy ra số đó là 11.

Vậy $x_i = 11 + id$ $(i = 0, 1, ..., 10)$ với $d = 210k$ $(k = 1, 2, ..., 10)$.

Tuy nhiên, với

$$d = 210 \Rightarrow x_1 = 11 + 210 = 221 = 13.17;$$

$$d = 420 \Rightarrow x_2 = 11 + 2.420 = 851 = 23.37;$$

$$d = 630 \Rightarrow x_2 = 11 + 2.630 = 1271 = 31.41;$$

$$d = 840 \Rightarrow x_1 = 11 + 840 = 851 = 23.37;$$

$$d = 1050 \Rightarrow x_3 = 11 + 3.1050 = 3161 = 109.29;$$

$$d = 1260 \Rightarrow x_1 = 11 + 1260 = 1271 = 31.41;$$

$$d = 1470 \Rightarrow x_2 = 11 + 2.1470 = 2951 = 227.13;$$

$$d = 1680 \Rightarrow x_1 = 11 + 1680 = 1691 = 89.19;$$

$$d = 1890 \Rightarrow x_2 = 11 + 2.1890 = 3791 = 223.17;$$

$$d = 2100 \Rightarrow x_4 = 11 + 4.2100 = 8411 = 13.647.$$

Vậy dãy số $\{a + id\}$ $(i = 0, 1, 2, ..., 10)$ không phải là gồm toàn các số nguyên tố. Vậy giả thiết phản chứng là sai và đó là (đpcm).

Bài toán 3. Hỏi có tồn tại hay không một dãy vô hạn các số nguyên tố $p_1, p_2, p_3, ...$ thoả mãn đồng thời hệ điều kiện sau:

i) $p_{k+1} > p_k, \ \forall k \geq 1$;

ii) $\mid p_{k+1} - 2p_k \mid = 1, \forall k \geq 1$.

Lời giải

Giả thiết tồn tại dãy vô hạn các số nguyên tố $p_1, p_2, p_3, ...$ thoả mãn các yêu cầu đề bài.

Do dãy là vô hạn nên không giảm tính tổng quát có thể cho là $p_1 > 3$. Xét số hạng p_k tuỳ ý $(k \geq 1)$.

Nếu $p_k \equiv -1 \pmod 3$ thì $p_{k+1} = 2p_k + 1$. Thật vậy, vì $| p_{k+1} - p_k |= 1$ nên:

a) Hoặc là $p_{k+1} - 2p_k = 1 \Rightarrow p_{k+1} = 2p_k + 1$ và điều nhận xét là đúng.

b) Hoặc là $p_{k+1} - 2p_k = -1 \Rightarrow p_{k+1} = 2p_k - 1$.

Do $p_k \equiv -1 \pmod 3 \Rightarrow 2p_k - 1 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow p_{k+1} \vdots 3$. Điều này mâu thuẫn vì p_{k+1} là số nguyên tố lớn hơn 3. Vì thế trường hợp b) không sảy ra.

Như thế ta chỉ ra rằng nếu $p_k \equiv -1 \pmod 3$ thì $p_{k+1} = 2p_k + 1$.

Hoàn toàn tương tự, ta có nếu $p_k \equiv 1 \pmod 3$ thì $p_{k+1} = 2p_k - 1$.

Từ đó suy ra

1) Nếu $p_1 \equiv -1 \pmod 3$ thì $p_{k+1} = 2p_k + 1, \forall k \geq 1$.

Thật vậy, nếu $p_1 \equiv -1 \pmod 3$, theo trên ta có $p_2 = 2p_1 + 1$. Do $p_1 \equiv -1 \pmod 3$ nên $2p + 1 \equiv -1 \pmod 3$, tức là $p_2 \equiv -1 \pmod 3$.

Từ đó bằng quy nạp suy ra $p_{k+1} \equiv -1 \pmod 3$, tức là $p_k \equiv -1 \pmod 3$ và từ đó cũng bằng quy nạp suy ra $p_{k+1} = 2p_k + 1, \forall k \geq 1$.

Bằng quy nạp ta có

$$p_k = 2^{k-1}p_1 + (2^{k-1} - 1) \Rightarrow p_k \equiv (2^{k-1} - 1) \pmod{p_1}, \forall k \geq 1.$$

Do $p_1 > 3$, nên với $k = p_1$ ta có $p_{p_1} \equiv (2^{p_1-1} - 1) \pmod{p_1}$.

Do p_1 là số nguyên tố nên theo định lí Fermat nhỏ ta có $2^{p_1-1} - 1 \vdots p_1$.

Từ đó đi đến $p_{p_1} \vdots p_1$. Điều này mâu thuẫn với tính nguyên tố của p_{p_1}.

2) Nếu $p_1 \equiv 1 \pmod 3$, thì $p_{k+1} = 2p_k - 1, \forall k \geq 1$.

(chứng minh tương tự như phần 1).

Bằng quy nạp ta có

$$p_k = 2^{k-1}p_1 - (2^{k-1} - 1), \forall k > 1 \Rightarrow p_k \equiv -(2^{k-1} - 1) \pmod{p_1}, \forall k > 1.$$

Do $p_1 > 3$, nên với $k = p_1$ thì

$$p_{p_1} \equiv -(2^{p_1-1} - 1) \pmod{p_1}.$$

Theo định lí Fermat nhỏ suy ra $p_{p_1} \vdots p_1$. Điều này mâu thuẫn với p_1 là số nguyên tố. Vậy giả thiết tồn tại dãy vô hạn các số nguyên tố $p_1, p_2, p_3, ...$ thoả mãn các yêu cầu của đề bài là sai. Như vậy câu trả lời ở đây là: Không.

Như vậy là có cặp số nguyên tố rất gần nhau (p_1 và p_2) và có những cặp số nguyên tố liên tiếp có khoảng cách bằng 2, song ta cũng chứng minh được rằng với mỗi số tự nhiên m lớn hơn 1 tuỳ ý cho trước ắt có những cặp số nguyên tố liên tiếp có khoảng cách lớn hơn m. Ta xét bài toán sau:

Bài toán 4. Cho dãy số tự nhiên vô hạn $1, 2, 3, ...$, và k là một số tự nhiên cho trước. Hỏi có thể trích ra từ dãy trên một dãy con gồm k số hạng, sao cho chúng là k số tự nhiên liên tiếp và mọi số của dãy con đều không phải là số nguyên tố được không ?

Lời giải

Xét k số sau đây:

$$(k+1)! + 2; (k+1)! + 3; (k+1)! + 4; ...; (k+1)! + (k+1).$$

Đó là k số tự nhiên liên tiếp.
Mặt khác, nếu lấy m tuỳ ý sao cho $2 \leq m \leq k+1$, thì ta có

$$(k+1)! + m = 1.2....m(m+1)...(k+1) + m$$

$$= m[1.2....(m-1)(m+1)...(k+1) + 1].$$

Từ đó suy ra $(k+1)! + m \vdots m \Rightarrow (k+1)! + m$ không phải là số nguyên tố. Vậy đó là dãy con cần tìm. Với bài toán trên ta có câu trả lời khẳng định.

Người ta đặt vấn đề xem xét có hay không một dãy số lấy vô số giá trị nguyên tố? Đối với nhị thức bậc nhất ta có định lí: "Với hai số tự nhiên a, b nguyên tố cùng nhau, nhị thức bậc nhất $ax + b$ lấy vô số giá trị nguyên tố ". Định lí này được nhà toán học Dirichlet người Đức chứng minh năm 1937. Người ta cũng chứng minh được rằng với a xác định và $b < a$ thì các số nguyên tố dạng $an + b$ là vô hạn. Chẳng hạn $a = 4$ ta có vô số số nguyên tố dạng $4n + 1$ và vô số số nguyên tố dạng $4n + 3$. Ta xét bài toán sau:

Bài toán 5. Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau:

$$u_n = 4n + 3, \; n = 1, 2, ...$$

Chứng minh rằng trong dãy số trên có vô số số hạng của dãy là số nguyên tố.

Lời giải

Trước hết ta xét bổ đề sau đây.

Bổ đề. Mọi số nguyên dương n có dạng $4k+3, k \in \mathbb{N}$, đều có ít nhất một ước số nguyên tố cũng có dạng $4p+3, p \in \mathbb{N}$.

Chứng minh: Chỉ có hai khả năng sảy ra:

i)Nếu $n = 4k+3$ là một số nguyên tố, thì bổ đề hiển nhiên đúng.

ii)Nếu n là hợp số. Khi đó $n = a.b$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $1 < a, b < n$. Do n là lẻ nên a, b đều lẻ, suy ra a và b có dạng $4p+1$ hoặc $4p+3$.

Nếu cả hai số a và b đều có dạng $4p+1$ thì n có dạng:

$$n = (4p+1)(4q+1) = 4l+1,\ l \in \mathbb{N}.$$

Điều này trái với giả thiết vì n có dạng $4k+3$.

Giả sử a có dạng $4p+3$.

- Nếu a là số nguyên tố: Bổ đề được chứng minh.

- Nếu a là hợp số, lại tiếp tục lập luận như trên a phải có ước số có dạng $4p+3$.

Do quá trình phân tích là hữu hạn, vì thế số nguyên dương n phải có ít nhất một ước số nguyên tố có dạng $4p+3$. Bổ đề được chứng minh.

Bây giờ trở lại bài toán đã cho.

Lấy số nguyên dương $m > 4$ và xét số sau:

$$n = m! - 1 = (2.3.4...m) - 1.$$

Từ đó suy ra n có dạng:

$$n = 4\underbrace{(2.3.5...m-1)}_{k} + 3 = 4k+3.$$

Vì n có dạng $4k+3$, vậy theo bổ đề n có ít nhất một ước số nguyên tố p mà p có dạng $p = 4s+3$.

Từ dạng $n = 2.3.4...m - 1$ suy ra n không chia hết cho các số $2, 3, ..., m$,

mà $n \,\vdots\, p \Rightarrow p > m.$

Để chứng minh trong dãy $\{u_n\}$ có vô hạn số nguyên tố ta dựa vào kết quả trên và

làm như sau:
Chọn $m_1 = 4$. Khi đó theo trên ta có số nguyên tố $p_1 > m_1$ (tức $p_1 > 4$) mà p_1 có dạng $4k_1 + 3$.
Lấy $m_2 = p_1, (m_2 > 4)$. Theo kết quả trên ta có số nguyên tố p_2,
($p_2 > m_2$, tức là $p_2 > p_1$) mà p_2 có dạng $4k_2 + 3$.
Và quá trình ấy cứ tiếp diễn mãi. Như thế ta có dãy số nguyên tố $p_1 < p_2 < p_3 < ...$, trong đó $p_i = 4k_i + 3,\ k_i \in \mathbb{N}$. Điều đó có nghĩa là dãy vô hạn các số nguyên tố $\{p_i\}$ là dãy con của dãy $\{4k + 3\}$(đpcm).

Về vấn đề số nguyên tố, năm 1742 Goldbach và Ơle đã nêu ra giả thiết sau đây: "Mỗi một số chẵn lớn hơn 2 đều biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số nguyên tố".
Hơn 260 năm đã trôi qua nhưng đến nay giả thiết đó vẫn chưa được chứng minh hoàn chỉnh. Bây giờ chúng ta xét bài toán về sự phân tích một số tự nhiên thành tổng của hai số nguyên tố

Bài toán 6. Tìm dãy số tự nhiên liên tiếp nhiều số hạng nhất sao cho mỗi số hạng trong dãy là tổng của hai số nguyên tố.

Lời giải

Vì mỗi số hạng của dãy là tổng của hai số nguyên tố, nên mỗi số lẻ trong dãy là tổng của 2 và một số nguyên tố lẻ.
Giả sử dãy các số lẻ trong dãy số tự nhiên liên tiếp này là:

$$x_1 = 2 + p; x_2 = 2 + p + 2; x_3 = 2 + p + 4.$$

Khi đó $p, p + 2, p + 4, ...$ cũng là những số nguyên tố lẻ liên tiếp. Vậy trong 3 số đó phải có một số chia hết cho 3. Từ đó suy ra $p = 3$ suy ra $p+2 = 5; p+4 = 7; p+6 = 9$.
Vậy dãy số lẻ trong dãy số tự nhiên này chỉ có nhiều nhất 3 số hạng

$$x_1 = 2 + 3 = 5; x_2 = 2 + p + 2 = 7; x_3 = 2 + p + 4 = 9.$$

Mặt khác ta lại có

$$4 = 2 + 2; 6 = 3 + 3; 10 = 3 + 7.$$

Từ đó ta thấy dãy số trên có nhiều số hạng hơn dãy số thoả mãn đề bài mà dãy số lẻ chỉ gồn có 3 số lẻ liên tiếp. Vậy dãy số tự nhiên có nhiều số hạng nhất thoả mãn đề bài là dãy sau đây: 4,5,6,7,8,9,10.

Khi xét tính chia hết với các phần tử của dãy các số nguyên tố chúng ta cũng thu được một số kết quả thú vị sau.

Bài toán 7. Chứng minh rằng tồn tại dãy vô hạn $\{p_n\}(n = 1, 2, 3, ...)$ các số nguyên tố phân biệt có tính chất:

$$p_n \equiv 1 \pmod{1994^n}, \forall n = 1, 2, 3, ...$$

Lời giải

Đặt $p = 1999$ và chú ý rằng p là số nguyên tố. Xét dãy $\{A_n\}$ được xác định như sau:

$$A_n = 2^{p^n} - 1, n = 1, 2, 3, ...$$

Ta có

$$(2^{p^{n-1}})^0 + (2^{p^{n-1}})^1 + \cdots + (2^{p^{n-1}})^{p-1} = \frac{(2^{p^{n-1}})^p - 1}{2^{p^{n-1}} - 1} = \frac{2^{p_n} - 1}{2^{p_{n-1}}} = \frac{A_n}{A_{n-1}}.$$

Từ đó suy ra

$$A_n = A_{n-1}.B_{n-1}.$$

Với

$$B_{n-1} = \sum_{i=0}^{p-1} (2^{p^{n-1}})^i.$$

Giả sử p_n là ước nguyên tố của B_{n-1}, ta chứng minh rằng $A_{n-1} \not\vdots\, p_n$.

Thật vậy, giả thiết phản chứng $A_n \,\vdots\, p_n$, tức là $2^{p_{n-1}} \,\vdots\, p_n$.

Đặt $a = 2^{p_{n-1}}$ ta có $a \equiv 1 \pmod{p_n}$.

Ta có

$$B_{n-1} = \sum_{i=0}^{p-1} (2^{p^{n-1}})^i \Rightarrow B_{n-1} = \sum_{i=0}^{p-1} a^i \,\vdots\, p \pmod{p_n}.$$

Mặt khác, do p_n là ước nguyên tố của B_{n-1} nên $B_{n-1} \equiv 0 \pmod{p_n}$.

Từ đó ta có $p = p_n \Rightarrow a \equiv 1 \pmod{p}$.

Theo định lí Femat nhỏ ta có $a = 2^{p^{n-1}} \equiv 2 \pmod{p}$. Mâu thuẫn này chứng tỏ $A_{n-1} \not\vdots\, p_n$.

Rõ ràng từ cách xây dựng dãy $\{A_n\}$, ta có $A_n \vdots A_m$ nếu $n > m$. Như vậy nếu $n > m$ thì $A_n \vdots p_n$ nhưng $A_m \not\vdots\, p_n$. Nói riêng $\{p_n\}$ là dãy các số nguyên tố phân biệt.

Do $A_n \vdots p_n$ nên $2^{p^n} \equiv 1 \pmod{p)_n}$.

Gọi h_n là số nguyên dương nhỏ nhất để $2^{h_n} \equiv 1 \pmod{p)_n}$. Ta có

$$\begin{cases} p_n \vdots h_n & (*) \\ p_n - 1 \vdots h_n & (**) \end{cases}$$

Từ (*) suy ra $h_n = p^k$ với $k \leq n$. Nếu $k < n$ thì $2^{h_n} - 1 = 2^{p_k} - 1 = A_k \not\vdots\, p_n$, do đó $k = n$ tức là $h_n = p^n$.

Từ (**) suy ra $p_n \equiv 1 \pmod{p^n} \Rightarrow p_n \equiv 1 \pmod{1999^n}, \forall n = 1, 2, ...$ Đó là (đpcm).

Bài toán 8. Dãy số $\{p_n\}$ xác định như sau: $p_1 = 5$; với $n \geq 2$ thì p_n là thừa số nguyên tố lớn nhất của số $1 + p_1 p_2 ... p_{n-1}$. Chứng minh rằng $p_n \neq 7$ với mọi n.

Lời giải

Ta có $p_1 = 5 \Rightarrow 1 + p_1 = 6$ và 6 có thừa số nguyên tố lớn nhất là 3 nên $p_2 = 3$. Lại có $1 + p_1 p_2 = 16$. Vì $16 = 2^4 \Rightarrow p_3 = 2$. Do đó với mọi $k \leq 4$ thì

$$N_k = 1 + p_1 p_2 ... p_{k-1} = 1 + 5.3.2...p_{k-1}.$$

Vậy số N_k khi $k \geq 4$ sẽ không chia hết cho 2,3,5.

Từ đó suy ra $p_k \neq 2, p_k \neq 3, p_k \neq 5, \forall k \geq 4$. Giả sử tồn tại $k \geq 4$, để $p_k = 7$. Nếu thế thì

$$N_k = 1 + p_1 p_2 ... p_{k-1} = 7^r.$$

(Vì N_k khi khai triển ra thừa số nguyên tố không chứa thừa số 2, 3, 5 mà 7 lại là thừa số nguyên tố lớn nhất trong khai triển ấy)

Từ đó ta đi đến

$$p_1 p_2 .. p_{k-1} = 7^r - 1.$$

Vì $p_1 = 5 \Rightarrow 7^r \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow r = 4t, t \in \mathbb{N}$.

Lại có $7 \equiv -1 \pmod 4 \Rightarrow 7^r \equiv (-1)^{4t} \pmod 4 \Rightarrow 7^r \equiv 1 \pmod 4$. Như vậy $7^r - 1 \vdots 4$ hay

$$p_1 p_2 ... p_{k-1} \vdots 4.$$

Do $p_3 = 2$ nên suy ra

$$p_1 p_2 p_4 ... p_{k-1} \vdots 2.$$

Chú ý rằng $p_1 = 5; p_2 = 3$ và $p_4, ..., p_{k-1}$ đều khác 2 (và các p_i đều là các số nguyên tố) nên:

$$p_1 p_2 p_4 ... p_{k-1} \not\vdots 2.$$

Vậy ta dẫn đến mâu thuẫn. Vậy giả thiết phản chứng tồn tại $k \geq 4$ để $p_k = 7$ là sai. Như vậy ta có $p_k \neq 7, \forall k \geq 4.$. Ngoài ra $p_1 = 5, p_2 = 3, p_3 = 2$. Điều đó có nghĩa là $p_n \neq 7$ với mọi n. Đó là (đpcm).

3.2. Tính chia hết trong dãy số

Trong số học thì tính chất chia hết giữ một vị trí quan trọng trong lý thuyết số. Nó là cơ sở để đưa ra và giải quyết các bài toán về số nguyên tố, hợp số, ước chung lớn nhất, bội chung nhỏ nhất, lý thuyết đồng dư ..., với hai số nguyên a, b bất kỳ nếu tồn tại số nguyên q sao cho $a = bq$ khi đó ta nói a chia hết cho b, nếu a không chia hết cho b thì ta có phép chia có dư.Trong phần này ta xét đến tính chia hết của các phần tử trong một dãy số. Cho một dãy số thì các phần tử của nó có thể cùng chia hết cho cùng một số nào đó hoặc các phần tử chia hết cho số thứ tự của số đó, hoặc là chỉ có một số phần tử cùng chia hết cho một số cho trước. Sau đây ta xét một số dãy số mà các phần tử của nó cùng chia hết cho một số. Đối với những dãy số được cho bởi công thức số hạng tổng quát, ta thường dùng phương pháp quy nạp hoặc sử dụng các tính chất của phép chia hết để chứng minh. Chúng ta xét bài toán sau.

Bài toán 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, số

$$A_n = 3^{3n+3} - 26n - 27$$

chia hết cho 169.

Lời giải

Với $n = 0$ ta có $A_0 = 3^{3.0+3} - 26.0 - 27 = 0 \,\vdots\, 169$.

Vậy mệnh đề đúng với $n = 0$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ nghĩa là $A_k = 3^{3k+3} - 26k - 27$ chia hết cho 169. Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Ta có $A_{k+1} = 3^{3(k+1)+3} - 26(k+1) - 27 = 3^{3k+3} - 26k - 27 + 26.3^{3k+3} - 26 = A_k + 26.3^{3k+3} - 26 = A_k + 26.(3^{3(k+1)} - 1) = A_k + 26.(3^3 - 1)(27^k + 27^{k-1} + \cdots + 27 + 1) = A_k + 169.4.(27^k + 27^{k-1} + \cdots + 27 + 1)$.

Vậy $A_{k+1} \,\vdots\, 169$. Bài toán đã được chứng minh.

Trong dãy số khi xét đến tính chia hết của các phần tử trong dãy số. Có nhiều cặp dãy số đan xen nhau về tính chia hết và không chia hết cho cùng một số. Ta xét bài toán sau.

Bài toán 2. Cho 2 dãy số

$$a_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$$

$$b_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1, \; n = 0, 1, 2, ...$$

Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n có một và chỉ một trong hai số a_n, b_n chia hết cho 5.

Lời giải

Xét $a_n - b_n = (2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1) - (2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1) = 2.2^{n+1} = 2^{n+2} \not\vdots\, 5$ vì số đó không có tận cùng là 0 hoặc 5

Mặt khác ta có $a_n.b_n = (2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1)(2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1) = (2^{2n+1} + 1)^2 - (2^{n+1})^2 =$

$2^{4n+2}+1 = 4.16^n + 1$.
Với $n = 0$ thì $a_0.b_0 = 5 \vdots 5$.
Với $n > 0$ thì $a_n.b_n = 4.16^n + 1$ có tận cùng là 5 nên chia hết cho 5.
Vậy với mỗi số tự nhiên n có một và chỉ một trong hai số a_n, b_n chia hết cho 5.

Khi xét về tính chia hết của các phần tử trong một dãy số vấn đề đặt ra là có những dãy số mà các phần tử của nó chia hết cho chính số thứ tự của nó. Bài toán sau giải quyết vấn đề nêu ra. Trong bài toán này đã sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ để đưa dãy số đã cho trở thành dãy số đơn giản hơn dễ tìm được công thức của số hạng tổng quát và sử dụng định lí Fermat nhỏ trong chứng minh.

Bài toán 3. Dãy các số nguyên $\{u_n\}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 24 \\ u_n = \dfrac{6u_{n-1}^2 u_{n-3} - 8u_{n-1}u_{n-2}^2}{u_{n-2}u_{n-3}}, n \geq 4. \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mọi n thì $u_n \vdots n$.

Lời giải

Từ công thức truy hồi ta có

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{6u_{n-1}u_{n-3} - 8u_{n-2}^2}{u_{n-2}u_{n-3}} = 6 \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} - 8 \cdot \frac{u_{n-2}}{u_{n-3}}.$$

Đặt: $v_n = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$, $n = 2, 3, ...$ suy ra $v_2 = 2, v_3 = 12$

$$v_n = 6v_{n-1} - 8v_{n-2}. \tag{1}$$

Ta sẽ chứng minh rằng với mọi $n = 1, 2, 3, ...$ ta có

$$v_{n+1} = 4^n - 2^n. \tag{2}$$

(2) được chứng minh bằng quy nạp như sau:
Với $n = 1$, ta có $v_2 = \dfrac{u_2}{u_1} = 2 = 4^1 - 2^1$, vậy (2) đúng khi $n = 1$.
Với $n = 2$, ta có $v_3 = \dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{24}{2} = 12 = 4^2 - 2^2$, vậy (2) đúng khi $n = 2$.

Giả sử (2) đúng khi $n = k \geq 2$, tức là:

$$v_{k+1} = 4^k - 2^k. \tag{3}$$

Xét khi $n = k + 1$. theo (1) ta có

$$v_{k+2} = 6v_{k+1} - 8v_k. \tag{4}$$

Áp dụng giả thiết quy nạp (3) ta có

$$v_{k+2} = 6(4^k - 2^k) - 8(4^{k+1} - 2^{k-1}) = 6.4^k - 2.4^k - 4.2^k = 4.4^k - 2.2^k = 4^{k+1} - 2^{k+1}.$$

Vậy (2) cũng đúng khi $n = k + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp thì (2) đúng với mọi $n = 1, 2, 3, ...$

Ta có

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_2}{u_1} \cdot u_1 = v_n.v_{n-1}. \ ... \ .v_2.u_1.$$

Vì thế từ (2) suy ra

$$u_n = (4^{n-1} - 2^{n-1})(4^{n-2} - 2^{n-2})...(4 - 2). \tag{5}$$

Với mọi số nguyên tố p, theo Định lí Femat ta có

$$(4^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod p \ ; \ (2^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod p.$$

Suy ra $(4^{p-1} - 2^{p-1}) \equiv 0 \pmod p \Rightarrow (4^{p-1} - 2^{p-1}) \vdots p$ với mọi số nguyên tố p.

Từ đó suy ra nếu s là bội của $p - 1$, thì $(4^s - 2^s) \vdots p$.

Giả sử n là số nguyên dương tuỳ ý, và n có dạng khai triển sau:

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_k^{r_k},$$

(ở đây $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ là các số nguyên tố).

Từ $n \vdots p_1^{r_1}$ suy ra $n \vdots p_1, n \vdots p_1^2, ..., n \vdots p_1^{r_1}$, tức là:

$$n = d_1 p_1 = d_2 p_1^2 = \cdots = d_{r_i} p_1^{r_i}.$$

Suy ra $d_1 > d_2 > \cdots > d_{r_i} \Rightarrow n - d_1 < n - d_2 < \cdots < n - d_{r_i}$ và ta có

$$n - d_1 = d_1(p_1 - 1);$$

$$n - d_2 = d_2(p_1^2 - 1);$$

$$\dots$$

$$n - d_{r_i} = d_{r_i}(p_1^{r_1} - 1).$$

Như vậy ta có $n - d_1, n - d_2, ..., n - d_{r_i}$ là r_i bội khác nhau của $p_1 - 1$.

Theo trên ta có

$$(4^{n-d_k} - 2^{n-d_k}) \vdots p_1, \ \forall k = 1, 2, ..., r_1.$$

Từ đó dựa vào (5), ta có $u_n \vdots p_1^{r_1}$.

Lập luận tương tự ta có

$$u_n \vdots p_j^{r_j}, \ (\forall j = 2, 3, ..., k).$$

Suy ra

$u_n \vdots p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_k^{r_k}$ hay $u_n \vdots n$. (đpcm).

Bài toán 4. Cho dãy số $\{u_n\}$ với $u_n = 2^n + 2, n = 1, 2, ...$ Chứng minh rằng có vô số số hạng của dãy đã cho có tính chất $u_k \vdots k$.

Lời giải

Ta có nhận xét sau đây:

Nếu có số tự nhiên p chẵn và $p \geq 2$ sao cho $2^p + 2 \vdots p$; $2^p + 1 \vdots (p - 1)$, thì số tự nhiên $m = 2^p + 2$ cũng thoả mãn hai tính chất tương tự, tức là $2^m + 2 \vdots m$; $2^m + 1 \vdots (m - 1)$.

Thật vậy: $2^p + 2 \vdots p \Leftrightarrow m = 2^p + 2 = pl$, với l lẻ (Thật vậy, do p chẵn nên $2^p \vdots 4 \Rightarrow 2^p + 2 \not\vdots 4$, vì thế nếu l chẵn thì do p cùng chẵn nên $pl \vdots 4$ và dẫn đến điều vô lí).

Do l là số lẻ nên $2^m + 1 = 2^{pl} + 1 = (2^p)^l + 1^l \vdots 2^p + 1 = m - 1$. Như vậy ta đã chứng minh được $2^m + 1 \vdots m - 1$.

Lại thấy:

$2^p + 1 \vdots (p + 1) \Leftrightarrow 2^p + 1 = h(p - 1)$, với h lẻ. Do h là lẻ nên:

$$2^m + 2 = 2^{h(p-1)+1} + 2 = 2(2^{h(p-1)} + 1) \vdots 2(2^{p-1} + 1).$$

Mà $2(2^{p-1}+1) = 2^p + 2 = m$. Vậy ta đã chứng minh được $2^m + 2 \vdots m$. Nhận xét đã được chứng minh

Bây giờ trở lại bài toán đã cho. Ta thấy nếu lấy $n = 2$, thì $2^2 \vdots 2$; $2^2+1 \vdots (2-1)$. Khi đó theo nhận xét trên, nếu lấy $m = 2^2+2 = 6$, thì $2^6 \vdots 6$; $2^6+1 \vdots 5$. Và quy trình ấy cứ tiếp tục, khi đó ta có dãy con vô hạn sau: $v_1, v_2, ...$ trong đó $v_1 = u_2$; $v_2 = u_6$; v_{k+1} được xác định như sau: nếu $v_k = u_\alpha$ thì $v_{k+1} = u_{2^\alpha+2}$. Rõ ràng dãy con này thoả mãn yêu cầu đề ra là dãy vô hạn và $u_k \vdots k$. Đó là (đpcm).

Nếu ta đặc biệt hoá tập chỉ số của dãy số, cụ thể là nếu ta xét tập hợp các chỉ số của dãy số là tập hợp các số nguyên tố thì dạng bài toán trên trở thành dạng bài toán sau.

Bài toán 5. Dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_{=}0, u_2 = 14, u_3 = -18 \\ u_{n+1} = 7u_{n-1} - 6u_{n-2};\ n = 3, 4, ... \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p, thì $u_p \vdots p$.

Lời giải

Từ hệ thức xác định dãy u_n ta có phương trình:

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

là phương trình đặc trưng của dãy số đó.

Ta có

$$\begin{aligned} x^3 - 7x + 6 = 0 &\Leftrightarrow x^3 - 1 - 7x + 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) - 7(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-6) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \{1, 2, -3\}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$u_n = a.1^n + b.2^n + c(-3)^n,\ \forall n \geq 1. \tag{6}$$

Trong (6) lần lượt thay $n = 1, 2, 3$ và do $u_1 = 0, u_2 = 14, u_3 = -18$, ta đi đến hệ phương trình sau để xác định a, b, c.

$$\begin{cases} a + 2b - 3c = 0 \\ a + 4b + 9c = 14 \\ a + 8b - 27c = -18. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được: $a = b = c = 1$. Vậy:

$$u_n = 1 + 2^n + (-3)^n \quad n = 1, 2, ... \tag{7}$$

Với p là số nguyên tố, theo định lí Fermat nhỏ, ta có

$$2^p \equiv 2 \pmod p).$$

$$(-3)^p \equiv -3 \pmod p).$$

Vì thế từ (7) suy ra

$$u_p \equiv 1 + 2 - 3 \pmod p) \Rightarrow u_p \equiv 0 \pmod p).$$

Do vậy với mọi số nguyên tố p thì $u_p \vdots p$. Đó là (đpcm).

Bài toán 6. Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau: $u_n = 2^n + 1,\ n = 1, 2, ...$

a) Chứng minh rằng có vô số hạng của dãy trên thoả mãn tính chất $u_k \vdots k$.

b) Tìm số hạng u_p của dãy sao cho $u_p \vdots p$ và p là số nguyên tố.

Lời giải

a) Xét với $n \neq 0$, và khi đó với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có $2^n + 1$ đều là số lẻ.

Ta có nhận xét sau đây:

" *Nếu* $2^n + 1 \vdots n$, *thì* $2^m + 1 \vdots m$ *với* $m = 2^n + 1$".

Thật vậy, do $2^n + 1 \vdots n$ và $2^n + 1$ là số lẻ nên $m = 2^n + 1 = ln$ với l là số nguyên lẻ.

Vì thế $2^m + 1 = (2^n)^l + 1^l = (2^n + 1)[2^{n(l-1)} + 2^{n(l-2)} + \cdots + 1]$, suy ra $2^m + 1 \vdots 2^n + 1$ hay $2^m + 1 \vdots m$. Nhận xét đã được chứng minh.

Rõ ràng $u_1 \vdots 1; u_3 \vdots 3$. Vậy từ nhận xét trên suy ra tồn tại vô số số tự nhiên k để $u_k \vdots k$.

Đó là (đpcm).

b) Giả sử có số nguyên tố p sao cho $(2^p - 1) \vdots p$. Do $2^p + 1$ là số lẻ, nên $p \neq 2$.

Theo định lí Fermat nhỏ, ta có $(2^{p-1} - 1) \vdots p$. Vì p nguyên tố $(p \neq 2)$ nên $(p, 2) = 1$.

Ta suy ra $(2^p - 2) \vdots p \Rightarrow [(2^p + 1) - 3] \vdots p$. Vì $(2^p + 1) \vdots p$ nên suy ra $3 \vdots p$. Kết hợp với p là số nguyên tố nên $p = 3$.

Vậy có duy nhất số hạng u_3 của dãy số đã cho có tính chất mà đầu bài yêu cầu.

Bài toán 7. Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 3u_{n-1} + 2u_n^3 - 9n^2 + 9n - 3 \; ; n = 2, 3, ... \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p thì $2006 \sum_{i=1}^{p-1} u_i$ chia hết cho p.

Từ giả thiết với mọi $n = 2, 3, ...$ ta có

$$u_n + n^3 = 3u_{n-1} + 3n^3 - 9n^2 + 9n - 3 \Rightarrow u_n + n^3 = 3n_{n-1} + 3(n-1)^3. \tag{8}$$

Áp dụng liên tiếp công thức (8) với $n = 2, 3, ...$ ta có

$$\begin{aligned} u_n + n^3 &= 3_{n-1} + 3(n-1)^3 = 3[u_{n-1} + (n-1)^3] = 3[3u_{n-2} + 3(n-2)^3] \\ &= 3^2[u_{n-2} + (n-2)^3] \\ &= \cdots \\ &= 3^{n-1}(u_1 + 1^3) = 3^{n-1}(2+1) = 3^n. \end{aligned}$$

Vì thế $u_n = 3^n - n^3, \; \forall n = 2, 3, ...$ Mặt khác, $u_1 = 2 = 3^1 - 1^3$, do đó ta có

$$u_n = 3^n - n^3, \; \forall n = 1, 2, ... \tag{9}$$

- Nếu $p = 2$ thì $\sum_{i=1}^{p-1} u_i = u_1 = 2 \vdots 2$, tức là $2006 \sum_{i=1}^{p-1} u_i \vdots p$ khi $p = 2$.
- Nếu p là số nguyên tố lẻ. Theo (9) ta có

$$\sum_{i=1}^{p-1} u_i = \sum_{i=1}^{p-1} (3^i - i^3) = (3 + 3^2 + \cdots + 3^{p-1}) - [1^3 + 2^3 + \cdots + (p-1)^3]. \tag{10}$$

Với mọi $i = 1, 2, ..., p-1$ thì

$$i^3 + (p-i)^3 = i^3 + p^3 - 3p^2 i + 3pi^2 - i^3 = p^3 - 3p^2 i + 3pi^2.$$

Điều đó có nghĩa là:

$$i^3 + (p-i)^3 \vdots p, \ \forall i = 1, 2, ..., p-1. \tag{11}$$

Ta có

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (p-1)^3 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p-1}[i^3 + (p-1)^3]. \tag{12}$$

Áp dụng hằng đẳng thức

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Ta có

$$3 + 3^2 + \cdots + 3^{p-1} = 3(1 + 3 + \cdots + 3^{p-2}) = 3.\frac{3^{p-1}-1}{3-1} = \frac{1}{2}(3^p - 3). \tag{13}$$

Do p là số nguyên tố nên theo định lí Fermat nhỏ ta có

$$3^p - 3 \vdots p. \tag{14}$$

Từ (11) và (14) suy ra

$$\Big\{(3^p - 3) + \sum_{i=1}^{p-1}[i^3 + (p-i)^3]\Big\} \vdots p.$$

Hay

$$2\Big\{\frac{3^p - 3}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p-1}[i^3 + (p-i)^3]\Big\} \vdots p. \tag{15}$$

Từ (10),(12),(13)và (15) suy ra

$$2\sum_{i=1}^{p-1} u_i \vdots p.$$

Vì lẽ đó $2006\sum_{i=1}^{p-1} u_i \vdots p$ với mọi p là số nguyên tố lẻ.

Kết hợp lại, ta có với mọi số nguyên tố p, thì $2006\sum_{i=1}^{p-1} u_i \vdots p$ (đpcm).

Lại đặc biệt hoá thêm một bước nữa ta có thể xét xem một phần tử nào đó trong dãy số đã cho có chia hết cho một số cho trước hay không? hoặc có thể xét xem các phần tử của dãy số có chia hết cho một số cho trước nào đó hay không ? .

Bài toán 8. Dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_{=}5, u_2 = 11 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3u_{n-1}, \quad n = 2, 3, ... \end{cases}$$

Chứng minh rằng u_{2002} chia hết cho 11.

Lời giải

Dễ thấy $u_1 = 5, u_2 = 11, u_3 = 7, u_4 = -19, u_5 = -59$.

Do $-19 = -2.11 + 3; -59 = -6.11 + 7$, nên từ đó ta có

$$\begin{cases} u_1 \equiv 5 \pmod{11} \\ u_2 \equiv 0 \pmod{11} \\ u_3 \equiv 7 \pmod{11} \\ u_4 \equiv 3 \pmod{11} \\ u_5 \equiv 7 \pmod{11}. \end{cases}$$

Vì vậy nếu gọi r_n là phần dư của u_n trong phép chia cho 11, $n = 1, 2, ...$ thì từ trên suy ra $r_1 = 5, r_2 = 0, r_3 = 7, r_4 = 3, r_5 = 7$. Ta sẽ chứng minh rằng với mọi $k = 0, 1, 2, ...$

$$r_{5k+1} = 5 \ ; \ r_{5k+2} = 0 \ ; \ r_{5k+3} = 7 \ ; \ r_{5k+4} = 3 \ ; \ r_{5k+5} = 7. \tag{16}$$

Để làm điều này ta sử dụng nguyên lí quy nạp toán học.

Theo trên nhận xét này đã đúng khi $k = 0$.

Giả sử nhận xét đã đúng đến $k = p$, tức là:

$$r_{5p+1} = 5; r_{5p+2} = 0; r_{5p+3} = 7; r_{5p+4} = 3; r_{5p+5} = 7.$$

Xét khi $k = p + 1$. Ta có $u_{5(p+1)+1} = u_{5p+6}$.

Theo cách xác định dãy thì $u_{5(p+1)+1} = 2u_{5p+5} - 3u_{5p+4}$.

Theo giả thiết quy nạp thì

$$r_{5p+5} = 7 \Rightarrow u - 5p + 5 \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow u_{5p+5} = 11l + 7, l \in \mathbb{Z}.$$

$$r_{5p+4} = 3 \Rightarrow u - 5p + 4 \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow u_{5p+4} = 11s + 3, s \in \mathbb{Z}.$$

Suy ra

$$u_{5(p+1)+1} = 2(11l+7) - 3(11s+3) = 11(2l-3s) + 5. \tag{17}$$

Do $2l - 3s \in \mathbb{Z}$, nên từ (17) suy ra

$$u_{5(p+1)+1} \equiv 5 \pmod{11} \Rightarrow r_{5(p+1)+1} = 5.$$

Bằng cách lập luận tương tự, ta có

$$r_{5(p+1)+2} = 0\ ;\ r_{p+1)+3} = 7\ ;\ r_{5(p+1)+4} = 3\ ;\ r_{5(p+1)+5} = 7.$$

Vậy nhận xét cũng đúng với $k = p+1$. Theo nguyên lí quy nạp toán học thì (16) đúng với mọi $k = 0, 1, 2, ...$

Ta có 2002 = 400.5+2, vậy $r_{2002} = 0$, điều đó có nghĩa là $u_{2002} \vdots 11$. Đó chính là (đpcm).

Bài toán 9. Dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau:

$$u_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}};\ n = 0, 1, 2, ...,$$

a) Chứng minh rằng u_n là số nguyên với mọi $n = 1, 2, ...$

b)Tìm mọi số hạng của dãy chia hết cho 3.

Lời giải

a) Đặt $\alpha = \dfrac{(2+\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}; \beta = \dfrac{(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$, khi đó $u_n = \alpha - \beta$ Ta có

$$u_{n+1} = \frac{(2+\sqrt{3})^{n+1}}{2\sqrt{3}} - \frac{(2-\sqrt{3})^{n+1}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \alpha(2+\sqrt{3}) - \beta(2-\sqrt{3}).$$

Tương tự:

$$u_{n+2} = \alpha(2+\sqrt{3})^2 - \beta(2-\sqrt{3})^2 = \alpha(7+4\sqrt{3}) - \beta(7-4\sqrt{3})$$

$$= 4\alpha(2+\sqrt{3}) - 4\beta(2-\sqrt{3}) - (\alpha-\beta) = 4u_{n+1} - u_n.$$

Vậy ta có

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n. \tag{18}$$

Như vậy dãy u_n xác định như trên có thể xác định theo cách sau đây:

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n, \forall n = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

Từ đó suy ra ngay mọi số hạng của dãy đều là số nguyên (đpcm).
b) Từ (18) ta có

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} + (u_{n+1} - u_n).$$

Do $u_{n+1} \in \mathbb{Z}$ nên $3u_{n+1} \vdots 3$, suy ra

$$u_{n+2} \equiv u_{n+1} - u_n \pmod 3. \tag{19}$$

Bằng cách tính trực tiếp ta thấy 8 số hạng đầu tiên của dãy $u_1, u_2, ..., u_7$ khi chia cho 3 có các số dư tương ứng là $0, 1, 1, 0, 2, 2, 0$. Vậy theo (19) suy ra

$$u_{n+6} \equiv u_n \pmod 3.$$

Từ đó ta thấy trong dãy số nói trên mọi số hạng có dạng $u_{3k}, k = 0, 1, 2, ...$ chia hết cho 3, và chỉ những số hạng ấy mà thôi.

Trong bài toán về tính chia hết của các phần tử trong dãy số cho số a khi đó số các số dư khác nhau là a. Như vậy chúng ta có thể áp dụng nguyên lí Dirichlet đối với $a + 1$ bộ hữu hạn các số dư có được trong phép chia đó và khi đó phải tồn tại ít nhất hai bộ số dư trùng nhau. Từ đó làm cơ sở cho việc chứng minh nhiều bài toán .

Bài toán 10. Dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 20; u_2 = 100 \\ u_{n+1} = 4u_n + 5u_{n-1};\ n = 2, 3, ... \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một số hạng của dãy số chia hết cho 1996.

Lời giải

Đặt $u_n = 1996\alpha_n + \tau_n,\ n = 1, 2, ...$, trong đó α_n, τ_n là các số nguyên và $0 \le \tau_n \le 1995$. Xét dãy các cặp số sau đây:

$$(\tau_1, \tau_2); (\tau_2, \tau_3); ...; (\tau_n, \tau_{n+1}); ...$$

Vì dãy này vô hạn, mà các số τ_i là hữu hạn do đó phải tồn tại hai số tự nhiên l, m (giả sử $m > l$) sao cho $(\tau_1, \tau_{l+1}) = (\tau_m, \tau_{m+1})$ hiểu theo nghĩa:

$$\begin{cases} \tau_1 = \tau_m \\ \tau_{l+1} = \tau_{m+1}. \end{cases}$$

Ta sẽ chứng minh rằng khi đó $\tau_{l-1} = \tau_{m-1}$. Thật vậy, ta có

$$5(u_{m-1} - u_{l-1}) = (u_{m+1} - 4u_m + 1976) - (u_{l+1} - 4u_l + 1976) = (u_{m+1} - u_{l+1}) - 4(u_m - u_l).$$

Vì $u_k = 1996\alpha_k + \tau_k$ nên ta có

$$5(u_{m-1} - u_{l-1}) = [1996(\alpha_{m+1} - \alpha_{l+1}) + (\tau_{m+1} - \tau_{l+1})] - 4[1996(\alpha_m - \alpha_1) + (\tau_m - \tau_1)]$$

$$= 1996[(\alpha_{m+1} - \alpha_{l-1}) - 4(\alpha_m - \alpha_1)] \Rightarrow 5(u_{m-1} - u_{l-1}) \vdots 1996$$

mà $(5, 1996) = 1$ nên ta có $(u_{m-1} - u_{l-1}) \vdots 1996$

Có $u_{m-1} - u_{l-1} = 1996(\alpha_{m-1} - \alpha_{l-1}) + (\tau_{m-1} - \tau_{l-1})$

$\Rightarrow 1996(\alpha_{m-1} - \alpha_{l-1}) + (\tau_{m-1} - \tau_{l-1}) \vdots 1996 \Rightarrow (\tau_{m-1}, \tau_{l-1}) \vdots 1996$

Do $0 \leqslant \tau_{m-1}, \tau_{l-1} \leqslant 1995 \Rightarrow -1995 \leqslant \tau_{m-1} - \tau_{l-1} \leqslant 1995$ suy ra $\tau_{m-1} - \tau_{l-1} = 0$ hay $\tau_{l-1} = \tau_{m-1}$.

Bằng lí luận tương tự, ta sẽ đi đến $\tau_{m-2} = \tau_{l-2}$, và cứ tiếp tục quá trình đó ta sẽ đi đến:

$$\begin{cases} \tau_2 = \tau_{2+(m-l)} \\ \tau_1 = \tau_{1+(m-l)}. \end{cases}$$

Ta chứng minh rằng u_{m-1} chính là số hạng của dãy mà chia hết cho 1996.

Thật vậy, theo cách xác định dãy, ta có

$$\begin{aligned} 5u_{m-1} &= u_{m-l+2} - 4u_{m-l+1} + 1976 = \\ &= 1996\alpha_{m-l+2} + \tau_{m-l+2} - 4(1996\alpha_{m-l+1} + \tau_{m-l+1}) + 1976 = \\ &= 1996(\alpha_{m-l+2} - 4\alpha_{m-l+1}) + (\tau_{m-l+2} - 4\tau_{m-l+1}) + 1976 = \end{aligned}$$

$= 1996(\alpha_{m-l+2} - 4\alpha_{m-l+2}) + (\tau_2 - 4\tau_1) + 1976.$

Do

$$u_1 = 20 \Rightarrow u_1 = 0.1996 + 20 \Rightarrow \tau_1 = 20.$$

$$u_2 = 100 \Rightarrow u_2 = 0.1996 + 100 \Rightarrow \tau_2 = 100.$$

Suy ra $5u_{m-1} = 1996(\alpha_{m-l+2} - 4\alpha_{m-l+1}) + 1996$. Vì $\alpha_{m-l+2} \in \mathbb{Z}$ và $\alpha_{m-l+1} \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $5u_{m-1} \vdots 1996$ (đpcm).

Bài toán 11. Dãy số nguyên $\{u_n\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1990, u_2 = 1989, u_3 = 2000 \\ u_{n+3} = 19u_{n+2} + 9u_{n+1} + u_n + 1991, n = 1, 2, ... \end{cases}$$

a) Với mọi n gọi r_n là số dư của phép chia u_n cho1992.

Chứng minh rằng dãy $r_n, n = 1, 2, 3, ...$ là một dãy tuần hoàn.

b) Chứng minh rằng tồn tại vô số số x của dãy u_n sao cho

$5x^{1992} + 5x^{1994} + 4x^{1975} + 8x^{1945} + 2x^{1990} + 11x^2 + 48$ chia hết cho 1992

Lời giải

a) Xét các bộ ba số dư

$$(r_1, r_2, r_3); (r_2, r_3, r_4); ...; (r_i, r_{i+1}, r_{i+2}; (r_{i+1}, r_{i+2}, r_{i+3}); ...$$

Số các bộ ba số dư lập được theo cách trên là vô hạn. Tuy nhiên, do chỉ có hữu hạn số dư khác nhau trong phép chia $x_n (n = 1, 2, 3, ...)$ cho 1992 nên chỉ có hữu hạn các bộ ba khác nhau. Vì vậy, theo nguyên lí Dirichlet, phải tồn tại hai số nguyên dương m, s sao cho $(r_m, r_{m+1}, r_{m+2}) = (r_{m+s}, r_{m+1+s}, r_{m+2+s})$, nghĩa là ta có

$$\begin{cases} r_m = r_{m+s} \\ r_{m+1} = r_{m+1+s} \\ r_{m+2} = r_{m+2+s}. \end{cases}$$

Như vậy $r_k = r_{k+s}$ với $k = m, k = m+1, k = m+2$.

Giả sử ta đã có $r_k = r_{k+s},\ \forall k : m \leqslant k \leqslant p \quad (p \geq m+2)$.

Xét $k = p+1$. Từ giả thiết suy ra

$u_{p+1+s} - u_{p+1} = 19(u_{p+s} - u_p) + 9(u_{p-1+s} - u_{p-1}) + (u_{p-2+s} - u_{p-2})$

$\equiv 19(r_{p+s} - r_p) + 9(r_{p+1+s} - r_{p-1}) + (r_{p-2+s} - r_{p-2}) \pmod{1992} \equiv 0 \pmod{1992}$.

Do đó $\quad r_{p+1+s} = r_{p+1}$.

Theo giả thiết quy nạp, ta có

$$r_k = r_{k+s}, \forall k \geq m. \tag{20}$$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $r_k = r_{k+s},\ \forall k \geq 1$.

Thật vậy:

Nếu $m = 1$ thì ta có ngay điều phải chứng minh.

Nếu $m > 1$ thì do (20) nên ta chỉ còn phải chứng minh $r_k = r_{k+s}, \forall k : 1 \leqslant k \leqslant m-1$.

Từ cách xác định dãy ta có

$u_{m-1-s} - u_{m-1} = (u_{m+2+s} - u_{m+2}) - 19u_{m+1+s} - u_{m+1} - 9u_{m+s}$

$\equiv (r_{m+2+s} - r_{m+2}) - 19(r_{m+1+s} - r_{m+1}) - 9(r_{m+s} - r_m) \pmod{1992} \equiv 0 \pmod{1992}$.

Do đó

$$r_{m-1} = r_{m-1-s}.$$

Sau $m-1$ bước xét tương tự, ta sẽ được:

$$r_{m-1} = r_{m-1+4}, r_{m-2} = r_{m-2+s}, ..., r_2 = r_{2+s}, r_1 = r_{1+s}.$$

Vậy $r_k = r_{k+s}, \forall k \geq 1$, và điều này chứng tỏ dãy $r_n, n = 1, 2, 3, ...$ là dãy tuần hoàn.

b) Do bắt đầu từ u_2 dãy u_n là dãy tăng và do $s > 1$ (vì $r_1 = -2 \neq r_2 = -3$) nên

$$u_s < u_{2s} < \cdots < u_{ks} < u_{(k+1)s} < \cdots .$$

Đặt $p(x) = 5x^{1992} + 5x^{1994} + 4x^{1975} + 8x^{1945} + 2x^{1990} + 11x^2 + 48$. Ta sẽ chứng minh $p(u_{ks}) \vdots 1992, \forall k \geq 1$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} u_{ks} = u_{ks+3} - 19u_{ks+2} - 9u_{ks+1} - 1991 &\equiv r_{ka+3} - 19r_{ks+2} - 9r_{ks+1} + 1 \pmod{1992} \\ &\equiv r_3 - 19r_2 - 9r_1 + 1 \pmod{1992} \\ &\equiv 84 \pmod{1992}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$p(u_{ks}) \equiv p(84) \quad \pmod{1992}. \tag{21}$$

Do $84^n \vdots 24, \forall n \geq 2$ và do $48 \vdots 24$ nên $p(84) \vdots 24$. Hơn nữa, do $84 \equiv 1 \pmod{83}$ nên $p(84) \vdots 83$ mà 24.83=1992 và UCLN(24,83)=1 nên từ đó suy ra $p(84) \vdots 1992$.
Kết hợp với (21) ta được $p(u_{ks}) \vdots 1992, \quad \forall k \geq 1$. Đó là (đpcm).

Nếu ta lại xét đến tính chia hết của chính các phần tử trong cùng một dãy số cho nhau, xét hai phần tử bất kỳ trong cùng một dãy số thì chúng có thể chia hết cho nhau hoặc không chia hết cho nhau. Ta xét bài toán sau.

Bài toán 12. Cho $u_1, u_2, ..., u_{n+1}$ là dãy các số tự nhiên sao cho:

$$1 \leqslant u_1 < u_2 < \cdots < u_n < u_{n+1} = 2n.$$

Chứng minh rằng tồn tại hai số tự nhiên i, j sao cho $u_i \vdots u_j$.

Lời giải

Kí hiệu $f(u_i)$ là ước lẻ lớn nhất của u_i, tức là $u_i = 2^{p_i} f(u_i)$, với $f(u_i)$ là số nguyên dương lẻ.
Do $u_1 < u_2 < \cdots < u_n < u_{n+1} = 2n$ suy ra với mọi $i = 1, 2, ..., n+1$ ta đều có $f(u_i) < 2n$.
Xét $n+1$ số lẻ $f(u_1), f(u_2), ..., f(u_{n+1})$. Các số lẻ này đều dương và bé hơn $2n$. Theo nguyên lí Drichlet phải tồn tại hai số i, j với $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$ sao cho $f(u_i) = f(u_j)$.
Mặt khác, ta có

$$\begin{cases} u_i = 2^{p_i} f(u_i) \\ u_j = 2^{p_j} f(u_j). \end{cases}$$

Vì $i < j$ nên $u_i < u_j \Rightarrow 2^{p_i} f(u_i) < 2^{p_j} f(u_j) \Rightarrow 2^{p_i} < 2^{p_j}$. Điều đó chứng tỏ rằng $2^{p_i} \vdots 2^{p_j} \Rightarrow u_i \vdots u_j$ (đpcm).

Có những dãy số mà hai phần tử của nó không chia hết cho nhau và cũng không cùng chia hết cho bất kỳ một số nào đó khi đó ta có hai số nguyên tố cùng nhau. Chúng ta xét bài toán sau.

Bài toán 13. Cho dãy số $\{u_n\}$ với $u_n = 2.2^{2^{2^n}} - 1, n = 1, 2, ...$ Chứng minh rằng các số hạng của dãy trên đôi một nguyên tố cùng nhau.

Lời giải

Đặt $a_n = 2^{2^n} - 1, n = 1, 2, ...$ Khi đó $u_n = 2^{a_n} - 1, n = 1, 2, ...$

Với mọi $n, k \in \mathbb{N}$ ta có

$$a_{n+k} = 2^{2^{n+k}} + 1 = (2^{2^n})^{2^k} + 1 = (a_n - 1)^{2^k} + 1.$$

Từ đó suy ra $a_{n+k} \equiv 2 \pmod{a_n}$, do $2 \not\vdots\, a_n$ nên $a_{n+k} = m.a_n + 2$ với mọi $m \in \mathbb{N}$, suy ra

$$u_{n+k} = 2^{a_{n+k}} - 1 = 2^{m.a_n+2} - 1 = 4(2^{m.a_n} - 1) + 3.$$

Ta lại có $2^{m.a_n} - 1 = (2^{a_n})^m - 1 \Rightarrow (2^{m.a_n} - 1) \vdots (2^{a_n} - 1) \Rightarrow (2^{m.a_n} - 1) \vdots u_n$.

Vậy suy ra $u_{n+k} \equiv 3 \pmod{u_n}$.

Đặt $d = (u_{n+k}, u_n)$. Vì $u_1 = 31$ và biểu thức $u_{n+k} \equiv 3 \pmod{u_n}$ đúng với mọi n, k nên ta có $u_n \equiv 3 \pmod{31}$ (lấy $n = 1, k = n - 1$). Từ đó suy ra $u_n \not\vdots\, 3$ vì $3 \not\vdots\, 31$.

Như thế $d \not\vdots\, 3$. Mặt khác, ta có $u_{n+k} \equiv 3 \pmod{u_n}$ và $3 \not\vdots\, u_n$ nên suy ra

$$u_{n+k} = \beta u_n + 3,\ \beta \in \mathbb{Z}.$$

Do $d = (u_{n+k}, u_n)$ nên ta có $u_{n+k} = \alpha_1 d,\ u_n = \alpha_2 d$ với $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$. Từ đó ta có

$$\alpha_1 d = \beta\alpha_2 d + 3 \Rightarrow 3 = d(\alpha_1 - \beta\alpha_2).$$

Do $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathbb{Z}$ nên $3 \vdots d$. Kết hợp với $d \not\vdots\, 3$ suy ra $d = 1$.

Như thế ta có $(u_{n+1}, u_n) = 1, \forall n, k \in \mathbb{N}$. Điều đó có nghĩa là các số hạng của dãy đôi một nguyên tố cùng nhau (đpcm).

Khi ta không quan tâm đến các phần tử của dãy số có chia hết cho một số cho trước nào đó không. Khi đó dẫn đến bài toán chứng minh sự tồn tại hợp số trong dãy số đã cho. Chúng ta xét bài toán sau.

Bài toán 14. Cho a, b, c là ba số nguyên dương cho trước. Dãy $\{u_n\}$ các số tự nhiên được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_0 = c \\ u_n = au_{n-1} + b, \text{ với mọi } n = 1, 2, ... \end{cases}$$

Chứng minh rằng trong dãy đã cho có vô hạn hợp số.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $\{u_n\}$ là dãy số đơn điệu tăng và $u_n > a, \forall n$ (có thể trừ ra u_0).
Chỉ có hai khả năng xảy ra:

i) Nếu a, b không nguyên tố cùng nhau. Khi đó $(a, b) > 1$. Nói riêng a và b có ước chung lớn hơn 1. Từ đó u_n là hợp số với mọi $n = 1, 2, ...$ Kết luận của bài toán là hiển nhiên đúng trong trường hợp này.

ii) Nếu a, b nguyên tố cùng nhau, tức là $(a, b) = 1$. Khi đó $(a, u_k) = 1$ với mọi $k = 1, 2, ...$
Thật vậy, nếu không phải thế thì tồn tại $u_p (p \geq 1)$ sao cho $(a, u_p) = d > 1$,
suy ra $a = m_1 d; u_p = m_2 d$, trong đó $(m_1, m_2) = 1$. Theo cách xác định dãy ta có $au_{p-1} + b = m_2 d$, suy ra $m_1 u_{p-1} d + b = m_2 d$. Từ đây suy ra $b \vdots d$ vậy d là ước chung của a, b do đó $d \geq (a, b) = 1$. Ta thu được mâu thuẫn (vì $d > 1$). Nhận xét được chứng minh.
Lấy N là số nguyên dương mà $(a, N) = 1$. Xét các số sau đây:

$$u_1, u_2, u_3, ..., u_N, u_{N+1}.$$

Theo nguyên lí Dirichlet phải có hai số khi chia cho N có cùng số dư. Gọi hai số đó là u_p, u_q $(p > q)$. Khi đó $u_p - u_q \vdots N$. Nhưng theo cách xác định dãy thì

$$u_p - u_q = a(u_{p-1} - u_{q-1}).$$

Do $u_p - u_q \vdots N$ và $(a, N) = 1$, nên từ dẳng thức trên suy ra

$$u_{p-1} - u_{q-1} \vdots N.$$

Tương tự ta có

$$u_{p-2} - u_{q-2} \vdots N,$$

$$...$$

$$u_{p+1-q} - u_1 \vdots N.$$

Chú ý rằng lập luận trên đúng với mọi số nguyên dương N mà $(a, N) = 1$.

Theo chú ý trên thì $(a, u_k) = 1$ với mọi $k = 1, 2, ...$, vậy nói riêng chọn $N = u_k$, ta có $u_{1+p-q} \vdots 2u_1$. Do $u_1 > 1$, nên u_{1+p-q} có ước chẵn lớn hơn 2, nên chắc chắn u_{1+p-q} phải là hợp số. Như thế trong các số $u_1, u_2, ..., u_N, u_{N+1}$ chắc chắn phải có hợp số chẳng hạn là u_α.

Bây giờ lại xét dãy con $u_{\alpha+1}, u_{\alpha+2}, ..., u_{M+\alpha+1}$, ở đây $(a, M) = 1$ và lặp lại quá trình như trên. Ta lại khẳng định được rằng trong dãy con này của dãy đã cho lại tìm được một hợp số khác.

Quá trình này cứ tiếp diễn vô hạn lần, và kết quả là ta thu được vô số số hạng trong dãy đã cho là hợp số (đpcm).

Chương 4.

Số học với các dãy số đặc biệt

4.1. Số học với cấp số cộng và cấp số nhân

Cấp số cộng và cấp số nhân là những dãy số đặc biệt, trong cấp số cộng $\{u_n\}$ *thì hiệu giữa hai phần tử liên tiếp bất kỳ* $u_{i+1} - u_i = d, i = 1, 2, ...$ *với* d *là công sai của cấp số cộng* $d \neq 0$ *là một số không đổi. Trong cấp số nhân* $\{u_n\}$ *thì thương của hai phần tử liên tiếp bất kỳ* $u_{n+1} : u_n = q$ *với* q *là công bội của cấp số nhân* $q \neq 0, q \neq 1$ *là một số không đổi. Với các dãy số là cấp số cộng và cấp số nhân, khi xét các phần tử của nó là số nguyên tố (Bài toán 1và 2 chương 2) chúng ta có kết quả sau. Đã tìm được 9 số nguyên tố lập thành một cấp số cộng với công sai* $d = 210$ *và đã chứng minh được không tồn tại một cấp số cộng gồm 11 số nguyên tố với công sai* $1 < d < 2310$ *còn với các phần tử của dãy số là hợp số ta có kết quả sau đây.*

Bài toán 1. Cho n là một số tự nhiên $n \geq 2$. Chứng minh rằng tồn tại một cấp số cộng gồm n số hạng $u_1, u_2, ..., u_n$ sao cho mọi số hạng của nó đều là hợp số, và các số hạng của cấp số cộng này đôi một nguyên tố cùng nhau.

Lời giải

Gọi p là số nguyên tố lớn hơn n và q là một số tự nhiên sao cho:

$$q > p + (n-1)n!$$

Ta xây dựng dãy số sau đây:

$$u_1 = q! + p;$$

$$u_2 = q! + p + n!;$$

$$u_3 = q! + p + 2n!;$$

$$...$$

$$u_n = q! + p + (n-1)n!.$$

Rõ ràng $\{u_n\}$ là cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = q! + p$ và công sai $d = n!$.

Với mọi $k = 1, 2, ...$ ta có

$$u_k = q! + p + (k-1)n!$$

Rõ ràng do $1 \leqslant k \leqslant n \Rightarrow p + (k-1)n! \leqslant p + (n-1)n! < q \Rightarrow q! \,\vdots\, [p + (k-1)n!]$ $\Rightarrow u_k \,\vdots\, [p + (k-1)n!]$. Mặt khác, do $1 < p + (k-1)n! < u_k$ nên u_k là hợp số với mọi $k = 1, 2, ..., n$. Như vậy mọi số hạng của cấp số cộng nói trên đều là hợp số.

Còn lại ta sẽ chứng minh mọi số hạng của cấp số này đôi một nguyên tố cùng nhau. Xét hai số hạng bất kỳ của nó

$$\begin{cases} u_k = q! + p + (k-1)n! \\ u_m = q! + p + (m-1)n!\,, \qquad \text{với } 1 < k < m \leqslant n. \end{cases}$$

Giả thiết phản chứng u_k và u_m không nguyên tố cùng nhau, tức là u_k và u_m có một ước số chung nguyên tố là d .

Như vậy $u_k \,\vdots\, d$ và $u_m \,\vdots\, d$ nên $u_m - u_k \,\vdots\, d$ suy ra $(m-k)n! \,\vdots\, d$ tức là

$$1.2.3...(m-k)^2...(m-k)n \,\vdots\, d.$$

Do d là số nguyên tố nên có ít nhất một trong các số 1,2,3,...,$(m-k)^2, ..., (m-k)n$ chia hết cho d. Có hai khả năng sảy ra:

Nếu $(m-k)^2 \,\vdots\, d \Rightarrow m - k \,\vdots\, d \Rightarrow n! \,\vdots\, d$ (do $m - k < n$) $\Rightarrow q! \,\vdots\, d$. Mặt khác $u_m \,\vdots\, d$ nên từ $u_m = q! + p + (m-1)n!$ suy ra $p \,\vdots\, d$. Do p và d đều là số nguyên tố nên $d = p$. Đó là điều vô lí vì $d \leqslant n$ mà $p > n$. Vậy nếu $(m-k)^2 \,\vdots\, d$ sẽ dẫn đến điều vô lí.

Nếu một trong các số $1, 2, ..., (m-k)n$ chia hết cho d thì cũng lí luận như trên.

Tóm lại, từ giả thiết phản chứng là sai suy ra hai số hạng bất kỳ của cấp số cộng nói trên đều nguyên tố cùng nhau. Như thế cấp số cộng xây dựng như trên thoả mãn mọi yêu cầu đề ra. Đó là (đpcm).

Bài toán 2. Cho a, b là hai số nguyên dương sao cho $d = (a, b)$. Chứng minh rằng trong cấp số cộng $\div a, 2a, 3a, ..., ba$ sẽ chứa đúng d số hạng chia hết cho b.

Lời giải

Vì $(a, b) = d$ nên

$$\begin{cases} a = da' \\ b = db', \end{cases}$$

trong đó $(a', b') = 1$.

Ta có

$$ka \vdots b \Leftrightarrow (kda') \vdots (db') \Leftrightarrow ka' \vdots b' (\text{do} (a', b') = 1).$$

Từ đó suy ra k lấy các giá trị $b', 2b', ..., db'$ và chỉ các giá trị ấy mà thôi.

Vậy trong cấp số cộng đã cho có đúng d số hạng chia hết cho b đó là $b'a, 2b'a, ..., db'a$.

Đó chính là (đpcm).

Việc chứng minh bài toán 1 đã khẳng định rằng tồn tại một cấp số cộng gồm n số hạng sao cho mọi số hạng của nó đều là hợp số và các số hạng của cấp số cộng này đôi một nguyên tố cùng nhau. Bây giờ ta lại đặt vấn đề có tồn tại hay không một cấp số cộng vô hạn mà các phần tử của nó đều là số chính phương. Ta xét bài toán sau.

Bài toán 3. Có tồn tại hay không một dãy số vô hạn các số chính phương lập thành một cấp số cộng.

Lời giải

Giả thiết tồn tại cấp số cộng vô hạn $\div a_1^2, a_2^2, a_3^2, ...$ trong đó $a_1 < a_2 < a_3 < ...$ là dãy vô hạn các số tự nhiên.

Hiển nhiên ta có $a_3^2 - a_2^2 = a_2^2 - a_1^2 \Rightarrow (a_3 + a_2)(a_3 - a_2) = (a_2 + a_1)(a_2 - a_1)$.

Do $a_3 + a_2 > a_2 + a_1$ nên ta suy ra $a_3 - a_2 < a_2 - a_1$. Tiếp tục lí luận như vậy ta đi đến dãy số tự nhiên sau: $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, ..., a_k - a_{k-1}, ...$ Đó là một dãy số tự nhiên vô hạn giảm dần, trong đó $a_k - a_{k-1} > 1, \forall k$. Đây là điều vô lí. Vậy giả thiết phản chứng là sai, tức là không tồn tại dãy vô hạn các số chính phương lập thành cấp số cộng.

Bây giờ ta lại không quan tâm đến tính chia hết, tính chính phương của các phần tử trong dãy số mà quan tâm đến tính chất riêng lẻ của mỗi phần tử trong dãy số. Có dãy số mà phần tử của nó thoả mãn yêu cầu nào đó mà chúng ta đặt ra. Ta xét bài toán sau.

Bài toán 4. Số hạng thứ nhất và công sai d của cấp số cộng là những số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại một số hạng của cấp số cộng ấy sao cho trong dạng thập phân của nó có chữ số 9.

Lời giải

Gọi u_p là số hạng thứ p của cấp số cộng, ta có

$$u_p = u_1 + (p-1)d \tag{1}$$

ở đây u_1 là số hạng thứ nhất và d là công sai của cấp số cộng. Không giảm tổng quát ta có thể cho d là số nguyên dương (vì ta không quan tâm đến dấu của các số hạng). Xét d số có dạng sau:

$$9, 99, 999, ..., \underbrace{999...9}_{d}.$$

Rõ ràng trong d số này hoặc có số chia hết cho d, hoặc có hai số khi chia cho d có cùng số dư (điều này suy ra từ nguyên lí Drichlet). Vì hiệu của hai số bất kỳ trong dãy d số trên có dạng:

$$99...9\underbrace{0...0}_{k},$$

ở đây $1 \leq k < d$. Vì thế từ lập luận trên suy ra luôn luôn tồn tại số có dạng

$$99...9\underbrace{0...0}_{k} \quad (0 \leqslant k < d)$$

chia hết cho d.

Giả sử u_1 là số hạng đầu tiên của cấp số cộng có n chữ số:

$$u_1 = \overline{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}.$$

Vì

$$99...9\underbrace{00...0}_{k} \vdots d \Rightarrow 99...9\underbrace{00...0}_{k+n} \vdots d.$$

Giả sử

$$99...9\underbrace{00...0}_{k+n} = md.$$

Khi đó theo công thức (5) ta có

$$u_{m+1} = u_1 + md = u_1 + 99...9\underbrace{00...0}_{n+k}$$

là số hạng thứ $m+1$ của cấp số cộng. Rõ ràng u_{m+1} trong cách viết thập phân có dạng:

$$u_{m+1} = \overline{99...9\underbrace{00...0}_{k}\alpha_1\alpha_2...\alpha_n},$$

nghĩa là trong cách viết thập phân của nó chắc chắn có số 9. Đó chính là(đpcm).

Bài toán 5. Cho cấp số cộng $\div -1, 18, 37, ...$(công sai $d = 19$). Hãy tìm tất cả các số hạng của cấp số cộng trên sao cho mọi chữ số của nó toàn là số 5.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề: Xét số

$$A_n = \underbrace{55...5}_{n} + 1.$$

Để số A_n chia hết cho 19 điều kiện cần và đủ là $n = 18k + 5$, với $k = 0, 1, 2, ...$

Chứng minh:

Với $k = 0$ thì rõ ràng $A_5 = 55555 + 1 \vdots 19$.

Với $n = 18k + 5$, thì

$$A_n = \underbrace{55...5}_{18k+5} + 1.$$

Do đó

$$A_n - A_5 = \underbrace{55...5}_{18+k} - 55555 = \frac{5}{9}(10^{18k+5} - 10^5) = \frac{5}{9}.10^5((10^{18})^k - 1)$$

$$= \frac{5}{9}.10^5(10^{18}-1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{k-1}), \text{ với } a = 10^{18}.$$

Theo định lí Fermat nhỏ, nếu $(n,p) = 1$ và p là số nguyên tố, thì $n^{p-1} - 1 \vdots 19$. Nên ta có $10^{18} - 1 \vdots 9$, còn hiển nhiên $10^{18} - 1 \vdots 9$ mà $(9,19) = 1$ nên $10^{18} - 1 \vdots 19.9 \Rightarrow A_n - A_5 \vdots 19$ mà $A_5 \vdots 19$ nên $A_n \vdots 19$.

Như vậy ta đã chứng minh được $A_n \vdots 19$ nếu n có dạng $n = 18k + 5, k = 0, 1, 2, ...$

Nếu A_n chia hết cho 19, do A_5 là số bé nhất trong các số A_n mà chia hết cho 19, theo trên với $n > 5$ ta có

$$A_n - A_5 = \frac{5}{9}.(10^n - 10^5) = \frac{5}{9}.10^4.9.(10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-5}).$$

Vì A_n và A_5 chia hết cho 19, nên $A_n - A_5 \vdots 19$ ta lại có $(5.10^4, 19) = 1$ nên suy ra

$$(10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-5}) \vdots 19. \tag{2}$$

Ta có

$$1 \equiv 1 \pmod{19},$$

$$10 \equiv 10 \pmod{19},$$

$$10^2 \equiv 5 \pmod{19},$$

$$10^3 \equiv 12 \pmod{19},$$

$$10^4 \equiv 6 \pmod{19},$$

$$10^5 \equiv 3 \pmod{19},$$

$$10^6 \equiv 11 \pmod{19},$$

$$10^7 \equiv 15 \pmod{19},$$

$$10^8 \equiv 17 \pmod{19},$$

$$10^9 \equiv 18 \pmod{19},$$

$$10^{10} \equiv 9 \pmod{19},$$

$$10^{11} \equiv 14 \pmod{19},$$

$$10^{12} \equiv 7 \pmod{19},$$

$$10^{13} \equiv 13 \pmod{19},$$

$$10^{14} \equiv 16 \pmod{19},$$

$$10^{15} \equiv 8 \pmod{19},$$

$$10^{16} \equiv 4 \pmod{19},$$

$$10^{17} \equiv 2 \pmod{19},$$

$$10^{18} \equiv 1 \pmod{19}.$$

Ta thấy $10^m, m = 1, 2, ...$ chia cho 19 ta được 18 số dư khác nhau và ta lại có với $m \neq 18k,\ k = 1, 2, 3, ...$ thì

$$\sum_{i=1}^{m} 10^i \not\equiv 0 \pmod{19}.$$

Nên để có (2) ta phải có $n-5=18k \Rightarrow n=18k+5$.

Vậy bổ đề đã được chứng minh.

Bây giờ trở lại bài toán đang xét. Giả sử số $\underbrace{55...5}_{n}$ là số hạng của dãy.

Áp dụng bổ đề nêu trên ta có

$$\underbrace{55...5}_{n} = -1 + k.19 \Rightarrow \underbrace{55...5}_{n} + 1 = k.19.$$

Do đó $A_n = \underbrace{55...5}_{n} + 1 \,\vdots\, 19$. Theo bổ đề thì $n = 18k+5$.

Tóm lại số $\underbrace{55...5}_{n}$ với $n = 18k+5, k = 0, 1, 2, ...$ là tất cả các số hạng của cấp số cộng nói trên mà mọi chữ số của nó toàn là số 5.

Trong các dãy số là cấp số nhân thì các phần tử của nó đều là hợp số chỉ có thể ngoại trừ số hạng thứ nhất, vì với cấp số nhân $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ trong đó $a_n = q^{n-1}a_1$ với q là công bội đều chia hết cho a_1. Còn khi xét đén tính chính phương của các phần tử trong cấp số nhân thì ta có vô số cấp số nhân mà phần tử của nó đều là số chính phương. Thật vậy, xét dãy số $\{a_n\}$ với $a_1 = b^2, a_2 = qb^2, a_3 = q^2b^2, ..., a_n = q^{n-1}b^2$ chỉ cần lấy $b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ và công bội q là số chính phương thì tất cả các phần tử của dãy số đó đều là số chính phương. Bây giờ chúng ta đặt vấn đề về tính chất số học của tổng hai hay nhiều số hạng trong dãy số .

Bài toán 6. Cho một cấp số nhân có n số hạng $(n \geq 3)$, trong đó mỗi số hạng và công bội đều là số tự nhiên. Chứng minh rằng khi đó tổng của n số hạng đó không thể là luỹ thừa của 5.

Lời giải

Gọi a là số hạng đầu tiên của cấp số nhân và q là công bội của nó. Khi đó ta có dãy $a, aq, aq^2, aq^3, ..., aq^{n-1}$, ở đây $n \geq 3, q > 1, a \geq 1$.

Giả thiết phản chứng $S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = 5^l, l \in \mathbb{N}$, suy ra

$$a(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}) = 5^l \Rightarrow 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = 5^k, k \in \mathbb{N}. \qquad (3)$$

Trước hết ta chứng minh rằng n là số lẻ. Thật vậy, nếu không phải như vậy tức là

$n = 2m$, khi đó dựa vào hằng đẳng thức:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Từ (3) suy ra

$$5^k = \frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{q^{2m}-1}{q-1} = \frac{q^m - 1}{q-1}(q^m + 1).$$

$$\Rightarrow q^m \equiv 1 \pmod 5 \text{ và } q^m \equiv -1 \pmod 5.$$

Đây là điều vô lí, như vậy n phải là số lẻ.

Giả sử $n = 2m+1$. Khi đó từ (3) ta có $k > 0$ vì $n \geq 3, q > 1$. Từ đẳng thức $5^k = \dfrac{q^n - 1}{q-1}$ suy ra $q^n - 1$ chỉ có thể tận cùng là 0 hoặc 5.

- Nếu $q^n - 1$ có tận cùng là 0 thì q^n phải có tận cùng là 9 nên q phải có tận cùng là 3 hoặc 9 nhưng vì n là số lẻ nên q chỉ có thể tận cùng là 9

$\Rightarrow q \equiv -1 \pmod 5 \Rightarrow 1 + q + q^2 + \cdots + q^{2m} \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} \not\vdots\, 5$.

Điều này mâu thuẫn với (3).

- Nếu $q^n - 1$ có tận cùng là 5 thì q^n phải có tận cùng là 4 suy ra q phải có tận cùng là 2,4,8. Vì n là số lẻ nên q chỉ có thể có tận cùng là 4 vậy ta có

$q \equiv -1 \pmod 5 \Rightarrow 1 + q + q^2 + \cdots + q^{2m} \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} \not\vdots\, 5$.

Điều này mâu thuẫn với (3). Tóm lại trong mọi trường hợp ta đều dẫn đến điều mâu thuẫn và bài toán được chứng minh.

Bài toán 7. Cho một cấp số nhân với số hạng đầu tiên là nguyên và công bội q là một số nguyên khác ± 1 và 0. Chứng minh rằng tổng của hai (hay một số lớn hơn) các số hạng tuỳ ý chọn của nó không thể bằng số hạng nào của cấp số nhân đã cho.

Lời giải

Gọi u_1 là số hạng đầu tiên, q là công bội, còn u_p là số hạng thứ p của cấp số nhân. Ta có

$$u_p = u_1 q^{p-1}.$$

Giả sử trái lại, kết luận của bài toán không đúng, tức là tồn tại các số nguyên không âm $k_1, k_2, ..., k_{m+1}$ sao cho

$$u_1 q^{k_1} + u_1 q^{k_2} + \cdots + u_1 q^{k_m} = u_1 q^{k_{m+1}}.$$

Rõ ràng $u_1 \neq 0$ nên suy ra

$$q^{k_1} + q^{k_2} + \cdots + q^{k_m} = q^{k_{m+1}}. \tag{4}$$

Chỉ có hai khả năng xảy ra:

i) Nếu $k_{m+1} = min\{k_1, k_2, ..., k_m, k_{m+1}\}$. Khi đó chia cả hai vế của (4) cho $q^{k_{m+1}}$. Ta có

$$1 = q^{k_1 - k_{m+1}} + q^{k_2 - k_{m+1}} + \cdots + q^{k_m - k_{m+1}}.$$

Không giảm tính tổng quát, ta giả thiết $k_1 < k_2 < \cdots < k_m$ nên ta có

$$1 = q^{k_1 - k_{m+1}}(1 + q^{k_2 - k_1 - k_{m+1}} + \cdots + q^{k_m - k_1 - k_{m+1}}) \tag{5}$$

do q nguyên và $k_j - k_1 - k_{m+1} > 0, \forall j = 2, 3, ..., m$. Từ (5) suy ra $1 \vdots q \Rightarrow q = \pm 1$. Ta thu được mâu thuẫn vì theo giả thiết $q \neq \pm 1$.

ii) Nếu $min\{k_1, k_2, ..., k_m, k_{m+1}\} = k_\alpha$ với $\alpha \in \{1, 2, ..., m\}$ thì lập luận hoàn toàn tương tự như trên cũng dẫn đến $q = \pm 1$ là điều vô lí.

Tóm lại giả thiết phản chứng là sai, vậy bài toán đã được chứng minh.

4.2. Số học với dãy Fibonacci

Fibonacci là biệt danh của Léonerdo Pisano ở thành Pi-sa, nhà toán học thế kỷ XIII. Ông là tác giả của dãy số Fibonacci. Dãy số Fibonacci có nhiền ứng dụng đến nỗi năm 1963 một hiệp hội Fibonacci được thành lập và xuất bản tạp chí The Fibonacci Quarterly ra 3 tháng một kỳ. Bài toán thỏ để con dẫn đến dãy Fibonacci như sau:Có bao nhiêu cặp thỏ vào cuối năm, nếu từ đầu năm có một cặp thỏ (đực và cái) và cứ sau một tháng thì mỗi cặp thỏ đó (kể cả cặp thỏ ban đầu) lại sinh ra một cặp thỏ con (đực và cái)?

Trong bài toán trên số cặp thỏ sinh ra sau các tháng chính là các phần tử 1,2,3,5,8, 13,21,34,55,89,144,233 của dãy Fibonacci. Trong dãy Fibonacci thì chỉ số của các phần tử có một vai trò đặc biệt trong việc nghiên cứu các tính chất số học của các phần tử trong dãy. Chúng ta xét một số bài toán sau.

Bài toán 1. Cho dãy số Fibonacci $\{u_n\}, n = 1, 2, ...$ Chứng minh rằng:

i) $(u_n, u_{n+1}) = 1$;

ii) Nếu n chia hết cho m thì u_n chia hết cho u_m;

iii) Nếu u_n chia hết cho u_m thì n chia hết cho m với $m > 2$;

iv) $(u_n, u_m) = u_d$ với $d = (n, m)$;

v) Dãy số Fibonacci chứa một tập vô hạn những số đôi một nguyên tố cùng nhau.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh đẳng thức:

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1} \quad (6)$$

đúng với số tự nhiên bất kỳ $n > 1$ và với mọi $m = 1, 2, ...$

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học theo m.

Với $m = 1$ ta có

$$u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1} = u_{n-1} + u_n = u_{n+1}.$$

Vậy (6) đúng với $m = 1$

Giả sử với số m nào đó các đẳng thức sau đúng:

$$\begin{aligned} u_{n+m} &= u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}; \\ u_{n+m+1} &= u_{n-1}u_{m+1} + u_n u_{m+2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Ta sẽ chứng minh đẳng thức sau đúng:

$$u_{n+m+2} = u_{n-1}u_{m+2} + u_n u_{m+3}.$$

Thật vậy cộng từng vế của hai dẳng thức trong (7) ta được:

$u_{n+m} + u_{n+m+1} = u_{n-1}(u_m + u_{m+1}) + u_n(u_{m+1} + u_{m+2})$

$\Rightarrow u_{n+m+2} = u_{n-1}u_{m+2} + u_n u_{m+3}$.

Theo nguyên lí quy nạp toán học thì đẳng thức đã được chứng minh.

i) Theo (6) ta có

$(u_n, u_{n+1}) = (u_n, u_{n-1} + u_n) = (u_{n-1}, u_n) = \cdots = (u_1, u_2) = 1$

ii) Vì n chia hết cho m nên ta có thể viết $n = km,\ k = 1, 2, ...$ Ta sẽ chứng minh quy nạp theo k.

Với $k = 1$ khi đó $n = m$ như vậy $u_n \vdots u_m$ là hiển nhiên.

Giả sử u_{mk} chia hết cho u_m, ta xét $u_{m(k+1)}$. Theo công thức (6) ta có

$$u_{m(k+1)} = u_{mk+m} = u_{mk-1}u_m + u_{mk}u_{m+1}.$$

Số hạng thứ nhất chứa u_m nên nó chia hết cho u_m số hạng thứ 2 theo giả thiết quy nạp chia hết cho u_m. Như vậy tổng của hai số hạng chia hết cho u_m suy ra $u_{m(k+1)}$chia hết cho u_m.

Theo nguyên lí quy nạp toán học ta có (đpcm).

iii) Ta chứng minh theo phương pháp phản chứng. Giả sử ngược lại $n \not\vdots\, m$ khi đó $\exists\, q, r \in \mathbb{N}^*$ sao cho $n = qm + r, \ (0 < r < m)$

Theo công thức (6) ta có

$$u_n = u_{qm+r} = u_{qm-1}u_r + u_{qm}u_{r+1}.$$

Theo ii) ta có $qm \vdots m$ nên $u_{qm} \vdots u_m \Rightarrow u_{mq}u_{r+1} \vdots u_m$.

Theo giả thiết ta có $u_n \vdots u_m$ nên suy ra

$$u_{mq-1}u_r \vdots u_m. \tag{8}$$

- Nếu $(u_r, u_m) = 1$ từ (8) suy ra $u_{qm-1} \vdots u_m$. Ta có $u_{qm} \vdots u_m$ và$(u_{qm}, u_{qm-1}) = 1$ nên $u_m = 1 \Rightarrow m = 1, 2$ điều này mâu thuẫn với giả thiết.

- Nếu $(u_r, u_m) = d \neq 1$ từ (8) suy ra

$$u_{qm-1} \vdots \frac{u_m}{d}.$$

Theo tính chất của dãy Fibonacci ta có $u_{qm+1} = u_{qm-1} + u_{qm} \Rightarrow u_{qm-1} = u_{qm+1} - u_{qm}$ nên $u_{qm-1}u_r = (u_{qm+1} - u_{qm})u_r = u_{qm+1}u_r - u_{qm}u_r$ có $u_{qm}u_r \vdots u_m \Rightarrow u_{qm+1}u_r \vdots u_m$

Suy ra

$$u_{qm+1} \vdots \frac{u_m}{d}.$$

Theo công thức $u_{m+n} = u_{m-1}u_n + u_m u_{n+1}$ ta lại có

$$(u_{qm+1}, u_{qm-1}) = (u_{qm-1} + u_{qm}, u_{qm-1}) = (u_{qm}, u_{qm-1}) = \cdots = (u_2, u_1) = 1.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{u_m}{d} = 1 \Rightarrow u_m = d.$$

Ta có $u_r \vdots d \Rightarrow u_r \geq d = u_m$ vì $m > 2$ và $m > r \Rightarrow u_m > u_r$. Ta đi đến mâu thuẫn.
Vậy trong các trường hợp ta đều đi đến mâu thuẫn, từ đó dẫn đến giả sử là sai.
Đó là (đpcm).

vi)- Nếu $n, m \leq 2$ ta có $d = 1$ hoặc $d = 2$ nên $u_d = 1$ và ta có $(u_n, u_m) = 1 = u_d$.

- Nếu $n, m > 2$ khi đó theo i) ta có $n \vdots d$ và $m \vdots d \Rightarrow u_n \vdots u_d$ và $u_m \vdots u_d$. nếu:

$$\begin{cases} u_n \vdots u_{d'}, \\ u_m \vdots u_{d'}. \end{cases}$$

Ta phải chứng minh $u_d \vdots u_{d'}$.
Theo iii) ta có $n \vdots d'$ và $m \vdots d'$ nhưng $d = (n, m)$ nên ta có $d \vdots d' \Rightarrow u_d \vdots u_{d'} \Rightarrow (u_n, u_m) = u_d$.

v) Theo ii) ta chỉ cần xét dãy các số nguyên tố sánh đôi muốn vậy dãy chỉ số có thể chẳng hạn là dãy các số nguyên tố $2, 3, 5, 7, 11, 13, ...$ Vì tập các số nguyên tố là vô hạn nên có vô số cặp số đôi một nguyên tố cùng nhau trong dãy Fibonacci.

Bài toán 2. Cho dãy Fibonacci 1,1,2,3,5,8,...
1)Chứng minh rằng $u_n \vdots 5^k \Leftrightarrow n \vdots k$.
2)Chứng minh rằng $u_n \vdots 2 \Leftrightarrow n \vdots 3$.
3)Chứng minh rằng $u_n \vdots 2^2 \Leftrightarrow n \vdots 6$.
4)Chứng minh rằng:

a) u_n có tận cùng là $0 \Leftrightarrow n \vdots 15$;

b) u_n có tận cùng là hai số $0 \Leftrightarrow n \vdots 150$.

Lời giải

1) Ta đã có công thức của số hạng u_n của dãy Fibonacci được tính bằng công thức:

$$u_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{\sqrt{5}} \text{ với } x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; n = 1, 2, 3, ...$$

Ta chứng minh rằng: $u_{5n} = 5u_n q_n$, ở đây $q_n \not\vdots 5$.

Thật vậy,

$$\sqrt{5}u_{5n} = x_1^{5n} - x_2^{5n}.$$

Đặt $a = x_1^n, b = x_2^n$ thì

$\sqrt{5}u_{5n} = (a-b)[a^4 + ab(a^2+b^2) + a^2b^2 + b^4] = (a-b)[(a^2+b^2)^2 - a^2b^2 + ab(a^2+b^2)]$,

trong đó $ab = (x_1x_2)^n = (-1)^n$;

$a^2 + b^2 = (a-b)2 + 2ab = 5u_n^2 + 2(-1)^n$.

Từ đó ta có

$$u_{5n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5}u_n[(5u_n^2 2(-1)^n)^2 - (-1)^{2n} + (-1)^n(5u_n^2 + 2(-1)^n)] =$$

$$= 5u_n[5u_n^4 + 5u_n^2(-1)^n + 1] = 5u_nq_n \text{ với } q_n = 5u_n^4 + 5u_n^2(-1)^n + 1.$$

Rõ ràng $q_n \not\vdots\, 5$. Vậy ta đã chứng minh được $u_{5n} = 5u_nq_n$ với $q_n \not\vdots\, 5$.

Từ đó với $n = 5^st,\ (t,5) = 1$ ta có $u_n = 5^su_tA_n$, trong đó $A_n \not\vdots\, 5$. Nếu $t \not\vdots\, 5$ thì $u_t \not\vdots\, 5$, do đó $u_n \vdots 5^k \Leftrightarrow s \geq k \Leftrightarrow n \vdots 5^k$. Đó là (đpcm)

2) Ta chứng minh khi $n = 3k$ thì $u_n \vdots 2$. Thật vậy,

Khi $k = 0$ ta có $u_0 = 0 \vdots 2$.

Khi $k = 1$ to có $u_3 = 2 \vdots 2$.

Giả sử điều khẳng định đã đúng đến $k = p$ tức là $u_{3p} \vdots 2$.

Khi $k = p + 1$, ta có

$$u_{3(p+1)} = u_{3p+3} = u_{3p+2} + u_{3p+1} = u_{3p+1} + u_{3p} + u_{3p+1} = 2u_{3p+1} + u_{3p}. \tag{9}$$

Do $u_{3p} \vdots 2$ theo giả thiết quy nạp, còn u_{3p+1} nguyên nên suy ra $2u_{3p+1} \vdots 2$ vì thế từ (9) suy ra $u_{3(p+1)} \vdots 2$. Vậy điều khẳng định cũng đúng khi $k = p + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp suy ra $u_n \vdots 2$ khi $n = 3k$.

Ta chứng minh khi $n = 3k + 1$ thì $u_n \not\vdots\, 2$. Thật vậy, khi $k = 0$ thì $u_1 = 1 \not\vdots\, 2$.

Giả sử điều khẳng định đã đúng đến $k = p$ tức là $u_{3p+1} \vdots 2$.

Xét khi $k = p + 1$ ta có

$$u_{3(p+1)+1} = u_{3p+4} = u_{3p+3} + u_{3p+2} = u_{3p+2} + u_{3p+1} + u_{3p+2} = 2u_{3p+2} + u_{3p+1}. \tag{10}$$

Do $u_{3p+2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2u_{3p+2} \vdots 2$ còn $u_{3p+1} \not\vdots\, 2$ (theo giả thiết quy nạp), vì thế từ (10) suy ra $u_{3(p+1)+1} \not\vdots\, 2$.

Theo nguyên lí quy nạp suy ra $u_n \not\vdots\, 2$ khi $n = 3k + 1$.

Ta chứng minh khi $n = 3k + 2$ thì $u_n \not\vdots\, 2$. Thật vậy, khi $k = 0$ thì $u_2 = 1 \not\vdots\, 2$.

Giả sử điều khẳng định đã đúng đến $k = p$ tức là $u_{3p+2} \not\vdots\, 2$.

Xét khi $k = p + 2$ ta có

$u_{3(p+1)+2} = u_{3p+5} = u_{3p+4} + u_{3p+3} = u_{3p+3} + u_{3p+2} + u_{3p+3} = 2u_{3p+3} + u_{3p+2}$.

Từ $u_{3p+3} \in \mathbb{Z}$ và $u_{3p+3} \not\vdots\, 2$ (theo giả thiết quy nạp) suy ra $u_{3(p+1)+2} \not\vdots\, 2$. Vậy điều khẳng định cũng đúng khi $k = p + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp suy ra $u_n \not\vdots\, 2$ khi $n = 3k + 2$.

Ta có $u_n \vdots\, 2$ khi $n + 3k$; $u_n \not\vdots\, 2$ khi $n = 3k + 1$ hoặc $n = 3k + 2$.

Điều đó có nghĩa là $u_n \vdots\, 2 \Leftrightarrow n = 3k \Leftrightarrow n \vdots\, 3$. Đó là (đpcm).

3)Ta chứng minh rằng khi $n = 6k$ thì $u_n \vdots\, 2^2$. Thật vậy, khi $k = 0$ ta có $u_0 = 0 \vdots 2^2$ khi $k = 1$ ta có $u_6 = 8 \vdots\, 2^2$.

Giả sử điều khẳng định đã đúng khi $k = p \geq 1$, tức là $u_{6p} \vdots\, 2^2$.

Xét khi $k = p + 1$ ta có

$$
\begin{aligned}
u_{6(p+1)} = u_{6p+6} = u_{6p+5} + u_{6p+4} &= u_{6p+4} + u_{6p+3} + u_{6p+3} + u_{6p+2} \\
&= u_{6p+3} + u_{6p+2} + 2(u_{6p+2} + u_{6p+1}) + u_{6p+1} + u_{6p} \\
&= u_{6p+2} + u_{6p+1} + u_{6p+2} + 2u_{6p+2} + 2u_{6p+1} + u_{6p+1} + u_{6p} \\
&= 4(u_{6p+2} + u_{6p+1}) + u_{6p}. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Do $u_{6p+2} \in \mathbb{Z}, u_{6p+1} \in \mathbb{Z}$ và $u_{6p} \vdots\, 2^2$ (giả thiết quy nạp), nên từ (11) suy ra $u_{6(p+1)} \vdots\, 2^2$. Vậy điều khẳng định đúng khi $n = p + 1$. Theo nguyên lí quy nạp suy ra $u_n \vdots\, 2^2$ khi $n = 6k$.

Tương tự như phần 2) ta chứng minh được $u_n \not\vdots\, 2^2$ khi $n = 6k + 1, n = 6k + 2$, $n = 6k + 3, n = 6k + 4, n = 6k + 5$. Vì thế:

$$u_n \vdots\, 2^2 \Leftrightarrow n = 6k \Leftrightarrow n \vdots\, 6 \text{ (đpcm).}$$

4)a) u_n có tận cùng là 0 khi và chỉ khi u_n chia hết cho 2 và cho 5.

Theo phần 1) $u_n \vdots\, 5 \Leftrightarrow n \vdots\, 5$.

Theo phần 2) $u_n \vdots\, 2 \Leftrightarrow n \vdots\, 3$.

Vì thế u_n chia hết cho 2 và 5$\Leftrightarrow n \vdots\, 15$.

Như vậy u_n có tận cùng là 0 $\Leftrightarrow n \vdots\, 15$.

b) u_n có tận cùng bằng hai chữ số 0 $\Leftrightarrow u_n \vdots\, 100 \Leftrightarrow u_n$ chia hết cho 2^2 và chia hết cho

5^2.

Theo phần 1)và2) thì u_n có tận cùng là hai chữ số 0 $\Leftrightarrow n$ chia hết cho 6 và 25 $\Leftrightarrow n \vdots 150$ (vì $(6, 25) = 1$).

Qua bài toán 1 và 2 ta thấy trong dãy số Fibonacci có vô số hợp số, có vô số có tận cùng là1,2,... chữ số 0. Ta đặt vấn đề trong hữu hạn phần tử cho trước của dãy có tồn tại số có tận cùng là một số hữu hạn chữ số 0? Bài toán sau qiải vấn đề đặt ra và trong bài toán này người ta đã khéo léo vận dụng nguyên lí Drichlet đối với các cặp số dư trong việc chứng minh.

Bài toán 3. Xét dãy số Fibonacci 1,1,2,3,5,8,... Hỏi rằng trong $10^8 + 1$ số hạng đầu tiên của dãy $u_0, u_1, u_2, ..., u_{10^8}$ có số nào tận cùng bằng 4 chữ số 0 hay không?

Lời giải

Giả sử $u_n \equiv r_n \pmod{10^4}$ ở đây $0 \leqslant r_n \leqslant 10^4$.

Xét dãy $(r_0, r_1), (r_1, r_2), ..., (r_{10^8}, r_{10^8+1})$ gồm $10^8 + 1$ cặp số (r_j, r_{j+1}).

Vì chỉ có 10^8 cặp số (a, b) khác nhau với $0 \leqslant a < 10^4, 0 \leqslant b < 10^4$, nên theo nguyên lí Dirichlet phải tồn tại hai cặp số (r_i, r_{i+1}) và (r_j, r_{j+1}) trùng nhau, với $(0 \leqslant i < j \leqslant 10^8)$.

Điều đó có nghĩa là:

$$\begin{cases} r_i = r_j \\ r_{i+1} = r_{j+1}. \end{cases}$$

Từ đó Suy ra $r_{i-1} = r_{j-1} = ...$ Cứ tiếp tục như thế ta sẽ có $r_0 = r_{j-i}$,

hay $u_{j-i} \equiv 0 \pmod{10^4}$. Ta thấy $0 < j - i \leqslant 10^8$. Vậy trong dãy $u_0, u_1, u_2, ..., u_{10^8}$ có tồn tại số tận cùng bằng 4 chữ số 0. Bài toán có câu trả lời khẳng định.

Việc xét một số tính chất số học với các phần tử của dãy Fibonacci đã cho chúng ta một số kết quả thú vị. Trong phần sau đây chúng ta xét một số bài toán số học đặt ra với một số biểu thức đại số có chứa các phần tử của dãy Fibonacci.

Bài toán 4. Xét dãy Fibonacci 1,1,2,3,5,8,.... Đặt:

$$f(n) = 1985n^2 + 1956n + 1960.$$

a) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số hạng u_k của dãy Fibonacci, sao cho $f(u_k) \vdots 1989$.

b) Có tồn tại số hạng u_i nào của dãy Fibonacci, để cho $2 + f(u_i)$ chia hết cho 1989 không?

Lời giải

a) Ta có $1985n^2 + 1956n + 1960 \equiv 4n^2 + 33n + 29 \pmod{1989}$.

Đặt $h(n) = 4n^2 + 33n + 29$. Từ đó suy ra

$$f(n) \vdots 1989 \Leftrightarrow h(n) \vdots 1989.$$

Xét dãy số $\{v_n\}$, trong đó

$$\begin{cases} v_0 = -1, v_1 = 1 \\ v_{n+1} = v_n + v_{n-1}, n = 1, 2, ... \end{cases}$$

Ta có dãy $\{v_n\}$ là dãy sinh ra bởi dãy Fibonacci $\{u_n\} : 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$ bằng cách thêm vào trước dãy này ba số hạng -1,1,0.

Gọi r_i là phép dư trong phép chia v_i cho 1989 ($i = 0, 1, 2, ...$). Như vậy ta có $0 \leqslant r_i \leqslant 1988$. Xét dãy các cặp số sau đây:

$$(r_0, r_1), (r_1, r_2), (r_2, r_3), ...$$

Vì mỗi số r_i chỉ nhận một trong 1989 giá trị. Vậy các cặp khác nhau tối đa là 1989^2. Từ đó theo nguyên lí Dirichlet thì trong $1989^2 + 1$ cặp đầu tiên thì có ít nhất có hai cặp trùng nhau. Giả sử hai cặp ấy là:

$$(r_p, r_{p+1}), (r_{p+\alpha}, r_{p+\alpha+1}), p, \alpha \in \mathbb{N}$$

điều ấy có nghĩa là: $r_p = r_{p+\alpha}; r_{p+1} = r_{p+\alpha+1}$. Theo cách xác định dãy, ta có

$$v_{p-1} = v_{p+1} - v_p$$

$$v_{p+\alpha-1} = v_{p+\alpha+1} - v_{p+\alpha}$$

$\Rightarrow v_{p+\alpha-1} - v_{p-1} = (v_{p+\alpha+1} - v_{p+1}) - (v_{p+\alpha} - v_p) \equiv$

$$\equiv (r_{p+\alpha+1} - r_{p+1}) - (r_{p+\alpha} - r_p) \pmod{1989} \equiv 0 \pmod{1989}.$$

Từ đó suy ra $r_{p-1} = r_{p+\alpha-1}$.

Tương tự ta có

$$r_{p-2} = r_{p+\alpha-2},$$
$$...$$
$$r_2 = r_{\alpha+2},$$
$$r_1 = r_{\alpha+1},$$
$$r_0 = r_\alpha.$$

Từ $r_0 = r_\alpha, r_1 = r_{\alpha+1}$ và $v_{n+1} = v_n + v_{n-1}$ suy ra $r_i = r_{i+\alpha}, \forall i = 0, 1, 2, ...$

Do vậy, $r_0 = r_\alpha = r_{2\alpha} = r_{3\alpha} = \cdots = r_{k\alpha}, \forall k \geq 1$, suy ra

$$h(v_{k\alpha}) \equiv h(v_0) \pmod{1989} \equiv h(-1) \pmod{1989} \equiv 0 \pmod{1989}.$$

Rõ ràng $v_{k\alpha}, \forall k = 1, 2, 3, ...$ đều là số Fibonacci, suy ra có vô số số hạng của dãy Fibonacci $v_{k\alpha}$ mà $f(v_{k\alpha}) \,\vdots\, 1989$ (đpcm).

b) Ta có thể chứng minh được nhận xét sau:

Nếu n là số nguyên tố thì $4n^2 + 7n + 1 \;\not\vdots\; 13$.

Thật vậy, ta thấy:

$$16(4n^2 + 7n + 1) = (8n + 7)^2 - 7 - 2.13.$$

Đặt $8n + 7 = 13n \pm q (0 \leqslant q \leqslant 6), m, q$ nguyên, khi đó ta có

$$(8n + 7)^2 = 13(13m^2 \pm 2mq) + q^2 \Rightarrow 16(4n^2 + 7n + 1) = q^2 - 7 + 13k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Rõ ràng với $q = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ thì $q^2 - 7 \;\not\vdots\; 13$, do đó

$$4n^2 + 7n + 1 \;\not\vdots\; 13, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Nhận xét đã chứng minh xong.

Ta có

$$f(n) + 2 = 1989(n^2 + n + 1) - 26(n + 1) - (4n^2 + 7n + 1).$$

Do $1989 \,\vdots\, 13 \Rightarrow f(n) + 2 \;\not\vdots\; 13, \forall n \Rightarrow f(n) + 2 \;\not\vdots\; 1989, \forall n$. Nói cách khác không tồn tại số hạng u_k của dãy Fibonacci để cho $f(u_k) + 2$ chia hết cho 1989.

Bài toán 5. Cho $\{u_n\}$ là dãy Fibonacci và k, n là các số tự nhiên tuỳ ý. Chứng minh rằng phân số sau đây là tối giản:

$$\frac{ku_{n+2}+u_n}{ku_{n+3}+u_{n-1}}.$$

Lời giải

Giả thiết phản chứng tồn tại các số tự nhiên n, k sao cho:$ku_{n+2}+u_n$ và $ku_{n+3}+u_{n-1}$ cùng chia hết cho số tự nhiên $d>1$. suy ra

$(ku_{n+3}+u_{n+1})-(ku_{n+2}+u_n) \vdots d \Rightarrow k(u_{n+3}-u_{n+2})+(u_{n+1}-u_n) \vdots d \Rightarrow (ku_{n+1}+u_{n-1}) \vdots d.$

Áp dụng lập luận trên với $ku_{n+1}+u_{n-1}$ và $ku_{n+2}+u_n$ suy ra $ku_n+u_{n-2} \vdots d$.

Quá trình ấy cứ tiếp diễn và ta đi đến $ku_4+u_2 \vdots d$ và $ku_3+u_1 \vdots d$. Suy ra

$(ku_4+u_2)-(ku_3+u_1) \vdots d \Rightarrow k(u_4-u_3)+u_2-u_1 \vdots d \Rightarrow ku_2 \vdots d.$

Như vậy ta đi đến điều sau đây $k \vdots d$ và $2k+1 \vdots d$, mà $d>1$. Đó là điều vô lí.

Vậy giả thiết phản chứng là sai, tức là với số tự nhiên k, n cho trước thì phân số

$$\frac{ku_{n+2}+u_n}{ku_{n+3}+u_{n-1}} \text{ là phân số tối giản (đpcm).}$$

Bài toán 6. Giả sử F_k là số hạng thứ k của dãy Fibonacci. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$, thì số $A_n = 4F_{n-2}F_nF_{n+2}F_{n+4}+9$ là số chính phương.

Lời giải

Trước hết ta có nhận xét sau đây: Với mọi số tự nhiên $n \geq 3$, thì

$$v_n = \mid F_{n+4}F_{n-2} - F_{n+2}F_n \mid = 3. \tag{12}$$

Thật vậy,

$v_n = \mid (F_{n+2}+F_{n+3})F_{n-2} - F_{n+2}F_n \mid = \mid F_{n+3}F_{n-2} + F_{n+2}(F_{n-2}-F_n) \mid =$

$= \mid F_{n+3}F_{n-2} - F_{n+2}F_{n-1} \mid = \mid F_{n+3}(F_{n-1}-F_{n-3}) - F_{n+2}F_{n-1} \mid =$

$= \mid F_{n+3}F_{n-3} + F_{n-1}(F_{n+3}-F_{n+2}) \mid = \mid F_{n+3}F_{n-3} - F_{n+1}F_{n-1} \mid = v_{n-1}.$

Từ $v_n = v_{n-1}$, và quá trình ấy cứ lặp lại, ta đi đến: $v_n = v_3,\ \forall n \geq 3$.

Ta có $v_3 = \mid F_7F_1 - F_5F_3 \mid = \mid 13.1 - 5.2 \mid = 3$ như thế nhận xét (12) được chứng minh.

Từ (12) suy ra

$F_{n+4}F_{n-2} = F_nF_{n+2} \pm 3 \Rightarrow A_n = 4F_nF_{n+2}(F_nF_{n+2} \pm 3) + 9 = (2F_nF_{n+2} \pm 3)^2.$

Do F_n nguyên $\forall n \in \mathbb{N}$, suy ra A_n là số chính phương với mọi số tự nhiên $n \geq 3$ (đpcm).

Bài toán 7. Cho dãy số Fibonacci $\{u_n\}, n = 1, 2, ...$ chứng minh rằng tồn tại duy nhất bộ ba các số $a, b, c \in \mathbb{N}$ đồng thời thoả mãn hai điều kiện sau đây:

i) $b < a, c < a$.

ii) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, thì $(u_n - nbc^n) \vdots a$.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. Bộ ba số $a, b, c \in \mathbb{N}$ với $b < a, c < a$ thoả mãn hai điều kiện đã nêu khi và chỉ khi ta có đồng thời hai điều kiện sau đây:

α) $bc \equiv 1 \pmod{a}$;

β) $nbc^n + (n-1)bc^{n-1} \equiv (n+1)bc^{n+1} \pmod{a}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh bổ đề:

1) Giả sử $a, b, c \in \mathbb{N}$ thoả mãn hai điều kiện của bài toán. Ta sẽ chứng minh rằng nó thoả mãn $\alpha), \beta)$. Thật vậy từ điều kiện

$$u_n - nbc^n \vdots a, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Khi $n = 1$, ta có $1 - bc \vdots a \Rightarrow bc \equiv 1 \pmod{a}$. Vậy α) được thoả mãn.

Trong (13) lấy $n = 2$, ta có $u_2 = 2bc^2 \vdots a$ hay $1 - 2bc^2 \vdots a$, suy ra $2bc^2 \equiv 1 \pmod{a}$, tức là $bc \equiv 2bc^2 \pmod{a}$ nói khác đi β) đúng khi $n = 1$.

Trong (13) lần lượt thay với $n-1, n+1$, ta có

$$u_{n-1} \equiv (n-1)bc^{n-1} \pmod{a};$$
$$u_n \equiv nbc^n \pmod{a};$$
$$u_{n+1} \equiv (n+1)bc^{n+1} \pmod{a}.$$

Do $\{u_n\}$ là dãy Fibonacci, nên $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, suy ra

$$nbc^n + (n-1)bc^{n-1} \equiv (n+1)bc^{n+1} \pmod{a}.$$

Vậy β) đúng khi $n > 1$, tức là đúng $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) Bây giờ ta chứng minh ngược lại. Giả sử $a, b, c \in \mathbb{N}(b < a, c < a)$ thoả mãn α) và β), ta phải chứng minh nó thoả mãn yêu cầu đề bài, tức là phải chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}$ ta có

$$u_n - nbc^n \vdots a. \tag{14}$$

Ta sẽ chứng minh (14) bằng quy nạp.

Theo α) ta có $bc \equiv 1 \pmod a$ tức là $1 - bc \vdots a$ hay $u_1 - 1bc^1 \vdots a$.

Vậy(14) đúng khi $n = 1$.

Theo β) ta có $bc \equiv 2bc^2 \pmod a$ hay $u_2 - 2bc^2 \vdots a$ vậy (14) đúng khi $n = 2$.

Giả sử (14) đúng đến n, tức là ta có

$$u_{n-1} - (n-1)bc^{n-1} \vdots a;$$

$$u_n - nbc^n \vdots a.$$

Từ đó $u_{n-1} + u_n \equiv (n-1)bc^{n-1} + nbc^n \pmod a$, suy ra

$$u_{n+1} \equiv (n-1)bc^{n-1} + nbc^n \pmod a.$$

Theo điều kiện β) thì

$$nbc^n + (n-1)bc^{n-1} \equiv (n+1)bc^{n+1} \pmod a.$$

Vậy, ta suy ra

$$u_{n+1} \equiv (n+1)bc^{n+1} \pmod a, \text{ hay } u_{n+1} - (n+1)bc^{n+1} \vdots a.$$

Vậy (14) đúng với mọi n.

Bổ đề được chứng minh hoàn toàn.

Bây giờ ta giải bài toán đã cho với điều kiện ban đầu được thay bằng hệ điều kiện $\alpha), \beta)$.

Do $bc \equiv 1 \pmod a$ nên $(b, a) = (c, a) = 1$.

Thật vậy, giả thiết phản chứng $(b, a) = d > 1 \Rightarrow b = pd; a = qd$.

Ta có $bc - 1 = ka \Rightarrow pdc - kqd = 1 \Rightarrow d(pc - kq) = 1$. Đẳng thức vừa thu được là vô lí do $k > 1$ và $qc - kd \in \mathbb{Z}$ vậy $(b, c) = 1$. Tương tự $(c, a) = 1$.

Từ điều kiện $\beta)$ ta có $\forall n \in \mathbb{N}$ thì

$$(n+1)bc^{n+1} - nbc^{n} - (n-1)bc^{n-1} \vdots a.$$

Do $(c, a) = 1 \Rightarrow (c^{n-1}, a) = 1 \Rightarrow b[(n+1)c^2 - nc - (n-1)] \vdots a$. Lại do $(b, a) = 1$ nên $(n+1)c^2 - nc - (n-1) \vdots a$ suy ra

$$(n+1)(c^2 - c - 1) + (c+2) \vdots a, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vì điều ấy đúng $\forall n \in \mathbb{N}$, nên phải có $c^2 - c - 1 \vdots a$ và $c + 2 \vdots a$

Suy ra $(c^2 - c - 1) - (c+2)(c-3) \vdots a \Rightarrow 5 \vdots a$. Do $a > 1$ (vì $a > b, a > c$) $\Rightarrow a = 5$.

Do $c + 2 \vdots a \Rightarrow c + 2 \vdots 5$ mà $c < 5 \Rightarrow c = 3$. Do $bc \equiv 1 \pmod{a}$ nên $3b \equiv 1 \pmod{5}$ mà $b < 5 \Rightarrow b = 2$. Vậy tồn tại duy nhất bộ ba số phải tìn là $a = 5, b = 2, c = 3$. Đó chính là (đpcm).

KẾT LUẬN

Các bài toán về dãy số đã được đề cập ở hầu hết các tài liệu về giải tích, đại số, như tác giả đã giới thiệu trong phần mở đầu, trong luận văn này chỉ đề cập đến tính chất số học của các phần tử trong dãy số. Luận văn đã trình bày hệ thống một số bài toán thoả mãn tính chất số học nào đó đặt ra như là tính chính phương, tính nguyên tố, tính chia hết ... đối với các phần tử của dãy số. Đồng thời luận văn cũng trình bày sơ lược phương hướng giải quyết vấn đề nêu ra, với các dãy số là cấp số cộng và cấp số nhân luận văn cũng xét đến tính chia hết, tính chính phương, tính nguyên tố ... đối với các phần tử của nó, đặc biệt là luận văn đã đề cập tới một số bài toán về ước chung lớn nhất, tính chia hết, tính nguyên tố của các phần tử trong dãy Fibonacci và mối liên hệ giữa số thứ tự của phần tử trong dãy số và tính chia hết. Để làm được những điều này người ta đã kết hợp một cách khéo léo các phương pháp cơ bản của lí thuyết dãy với các nguyên lí của số học làm cho việc chứng minh bài toán thêm phần hấp dẫn, tạo nên sự đa dạng, phong phú trong kho tàng toán học của nhân loại.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Hữu Điển, (2003), Phương pháp quy nạp toán học, Nhà xuất bản Giáo dục.

[2] Võ Giang Giai - Nguyễn Ngọc Thu, (2006), Một số bài toán về dãy số, Nhà xuất bản Đại học quốc gia Hà Nội.

[3] Nguyễn Hữu Hoan, (2004), Lí thuyết số, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm.

[4] Phan Huy Khải, (2006), Số học và dãy số, Nhà xuất bản Giáo dục.

[5] Nguyễn Văn Mậu,(2004), Một số bài toán chọn lọc về dãy số, Nhà xuất bản Giáo dục .

[6] Lê Đình Thịnh -Lê Đình Định , (2004), Phương pháp sai phân, Nhà xuất bản Đại học quốc gia Hà nội.

[7] Bộ giáo dục và đào tạo, (2005),Tuyển chọn theo chuyên đề toán học và tuổi trẻ, Nhà xuất bản Giáo dục.