Chủ đề:

ĐA THỨC

Chủ đề nâng cao lớp 10

Biên soạn: **ĐỖ THANH HÂN**

- -

A/ MỤC TIÊU:

- Cung cấp cho học sinh một số khái niệm cơ bản về đa thức, phép chia đa thức và phương trình hàm đa thức.
- Cung cấp cho học sinh một số phương pháp giải toán về đa thức qua các ví dụ và bài tập.
- Rèn kĩ năng vận dụng linh hoạt, diễn đạt chặt chẽ.
- Góp phần xây dựng năng lực tư duy lôgic, tư duy độc lập sáng tạo.

B/ THỜI LƯỢNG:

6 tiết

C/ NỘI DUNG:

Chủ đề bao gồm các kiến thức được trình bày trong hai bài:

- Bài 1: Đa thức và phép chia đa thức. (4 tiết)
- Bài 2: Đa thức với hệ số nguyên và phương trình hàm đa thức. (2 tiết)

D/ CHÚ THÍCH VỀ MỨC ĐỘ YÊU CẦU:

- Chủ đề này thuộc loại chủ đề nâng cao, nhằm bổ sung một số kiến thức cơ bản và cần thiết về đa thức và ứng dụng, nâng cao khả năng tự học của học sinh dưới sự hướng dẫn của giáo viên.
- Đây là tài liệu tự học có hướng dẫn nhằm đạt được mục tiêu như đã nêu trên.
- Chủ đề này giúp các em học sinh khá giỏi có thêm tài liệu tham khảo (qua các ví dụ và bài tập có đánh dấu *).

- - - - - - - - - - - - -

Bài 1

ĐA THỨC – PHÉP CHIA ĐA THỨC

I/ ĐA THỨC VÀ CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN:

1) Định nghĩa 1.1

a) Đa thức $f(x)$ là một biểu thức có dạng:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x\ +a_0$$

(trong đó $n\in N^*$; $x\in R$; $a_0,a_1,...,a_n\in R$; $a_n\neq 0$)

b) Nếu $f(x)$ là một đa thức thì hàm số $y=f(x)$ gọi là một hàm đa thức. Với mỗi số thực *a,* $f(a)$ gọi là giá trị của hàm đa thức $f(x)$ tại điểm a .

c) Số tự nhiên *n* gọi là bậc của $f(x)$, kí hiệu $\deg f=n$.

d) Các hệ số $a_0,a_1,...,a_n$ gọi là các hệ số của $f(x)$, a_n gọi là hệ số bậc cao nhất, a_0 gọi là hệ số tự do; a_kx^k $(a_k\neq 0)$ gọi là hạng tử bậc k , a_nx^n là hạng tử bậc cao nhất.

2) Định lí 1.1

a) Đa thức $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x\ +a_0$ bằng không khi và chỉ khi

$$a_n=a_{n-1}=...=a_1=a_0=0$$

b) Mỗi đa thức $f(x)$ khác không có một cách viết duy nhất dưới dạng:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x\ +a_0 \qquad (a_n\neq 0).$$

3) Hệ quả 1.1

Hai đa thức khác không là bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng bậc và các hệ số của mỗi hạng tử cùng bậc là bằng nhau.

- Chú ý: Tập hợp tất cả các đa thức với hệ số thực được kí hiệu là $R[x]$.

Tương tự $Q[x]$, $Z[x]$ tương ứng là tập hợp tất cả các đa thức với hệ số hữu tỉ, hệ số nguyên.

***Thực hành 1:* Xác định các hệ số của đa thức.**

Phương pháp giải: Sử dụng hệ quả 1.1

(*Nguyên lí so sánh các hệ số của đa thức*).

Ví dụ 1) Tìm a,b,c biết rằng:

$$a(x+2)^2+b(x+3)^2=cx+5 \qquad \forall x\in R$$

Lời giải:

Ta có $a(x+2)^2+b(x+3)^2=cx+5$

$$\Leftrightarrow (a+b)x^2+(4a+6b)x+4a+9b=cx+5$$

Theo hệ quả 1.1, ta có: $\begin{cases} a+b=0\\ 4a+6b=c\\ 4a+9b=5\end{cases}$

Giải hệ trên ta được: $a=-1; b=1; c=2.$

- - - - - - - - - - - - - - -

Bài tập tự giải:

1) Tìm *a, b* biết rằng $x^4+2x^3+3x^2+ax+b$ là bình phương của một đa thức khác.

(*Hướng dẫn: Đặt* $x^4+2x^3+3x^2+ax+b=(x^2+mx+n)^2$

ĐS: $a=2, b=1$)

- - - - - - - - - - - - - - -

2) Tìm *a, b, c* biết rằng $\dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+1}=a+\dfrac{bx+c}{x^2+1} \qquad \forall x\in R.$

(ĐS: $a=-1; b=-2; c=4.$)

- -

Ví dụ 2)* Tìm tất cả các đa thức $f(x)\in Z[x]$ khác không, thỏa:

$$16f(x^2)=[f(2x)]^2 \qquad \forall x\in R. \qquad (1)$$

Lời giải:

Gọi $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0 \qquad (a_n\neq 0; a_i\in R, i=1,2,...,n).$

Ta có

$$(1)\Leftrightarrow 16(a_nx^{2n}+a_{n-1}x^{2n-2}+...+a_1x^2+a_0)=[a_n(2x)^n+a_{n-1}(2x)^{n-1}+...+a_1(2x)+a_0]^2$$

Đồng nhất hệ số của x^{2n} ta có: $16.a_n=2^{2n}.a_n^2 \quad \Rightarrow \quad a_n=\dfrac{16}{4^n}$ (do $a_n\neq 0$)

Mà $a_n\in Z$ nên $n=0,1,2.$

- Với $n=0$: ta có $a_0=16 \quad \Rightarrow f(x)=16 \quad \forall x\in R.$

- Với $n=1$: ta có $a_1 = 4$ nên $f(x) = 4x + a_0$ thay vào (1) ta có
  $16\left(4x^2 + a_0\right) = \left(8x + a_0\right)^2 \quad \Leftrightarrow 16a_0 = 16a_0x + a_0^2 \quad \Leftrightarrow a_0 = 0.$(do (1) đúng $\forall x$)
  Vậy $f(x) = 4x \quad \forall x \in R$.
- Với $n=2$: ta có $a_2 = 1$ nên $f(x) = x^2 + a_1x + a_0$ thay vào (1) ta có
  $$16\left(x^4 + a_1x^2 + a_0\right) = \left[(2x)^2 + a_1(2x) + a_0\right]^2$$
  $$\Leftrightarrow \quad 16\left(x^4 + a_1x^2 + a_0\right) = 16x^4 + 16a_1x^3 + \left(4a_1^2 + 8a_0\right)x^2 + 4a_1a_0x + a_0^2$$
  Đồng nhất các hệ số ta được: $a_1 = a_0 = 0.$
  Vậy $f(x) = x^2 \quad \forall x \in R.$

Thử lại, ta thấy cả 3 hàm số $\left[\begin{array}{l} f(x) = 16 \\ f(x) = 4x \\ f(x) = x^2 \end{array}\right.$ đều thỏa đề ra.

\- - - - - - - - - - - - - -

Bài tập tự giải:

Tìm tất cả các đa thức $f(x) \in Z[x]$ khác không, thỏa:

$$f\left(x^2\right) = \left[f(x)\right]^2 \quad \forall x \in R.$$

(ĐS: $f(x) = x^n, \quad n = 0,1,2,3,...$)

\- -

Thực hành 2: ***Tính tổng các hệ số của đa thức.***
Phương pháp giải: Sử dụng kết quả:
Nếu $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$,
thì $f(1) = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$.

Ví dụ: Hãy tính tổng các hệ số của đa thức:

$$f(x) = \left(2 - 3x + 3x^5\right)^{32}\left(3 - 5x + 8x^2 - 6x^3\right)^{2006}.$$

Lời giải:

Ta viết $f(x)$ ở dạng: $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$.
Ta có tổng các hệ số của đa thức đã cho là:

$$a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 = f(1) = (2 - 3 + 3)^{32}(3 - 5 + 8 - 6)^{2006} = 0.$$

\- - - - - - - - - - - - - -

Bài tập tự giải:

Với $a \in R$, hãy tính tổng các hệ số của đa thức:

$$f(x) = \left(x^2 + ax - a + 1\right)^6\left(4x^4 - 2x^2 - 3x + 2\right)^{12} - (x+1)^5\left(x^3 + x - 1\right)^{10}.$$

(ĐS: 32)

\- - - - - - - - - - - - - -

II/ PHÉP CHIA ĐA THỨC:

1/ Phép chia hết:

Định nghĩa 1.2)

Ta nói rằng đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$, kí hiệu $f(x) \vdots g(x)$, nếu tồn tại một đa thức $h(x)$ sao cho $f(x) = g(x).h(x)$

2/ Phép chia có dư:

Định lí 1.2)

Với hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ ($g(x) \neq 0$) luôn tồn tại duy nhất hai đa thức $q(x)$ và $r(x)$ sao cho $f(x) = g(x).q(x) + r(x)$, trong đó $r(x) = 0$ hoặc $\deg r < \deg g$.

(Đa thức $q(x)$ gọi là thương, đa thức $r(x)$ gọi là dư của phép chia $f(x)$ cho $g(x)$).

3/ Nghiệm của đa thức:

Định nghĩa 1.3)

Ta nói a là nghiệm của đa thức $f(x)$ nếu $f(a) = 0$.

Định lí 1.3) (Định lí Bơ-du)

Số a là nghiệm của đa thức $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x) \vdots (x-a)$.

Định nghĩa 1.4)

Ta nói a là nghiệm bội k $(k \in N; k \geq 2)$ của đa thức $f(x)$ nếu tồn tại đa thức $g(x)$ mà $g(a) \neq 0$ và $f(x) = (x-a)^k g(x) \quad \forall x \in R$.

***Thực hành 3:* Xác định đa thức chia trong phép chia hết.**

Phương pháp giải:

PP1: Sử dụng định nghĩa phép chia hết và nguyên lí so sánh các hệ số của đa thức.

PP2: Sử dụng định lí phép chia có dư sau đó cho dư thức bằng không.

PP3: Sử dụng định lí Bơ-du.

Ví dụ 1) Tìm a biết rằng:

$f(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ chia hết cho đa thức $x^2 - x - 1$.

Lời giải:

Đặt $f(x) = (x^2 - x - 1)(6x^2 + bx + c)$

Ta có $6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2 = 6x^4 + (b-6)x^3 + (c-b-6)x^2 - (b+c)x - c$

Suy ra $\begin{cases} b-6=-7 \\ c-b-6=a \\ -b-c=3 \\ -c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ c=-2 \\ a=-7 \end{cases}$

Vậy a = -7 là giá trị phải tìm.

- - - - - - - - - - - - - - -

<u>Ví dụ 2)</u> Tìm *a, b* biết rằng: $f(x)=ax^4+bx^3+1$ chia hết cho $(x-1)^2$.

<u>Lời giải:</u>

<u>*Cách 1:</u>

Đặt $f(x)=(x-1)^2(ax^2+mx+n)$

Ta có $ax^4+bx^3+1=ax^4+(m-2a)x^3+(n-2m+a)x^2+(m-2n)x+n$

Suy ra $\begin{cases} m-2a=b \\ n-2m+a=0 \\ m-2n=0 \\ n=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=1 \\ m=2 \\ a=3 \\ b=-4 \end{cases}$

Vậy a = 3, b = - 4 là giá trị phải tìm.

- - - - - - - - - - - - - - -

<u>*Cách 2:</u>

Lấy $f(x)$ chia cho $(x-1)^2$, ta được dư:

$$r(x)=(4a+3)x+1-3a-2b. \qquad (1)$$

Do $f(x) \vdots (x-1)^2$ nên $r(x)=0 \quad \forall x \in R$ vì vậy từ (1) ta có:

$$\begin{cases} 4a+3b=0 \\ 1-3a-2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$$

- - - - - - - - - - - - - - -

<u>*Cách 3:</u>

Vì $f(x) \vdots (x-1)^2$ nên $x=1$ là nghiệm bội 2 của $f(x)$, do đó:

$f(1)=0 \quad \Rightarrow \quad a+b+1=0 \quad \Rightarrow \quad b=-a-1$

Suy ra $f(x)=ax^4-(a+1)x^3+1$

$=(x-1)(ax^3-x^2-x-1)$

Do $x=1$ là nghiệm bội 2 của $f(x)$ nên $x=1$ là nghiệm của $q(x)=ax^3-x^2-x-1$

Vì vậy $q(1)=0 \quad \Rightarrow \quad a-3=0 \quad \Rightarrow \quad a=3.$

Suy ra $b=-4.$

Vậy a = 3, b = - 4 là giá trị phải tìm.

- - - - - - - - - - - - - - -

<u>Ví dụ 3)*</u> Cho $F=x^3+y^3+z^3+mxyz$.

Định *m* để F chia hết cho $(x+y+z)$.

Lời giải:

Xem F là một đa thức theo x, kí hiệu $F(x)$.

Vì $(x+y+z) = x-(-y-z)$ và $F \vdots (x+y+z)$ nên $F(x) \vdots \left[x-(-y-z)\right]$

Suy ra $F(-y-z)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (-y-z)^3 + y^3 + z^3 + m(-y-z)yz = 0$

$$\Leftrightarrow \quad -3yz(y+z) + m(-y-z)yz = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -yz(y+z)(3+m) = 0$$

Đẳng thức trên đúng $\forall y, z \quad \Leftrightarrow \quad m=-3.$

- - - - - - - - - - - - - - -

Bài tập tự giải:

1) Tìm *a, b* biết rằng $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ chia hết cho đa thức $x^2 - x + b.$

(*Hướng dẫn: Đặt* $f(x) = (x^2 - x + b)(6x^2 + mx + n)$

ĐS: $\begin{cases} a=-7 \\ b=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-12 \\ b=-2 \end{cases}$)

- - - - - - - - - - - - - - -

2) Tìm *a, b* biết rằng $f(x) = x^4 + 1$ chia hết cho đa thức $x^2 + ax + b.$

(*Hướng dẫn: Đặt* $f(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + mx + n)$

ĐS: $\begin{cases} a=\sqrt{2} \\ b=1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-\sqrt{2} \\ b=1 \end{cases}$)

- -

Thực hành 4:* *Xác định đa thức chia trong phép chia có dư.

Phương pháp giải:

Sử dụng định lí phép chia có dư, chú ý đến các giá trị đặc biệt của *x*.

Ví dụ 1) Tìm *a, b, c* biết rằng:

$f(x) = 2x^4 + ax^2 + bx + c$ chia hết cho $x+2$ và khi chia $f(x)$ cho $x^2 - 1$ thì được dư là *x*.

Lời giải:

Từ giả thiết, ta có: $\begin{cases} f(x) = (x+2)q_1(x) \\ f(x) = (x^2-1)q_2(x) + x \end{cases}.$

Suy ra $\begin{cases} f(-2)=0 \\ f(1)=1 \\ f(-1)=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32+4a-2b+c=0 \\ 2+a+b+c=0 \\ 2+a-b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{28}{3} \\ b=1 \\ c=\dfrac{22}{3} \end{cases}$

- - - - - - - - - - - - -

Ví dụ 2) Tìm *a, b, c* biết rằng:

$f(x)=x^5-3x^4+2x^3+ax^2+bx+c$ chia cho x^3-2x^2-x+2 thì có số dư là 1.

Lời giải:

Vì $x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x+1)(x-2)$ nên từ giả thiết ta có:

$$f\left(x\right)=(x-1)(x+1)(x-2)q(x)+1$$

Suy ra: $\begin{cases} f(1)=1 \\ f(-1)=1 \\ f(2)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ a-b+c=7 \\ 4a+2b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=3 \end{cases}$

- - - - - - - - - - - - - - -

Bài tập tự giải:

1) Tìm *a, b, c* biết rằng $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ chia hết cho $x-2$ và khi chia $f(x)$ cho x^2-1 thì được dư là 2*x*.

(ĐS: $a=-10; b=-19; c=-10$)

- - - - - - - - - - - - - - -

2) Tìm đa thức bậc ba $f(x)$, biết rằng đa thức đó chia hết cho $x-2$ và có cùng số dư là -4 khi chia lần lượt cho $x+1$, $x+2$, $x-1$

(ĐS: $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{3}-\frac{x}{3}-\frac{14}{3}$)

- - - - - - - - - - - - - - - - - -*)(* - - - - - - - - - - - - - - - - -

Bài 2

ĐA THỨC VỚI HỆ SỐ NGUYÊN VÀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA THỨC

I/ ĐA THỨC VỚI HỆ SỐ NGUYÊN:

Tính chất 2.1)

Nếu $f(x)$ là một đa thức với những hệ số nguyên và *a*, *b* là những số nguyên, thì hiệu *f(a) – f(b)* chia hết cho *a – b*.

Chứng minh:

Vì $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\in Z[x],\ a,b\in Z$ nên:

$$f(a)-f(b)=a_n\left(a^n-b^n\right)+...+a_1(a-b)$$
$$=(a-b)\left[a_n\left(a^{n-1}+...+b^{n-1}\right)+...+a_1\right]$$

Từ đây suy ra tính chất được chứng minh.

Thực hành 5: ***Các bài toán đa thức liên quan đến số học.***

Phương pháp giải:

Sử dụng tính chất 2.1.

Ví dụ 1) Cho $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên, có $f(0)$, $f(1)$ là các số lẻ. Chứng minh rằng phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải:

Gọi α là nghiệm nguyên của $f(x)$, ta có $f(x)=(x-\alpha)g(x)$ với $g(x)\in Z[x]$

Suy ra $f(1)=(1-\alpha)g(1)$ mà $f(1)$ là số lẻ nên α là số chẵn.

Tương tự $f(0)=(0-\alpha)g(0)$ mà $f(0)$ là số lẻ nên α là số lẻ.

Mâu thuẫn trên chứng tỏ điều ta giả sử là sai.

Vậy phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm nguyên. (*đpcm*)

- - - - - - - - - - - - -

Ví dụ 2)* Chứng minh rằng với mọi số nguyên a phương trình:

$f(x)=x^4-2007x^3+(2006+a)x^2-2005x+a=0$ không thể có hai nghiệm nguyên phân biệt.

Lời giải:

Gọi α là nghiệm nguyên của $f(x)$, ta có $f(\alpha)=0$.
Vì $f(1)=2a-2005$ là số lẻ, nên $f(1)-f(\alpha)=2a-2005$ là số lẻ.
Do $f(1)-f(\alpha)\vdots(1-\alpha)$ nên $1-\alpha$ là số lẻ, suy ra α là số chẵn.

Giả sử α_1,α_2 là hai nghiệm nguyên phân biệt của phương trình $f(x)$=0, thì α_1,α_2 là các số chẵn và:

$$0=\frac{f(\alpha_1)-f(\alpha_2)}{\alpha_1-\alpha_2}$$
$$=\left(\alpha_1^3+\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_1\alpha_2^2+\alpha_2^3\right)-2007\left(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2\right)+\left(2006+a\right)\left(\alpha_1+\alpha_2\right)-2005$$

Đẳng thức trên không thể xảy ra vì α_1,α_2 là các số chẵn.
Mâu thuẫn trên chứng tỏ điều ta giả sử là sai.
Vậy phương trình $f(x)$=0 không thể có hai nghiệm nguyên phân biệt. (*đpcm*)

- - - - - - - - - - - - - -

Bài tập tự giải:

1) Cho $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên thỏa điều kiện: *f(a+b) = ab* với mọi số nguyên không âm *a, b*.

Chứng minh rằng: $f(a)\vdots b$ và $f(b)\vdots a$.

- - - - - - - - - - - - - -

2) Có hay không đa thức $f(x)\in Z[x]$ thỏa: $\begin{cases} f(2007)=2006 \\ f(2002)=2003 \end{cases}$

- - - - - - - - - - - - - -

3)* Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai đa thức với hệ số nguyên thỏa điều kiện:

$$P(x)=f\left(x^3\right)+xg\left(x^3\right)\vdots\left(x^2+x+1\right)$$

Chứng minh rằng: $UCLN\left(f(2006),g(2006)\right)\geq 2005$.

(*Hướng dẫn: Viết* $P(x)$ ở dạng:

$$P(x)=\left[f\left(x^3\right)-f(1)\right]+x\left[g\left(x^3\right)-g(1)\right]+f(1)+xg(1))$$

- -

Thực hành 6:* *Các bài toán đa thức liên quan đến số học.

Phương pháp giải:

Sử dụng định lí Bơ-du và định nghĩa 1.4..

Ví dụ 1) Cho $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên, có $f(2005)f(2006)=2007$. Hỏi đa thức $f(x)$ có nghiệm nguyên hay không?

Lời giải:

Gọi α là nghiệm nguyên của $f(x)$, ta có $f(x)=(x-\alpha)g(x)$ với $g(x)\in Z[x]$

Nên $f(2005)=(2005-\alpha)g(2005)$.

$f(2006)=(2006-\alpha)g(2006)$.

Suy ra $f(2005)f(2006)=(2005-\alpha)(2006-\alpha)g(2005)g(2006)$.

Do $(2005-\alpha)(2006-\alpha)\vdots 2$ nên $f(2005)f(2006)=2007\vdots 2$ vô lí.

Mâu thuẫn trên chứng tỏ điều ta giả sử là sai.

Vậy phương trình $f(x)$=0 không thể có nghiệm nguyên. (*đpcm*)

- - - - - - - - - - - - - - - -

Ví dụ 2)* Cho $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên.

Chứng minh rằng nếu $f(0), f(1),..., f(m-1)$ đều không chia hết cho *m* $(m\leq N, m\geq 2)$ thì phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải:

Giả sử phương trình $f(x)=0$ có một nghiệm nguyên là α, ta có:

$f(x)=(x-\alpha)g(x)$ với $g(x)\in Z[x]$

Khi đó: $f(0)=(0-\alpha)g(0)$.

$f(1)=(1-\alpha)g(1)$.

. . . .

$f(m-1)=(m-1-\alpha)g(m-1)$.

Vì: $(0-\alpha),(1-\alpha),...,(m-1-\alpha)$ là *m* số nguyên liên tiếp nên phải có một số chia hết cho *m*, vì vậy trong *m* số $f(0), f(1),..., f(m-1)$ phải có ít nhất một số chia hết cho *m,* mâu thuẫn giả thiết.

Vậy điều ta giả sử là sai, suy ra phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm nguyên. (*đpcm*)

- - - - - - - - - - - - - - - -

Ví dụ 3)* Cho đa thức $f(x)$ với các hệ số nguyên. Giả sử phương trình $f(x)=1$ có quá 3 nghiệm nguyên. Chứng minh rằng phương trình $f(x)=-1$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải:

Giả sử phương trình $f(x)=-1$ có nghiệm nguyên α, ta có: $f(\alpha)=-1$.

Vì phương trình $f(x)=1$ có quá 3 nghiệm nguyên nên có ít nhất 4 nghiệm nguyên khác nhau, gọi 4 nghiệm đó là: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

Ta có: $f(x)-1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)g(x)$ với $g(x)\in Z[x]$

Suy ra $\quad f(\alpha)-1=-2=(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)(\alpha-\alpha_3)(\alpha-\alpha_4)g(\alpha)$,
trong đó: $\alpha-\alpha_1, \alpha-\alpha_2, \alpha-\alpha_3, \alpha-\alpha_4$ là 4 số nguyên phân biệt.
Vậy -2 phân tích được thành tích của 4 số nguyên khác nhau, vô lí.
Suy ra phương trình $f(x)=-1$ không có nghiệm nguyên.

- -

Bài tập tự giải:

1) Cho $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên có $f(x)=1996$ tại 5 giá trị nguyên của *x*. Chứng minh rằng: $f(x)\neq 2006$ với mọi giá trị nguyên của *x*.
(*Hướng dẫn: chú ý 10 chỉ có thể phân tích của nhiều nhất 4 số nguyên khác nhau*)

- - - - - - - - - - - - - - - -

2) Biết đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên nhận giá trị bằng 2 tại 4 giá trị nguyên khác nhau của *x*.
Chứng minh rằng: $f(x)$ không thể nhận các giá trị 1, 3, 5, 7, 9.
(*Hướng dẫn: Đặt* $F(x)=f(x)-2=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)g(x)$)

- - - - - - - - - - - - - - - -

3) Biết đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên có tính chất $|f(x)|=2$ với *x* nhận 5 giá trị nguyên khác nhau.
Chứng minh rằng: $f(x)$ không thể có nghiệm nguyên.

- -

II/ PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA THỨC:

Định lí 2.1) (Khai triển đa thức theo các nghiệm)
Giả sử $a_1, a_2, ..., a_m$ là các nghiệm của đa thức $f(x)$ với các bội tương ứng lần lượt là $k_1, k_2, ..., k_m$, khi đó tồn tại đa thức $g(x)$ sao cho:

$$f(x)=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}...(x-a_m)^{k_m}g(x) \qquad \forall x\in R..$$

(với $g(a_i)\neq 0$, $i=1,2,...,m$ và $\deg f = k_1+k_2+...+k_m+\deg g$)

Hệ quả 2.1)
a) Mọi đa thức bậc $n\geq 1$ đều có không quá *n* nghiệm thực.
b) Nếu đa thức $f(x)$ có bậc *n* mà tồn tại $n+1$ số thực phân biệt $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ sao cho $f(a_i)=c \quad \forall i=1,2,...,n+1$ thì $f(x)=c \quad \forall x\in R$.

Thực hành 7: ***Tìm phương trình hàm đa thức.***
Phương pháp giải:
Sử dụng định lí 2.1 và hệ quả 2.1.

<u>Ví dụ 1)*</u> Tìm tất cả các đa thức $f(x) \in R[x]$ thỏa:

$$x.f(x-1) = (x-3).f(x) \quad \forall x \in R. \quad (1)$$

<u>Lời giải:</u>

Từ (1): cho x =0 ta có $f(0)=0$.

Suy ra: với x =1 ta có $f(1)=0$.

Với x =2 ta có $f(2)=0$.

Vậy $f(x)$ nhận 0, 1, 2 làm nghiệm, nên theo hệ quả 2.1 ta có:

$f(x) = x(x-1)(x-2)g(x)$ với $g(x) \in R[x]$.

Thay vào (1) ta có:

$$x(x-1)(x-2)(x-3)g(x-1) = (x-3)x(x-1)(x-2)g(x) \quad \forall x \in R.$$

Suy ra: $g(x-1) = g(x) \quad \forall x \in R \setminus \{0;1;2;3\}$.

Suy ra $g(4) = g(5) = g(6) = ... = g(n) = ...$ tức là $g(x)$ nhận cùng một giá trị tại vô số điểm, nên: $g(x) = c \quad \forall x \in R.$

Vậy $f(x) = cx(x-1)(x-2) \quad \forall x \in R$

Thử lại ta thấy $f(x) = cx(x-1)(x-2) \quad \forall x \in R$ thỏa đề bài.

- - - - - - - - - - - - - - - -

<u>Ví dụ 2)*</u> Tìm tất cả các đa thức $f(x) \in R[x]$ thỏa:

$$f(x+1) = f(x) + 2x + 1 \quad \forall x \in R. \quad (2)$$

<u>Lời giải:</u>

Ta có (2) $\Leftrightarrow f(x+1) - (x+1)^2 = f(x) - x^2 \quad \forall x \in R.$ (3)

Đặt $g(x) = f(x) - x^2 \quad \forall x \in R.$

Ta có: $(3) \Leftrightarrow g(x+1) = g(x) \quad \forall x \in R.$

Suy ra $g(0) = g(1) = g(2) = ... = g(n) = ...$ tức là $g(x)$ nhận cùng một giá trị tại vô số điểm, nên: $g(x) = c \quad \forall x \in R.$

Vậy $f(x) = x^2 + c \quad \forall x \in R$

Thử lại ta thấy $f(x) = x^2 + c \quad \forall x \in R$ thỏa đề bài.

- -

<u>Bài tập tự giải:</u>

<u>1)*</u> Tìm tất cả các đa thức $f(x) \in R[x]$ thỏa:

$$(x-1).f(x+1) = (x+2).f(x) \quad \forall x \in R.$$

(ĐS: $f(x) = cx(x^2-1) \quad \forall x \in R.$)

- -

2)* Tìm tất cả các đa thức $f(x) \in R[x]$ thỏa:

$$x.f(x-1) = (x-5).f(x) \quad \forall x \in R.$$

(ĐS: $f(x) = cx(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \quad \forall x \in R.$)

\- -

3)* Tìm tất cả các đa thức $f(x) \in R[x]$ thỏa:

$$f\left[(x+1)^2\right] = f\left(x^2\right) + 2x + 1 \quad \forall x \in R.$$

(ĐS: $f(x) = x + c \quad \forall x \in R.$)

\- -

4)* Tìm tất cả các đa thức $f(x) \in R[x]$ thỏa:

$$(x-1)^2 f(x) = (x-3)^2 f(x+2) \quad \forall x \in R.$$

(ĐS: $f(x) = c(x-3)^2 \quad \forall x \in R.$)

- - - - - - - - - - - - - - - - - -*) HẾT (* - - - - - - - - - - - - - - - - -